Projektivní geometrie III – Pohyblivá geometrie

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává třetí a závěrečný díl seriálu o projektivní geometrii (tzv. progeo[1]). Než ale vyrazíme na naši poslední pouť a poznáme nový světa kus, zavzpomínejme nejprve na zážitky z poslední výpravy. Ve druhém díle jsme se seznámili s komplexními čísly a Möbiovskými zobrazeními. Dále jsme blíže poznali čeleď kružímkovitých a skamarádili se s inverzí a dualitou. Trasu třetího výletíku velitel rozvrhl opět do světa s nevlastní přímkou. Tentokráte bychom zde měli potkat jiné druhy než posledně. Budeme se, oproti předchozím dílům, hlavně zabývat zobrazeními, které nezobrazují celou rovinu. Naučíme se více rozumět, jak jsou spolu jednotlivé objekty v obrázcích provázané a jak dokazovat úlohy pomocí hýbání s body. Nakonec se podíváme na zoubky Desarguesově involuci (nedbaje lidové moudrosti darované involuci na zuby nehleď).

[1]Nejedná se bohužel o oficiální termín hodný zápisu do matriky geometrických pojmů.

Držáky dvojpoměrů

V prvním díle jsme si definovali dvojpoměr. Umíme ho určit pro čtveřici bodů na přímce, čtveřici bodů na kružnici nebo čtveřici přímek procházejících jedním bodem. Obecně budeme *držák* říkat množině objektů, kde každé čtveřici z nich umíme určit dvojpoměr. Takže množina bodů na přímce je držák, množina bodů na kružnici taky a množina přímek procházejících pevným bodem také.

Poznámka 1. (abstrakce) Držáky by mohly být teoreticky i dost zběsilé objekty a dvojpoměry dost zběsilé funkce. Po dvojpoměru obecně vyžadujeme, aby splňoval jednoznačnost dvojpoměrů a přepočítávací lemmata z prvního dílu. V celém díle se budeme ale zabývat dost jednoduchými držáky, tak tuto abstrakci nebudeme příliš využívat.

Podívejme se nyní na zobrazení mezi držáky, zejména nás budou zajímat ta, která zachovávají dvojpoměry.

Definice 2. *Projektivní* nazveme zobrazení mezi držáky $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takové, že zachovává dvojpoměry. Takže pro všechny čtveřice $A, B, C, D \in \mathcal{U}$ platí, že

$$(A, B, C, D) = \Big(f(A), f(B), f(C), f(D)\Big).$$

Všimni si, že potřebujeme, aby na $\mathcal{U}$ i na $\mathcal{V}$ byl dvojpoměr definován, proto vyžadujeme, aby to byly držáky.

Práce se zobrazením, a ne jen se čtveřicí bodů nám v mnohém usnadní práci. Protože často se pak stačí soustředit místo čtyř bodů jen na jeden a zároveň můžeme využívat triky s dvojpoměry. Ukážeme si, že projektivní zobrazení už vlastně známe, jen jsme je tak nenazývali.

V prvním díle jsme si ukazovali promítací tvrzení. To říkalo, že když máme čtyři body A, B, C, D ležící na přímce a bod P mimo ni, tak

$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$

Nyní můžeme toto tvrzení přeformulovat do světa zobrazení.

Tvrzení 3. (promítací) *Mějme přímku q a bod P mimo ni. Pak zobrazení, které bodu $X \in q$ přiřadí přímku PX, je projektivní.*

Tvrzení, které pojednávalo o čtveřicích bodů, jsme tím zapsali přehledněji využitím méně bodů. Zatím Ti možná tohle nepřijde tak úchvatné, jen se tu plahočíme v definicích. Ale časem v tomto díle uvidíš, jak tenhle pohled na dvojpoměry dokáže spoustu věcí zpřehlednit, a tím Ti umožní „nahlédnout“ i do složitějších důkazů.

Ještě si ukážeme pár takovýchto tvrzení, která nejsou nijak hluboce překvapivá. Důkazy občas necháme jako cvičení, většinou stačí zobrazit obecnou čtveřici v tomto zobrazení a uvědomit si, že dvojpoměr se zachoval.

