Čtyřky

1. JARNÍ SÉRIE　　　　Termín odeslání: 3. února 2020

Úloha $\frac{4}{4} \cdot \frac{4}{4}$. (3 body)

Tabulka 4×4 je vyplněna čísly 1 a 2 tak, že součet čísel v každém čtverci 3×3 je dělitelný čtyřmi a součet čísel v celé tabulce není dělitelný čtyřmi. Jaký je největší a nejmenší možný součet čísel v tabulce?

Úloha $\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$. (3 body)

Lenka má čtverec $EFGH$ s délkou strany 1. Na jeho stranách EF, FG, GH, HE leží po řadě body A, B, C, D. Dokažte, že platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \leq 4.$$

Úloha $\frac{4+4+4}{4}$. (3 body)

Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že neexistuje celé číslo m, jehož druhá mocnina končí v desítkové soustavě n čtyřkami.

Úloha $4 + \frac{4-4}{4}$. (5 bodů)

Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice nad průměry AB, AD se podruhé protnou v bodě A'. Obdobně druhý průsečík kružnic nad průměry BC, BA označíme B', druhý průsečík kružnic nad CD, CB označíme C' a druhý průsečík kružnic nad DA, DC označíme D'. Dokažte, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou podobné.

Úloha $\frac{4 \cdot 4+4}{4}$. (5 bodů)

Uvažme posloupnost[1] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $a_0 = 0$. Další členy definujme následovně. Pro přirozené číslo n označme ℓ_n největší liché číslo, které dělí n. Pak položme $a_n = a_{n-1} + 1$, pokud ℓ_n dává po dělení čtyřmi zbytek 1, a $a_n = a_{n-1} - 1$, pokud dává zbytek 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje nekonečně mnoho i takových, že $a_i = m$.

Úloha $\frac{4+4}{4} + 4$. (5 bodů)

Skupina orgů se rozhodla, že si uspořádají curlingový turnaj. Každý zápas funguje tak, že se čtyři orgové dohodnou a vyzvou na souboj jinou čtveřici. Po skončení turnaje si všimli, že každý hrál proti každému právě v jednom zápase (tzn. byli v opačných týmech). Určete, kolik orgů mohlo být ve skupině.

Úloha $4 + 4 - \frac{4}{4}$. (5 bodů)

Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD, CDA, DAB, ABC po řadě I_A, I_B, I_C, I_D. Nechť platí, že úsečky AI_A, BI_B, CI_C a DI_D prochází jedním bodem. Dokažte, že

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

[1] Pokud nevíš, co je to posloupnost, koukni se na *prase.cz/commentary/C/serie2p/uvod2p.pdf*.

Úloha $4 + 4 + 4 - 4$. (5 bodů)

PraSátka se rozhodla Marianovi k narozeninám, které bude mít v den odeslání této série, dát čtyři polynomy P, Q, R, S s reálnými koeficienty. Chtějí, aby pro libovolná celá čísla x, y, z, t taková, že $xy - zt = 1$, platilo

$$P(x)Q(y) - R(z)S(t) = 1.$$

Určete všechny čtveřice polynomů, které mohou Marianovi dát.