Na konci této kapitoly si ukážeme, jak jsou tyhle „jednoduché“ nástroje silné. Bez námahy pak půjdou řešit netriviální úlohy.

Tvrzení 4. *Složení dvou projektivních zobrazení je projektivní.*

Tvrzení 5. *Inverzní zobrazení k projektivnímu je projektivní.*

Cvičení 6. Dokaž předchozí tvrzení.

Tvrzení 7. (tři body stačí) *Mějme dvě projektivní zobrazení f, g z držáku $\mathcal{U}$ do držáku $\mathcal{V}$. Pokud existují tři různé prvky $A, B, C \in \mathcal{U}$ takové, že se na nich f a g shodují, pak se tato zobrazení shodují na všech bodech.*

Důkaz. Důkaz plyne velmi rychle z jednoznačnosti dvojpoměrů. Libovolný prvek $X \in \mathcal{U}$ umíme charakterizovat dvojpoměrem (A, B, C, X). Pak protože jsou zobrazení f i g projektivní, tak

$$\Big(f(A), f(B), f(C), f(X)\Big) = (A, B, C, X) = \Big(g(A), g(B), g(C), g(X)\Big).$$

Takže pokud $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ a $f(C) = g(C)$, tak z jednoznačnosti dvojpoměrů se $f(X) = g(X)$. □

Ukážeme si pár užitečných projektivních zobrazení, zkus si rozmyslet, že opravdu jsou projektivní.

(i) Mějme kružnici ω a na ní bod P, pak zobrazení, které $X \in \omega$ přiřadí přímku PX, je projektivní (bodu P přiřadí tečnu k ω).

(ii) Libovolná inverze je projektivní zobrazení. (Držák musí být množina bodů na kružnici nebo na přímce.)

(iii) Mějme dvě přímky p, q a bod P, který na nich neleží. Dále pokud $f : p \to q$ je zobrazení takové, že $X \in p$ se zobrazí na $Y \in q$ tak, že PXY leží na přímce, pak f je projektivní.

(iv) Uvažme držák přímek procházejících bodem P. Označme ℓ jednu pevnou přímku procházející P. Zobrazení, které přímce p přiřadí přímku osově souměrnou podle ℓ, je projektivní.

(v) Libovolné podobné zobrazení neboli libovolné pevné posunutí, stejnolehlost či rotace. Je třeba dávat pozor, jak pak vypadá výstupní držák.

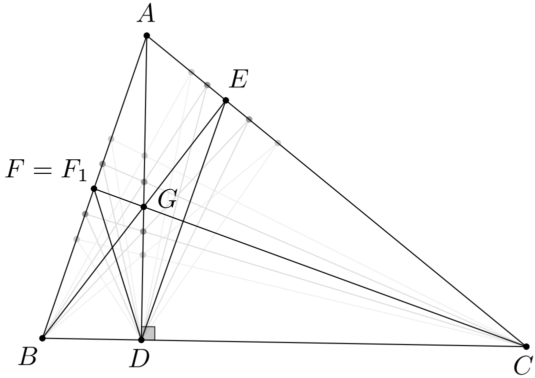
(vi) Jakákoli kolineace je projektivní. Zatím si musíme trochu dávat pozor, jaké držáky na sebe zobrazujeme, později si ukážeme, jak tenhle problém trochu obejít.

(vii) (prostřelovací) Mějme kružnici ω a bod P, který na ní neleží. Pak zobrazení $f : \omega \to \omega$ definované tak, že bodu X přiřadí druhý průsečík XP a ω, je projektivní. Pro důkaz využij buď kolineaci, nebo si vzpomeň, že existuje inverze se středem v P, která ω proklápí na sebe.

I když to tak možná ještě nevypadá, jsme už vyzbrojeni opravdu silnými nástroji. Nejdříve si ukážeme, jak se tyto nástroje používají na jednoduché úloze, a hned pak si předvedeme, jak si poradí s úlohou z IMO 2010. Nenech se odradit tím, že tady řešení sepisujeme docela dlouhá, snažíme se vysvětlit, proč děláme kroky, které děláme.

Příklad 8. (Blanchet potřetí) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD v bodě G. Dokaž, že $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle FDA|$.

Řešení. Označíme F_1 bod ležící na AB splňující $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle F_1DA|$. K dokázání úlohy stačí dokázat, že $F_1 = F$. Začneme hýbat s bodem G po přímce AD. Tím body A, B, C zůstanou pevné, ale body E, F, F_1 se budou nějak hýbat. Zkusíme tyto pohyby nasimulovat pomocí projektivních zobrazení. Konkrétně zkusíme nalézt dvě projektivní zobrazení, která zobrazí G na F, resp. na F_1. Pak můžeme využít lemmatu *tři body stačí.*



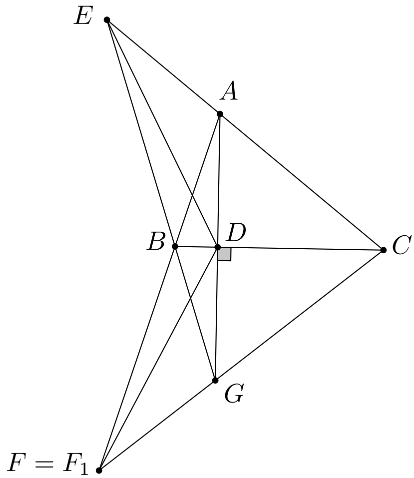
Jak z G sestrojíme F? Dokreslíme přímku CG a nalezneme průsečík CG a AB. Zobrazení $G \mapsto CG$ je projektivní zobrazení z držáku *body na AD* do držáku *přímky skrz C*. Následně zobrazení $CG \mapsto F$ je projektivní zobrazení z držáku *přímky skrz C* do držáku *body na AB*. Složením těchto zobrazení jsme projektivním zobrazením nasimulovali pohyb F v závislosti na G.

Analogicky dostaneme projektivní zobrazení zobrazující G na E. Zbývá nasimulovat stejné úhly, abychom dostali projektivní zobrazení z E do F_1. To dostaneme jako složení zobrazení z E do přímky DE, následně tuto přímku překlopíme podle AD. To je projektivní a držák se nezměnil (přímky skrz D). Výslednou přímku promítnutím na AB zobrazíme na F_1. Takže máme projektivní zobrazení z E do F_1 a z G do E. Jejich složením dostáváme projektivní zobrazení z G do F_1.

Pomocí lemmatu *tři body stačí* porovnáme projektivní zobrazení z G do F a z G do F_1.

(i) Pro G ležící na BC platí, že $F = F_1 = B$.
(ii) Pro $G = A$ platí $F = F_1 = A$.

(iii) Když G je obraz A podle BC, dostáváme celý obrázek symetrický podle BC, speciálně i E, F jsou symetrická podle BC. Takže E je překlopené F podle BC. Protože je AD kolmé na BC, splňují podmínku o úhlech. Platí tedy, že $F_1 = F$.



Protože se tato dvě zobrazení rovnají pro tři volby G, tak se rovnají všude. Pro všechna G pak platí, že $F_1 = F$, takže i původní úloha.

Poznámka 9. Jako třetí bod jsme mohli uvážit taky třeba ortocentrum a pak úhlit jako v prvním díle.

U výběru tří vhodných bodů je třeba si dávat pozor a nevybrat nějaký bod dvakrát. Časté volby tří bodů jsou pozice, kdy se nějaké body rovnají jiným v zadání, leží na přímkách nebo jsou body v nekonečnu.

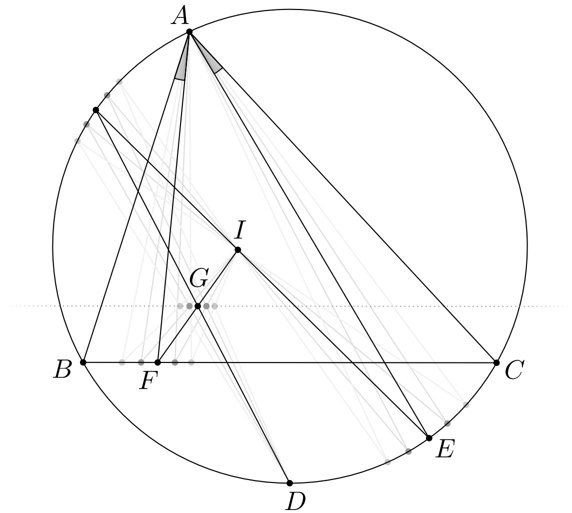
Příklad 10. (IMO 2010/2) Mějme trojúhelník ABC. Označíme I jeho vepsiště a ω jeho kružnici opsanou. Přímka AI protne ω podruhé v bodě D. Mějme body E ležící na oblouku BDC a F ležící na BC takové, že

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|.$$

Dále označme G střed IF. Dokaž, že průsečík přímek EI a DG leží na ω.

Řešení. Označme K_1 průsečík EI a ω a K_2 průsečík DG a ω. Stačí ukázat, že $K_1 = K_2$.

Představme si, že bod E se hýbe po celé kružnici opsané. Bod E teď bydlí na držáku ω. Zobrazení, které bodu E přiřadí přímku AE, je projektivní. Překlopená AE podle osy úhlu u A prochází bodem F. Překlopení je také projektivní, takže



$E \mapsto AE \mapsto AF$ je projektivní. Zároveň BC je pevná přímka, takže $AF \mapsto F$ je projektivní. F bydlí na držáku BC. Stejnolehlost se středem v I a koeficientem $\frac{1}{2}$ zobrazí $F \mapsto G$. Bod G bydlí na držáku p, kde p je přímka rovnoběžná s BC, která vznikne aplikováním stejnolehlosti na BC. Zobrazení $G \mapsto DG$ je projektivní z promítání. A nakonec zobrazení z $DG \mapsto K_2$ je projektivní. Označme g zobrazení $E \mapsto K_2$. Pak g je složením zobrazení

$$E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F \mapsto G \mapsto DG \mapsto K_2,$$

takže je projektivní.

Zároveň ale i zobrazení f definované jako $E \mapsto K_1$ je projektivní, protože je to prostřelení skrz pevný bod I.

Právě jsme pomocí zobrazení G nasimulovali konstrukci bodu K_2 v závislosti na bodu E ($g(E) = K_2$) a pomocí f nasimulovali konstrukci bodu K_1 ($f(E) = K_1$). K tomu, abychom ukázali, že $K_1 = K_2$, stačí ukázat, že tyto funkce jsou shodné. K tomu ale máme tvrzení *tři body stačí*. Stačí nám tedy ověřit tvrzení pro tři body na ω.

(i) Pokud $E = C$, pak $AE = AC$, $AF = AB$, $F = B$, G je střed BI. K_2 je průsečík DG a ω. K_1 je průsečík CI s ω, takže střed oblouku AB. Chceme ukázat, že $K_1 = K_2$. Takže stačí ukázat, že DGK_1 leží na přímce. Nyní využijeme trochu znalost o středech oblouků. Víme, že $|K_1I| = |K_1B|$, analogicky $|DI| = |DB|$. Takže D a K_1 leží na ose BI. Na ní ale leží i bod G. Takže jsme ukázali, že $f(C) = g(C)$.

(ii) Pokud $E = B$, tak je důkaz úplně stejný jako pro $E = C$. Takže $f(B) = g(B)$.

(iii) Nakonec nechť $E = D$. Pak $AE = AI = AF$, $F = AI \cap BC$, G je střed FI. Platí $DG = DI$, takže $K_2 = A$. K_2 je také A. Takže $f(D) = g(D)$.

Tohle ale znamená z tvrzení *tři body stačí*, že f a g se shodují na všech bodech vstupu. Takže úloha je celá dokázána.

Poznámka 11. Všimni si, že úloha nás omezovala na E ležící na malém oblouku. Takový malý oblouk ale není náš standardní držák, se kterým umíme pracovat, tak jsme si úlohu lehce zobecnili pro E ležící kdekoli na ω.

Této metodě budeme říkat metoda projektivního hýbání s body[2]. Myšlenka bude taková, že se pokusíme nejdříve úlohu převést na to, že se nějaké dva body rovnají, následně začneme s nějakým bodem hýbat. Konstrukce v úloze v závislosti na tomto bodě zkusíme nasimulovat pomocí projektivních zobrazení. Tím převedeme úlohu na otázku, zda se nějaká projektivní zobrazení rovnají. Tu vyřešíme pro libovolné tři různé body. Dost často si budeme chtít vybírat body, které úlohu nějakým způsobem degenerují.

Poznámka 12. Řešení příkladu 10 by se dalo přepsat také tak, že dodefinujeme T_1 střed oblouku AB a T_2 střed oblouku AC. Pak ukážeme, že dvojpoměr

$$(T_2, T_1, A, K_1) = (B, C, D, E) = (T_2, T_1, A, K_2)$$

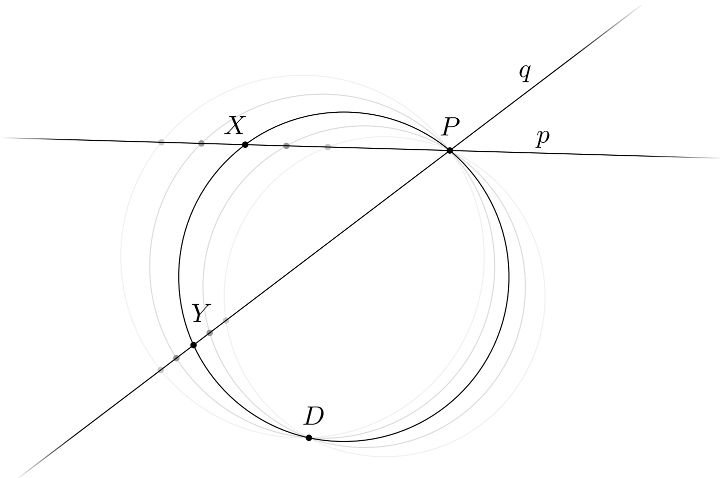
a použitím jednoznačnosti dvojpoměrů obdržíme řešení úlohy. Takže potřebné nástroje jsme měli už v prvním díle, jen tento nový pohled je v mnoha ohledech příjemnější. Protože nejdříve zkontrolujeme, že úloha stačí ověřit ve třech bodech, a až pak ty body hledáme a nemusíme promítat celé čtveřice, ale stačí sledovat obraz jediného bodu.

Poznáváme projektivní zobrazení

Už jsme si ukázali, jak získávat nová projektivní zobrazení skládáním již známých projektivních zobrazení. To je ten nejsilnější nástroj, který budeme potřebovat. Občas určit, že je zobrazení projektivní, nebude tak jednoduché. Ukážeme si příklad projektivního zobrazení a jak to o něm dokázat.

Příklad 13. Máme dvě přímky p, q, které se protínají v P. Dále máme pevný bod D mimo ně. Pak zobrazení g, které bodu $X \in p$ přiřadí $Y \in q$, definované tak, že body X, Y, P, D leží na jedné kružnici, je projektivní.

[2]Pouhé *hýbání s body* už využívá František Konopecký a označuje odlišnou metodu, která nevyužívá projektivních nástrojů. Viz *https://prase.cz/library/HybaniFK/HybaniFK.pdf*.



Řešení. Chceme toto zobrazení rozebrat na více zobrazení, o kterých víme, že projektivní jsou. Využijeme proto inverzi φ se středem v P. Pak X', Y', D' označíme obrazy bodů X, Y, D. A protože X, Y, P, D leží na kružnici, X', Y', D' leží na přímce. Takže zobrazení f, které dostane X' a vrátí Y', je promítnutí skrz pevný bod D', tudíž je projektivní. Z bodu Y' do Y se dostaneme znovu zpětnou inverzí. Takže hledané zobrazení je složením těchto projektivních $g = \varphi \circ f \circ \varphi$.

Tento způsob řešení by se dal shrnout tak, že inverze zobrazuje projektivní zobrazení na projektivní zobrazení. Důležité je si z toho odnést, že když chceš dokázat, že něco je projektivní, inverze je tvůj velký kamarád. Obdobným způsobem Ti může pomoct i kolineace či občas dokonce polárová dualita. Inverze je však častější. Můžeš si to zkusit na následujících cvičeních.

Cvičení 14. Mějme přímku p a pevné body A, B mimo ni. Definujeme zobrazení, které bodu $X \in p$ přiřadí $Y \in p$ takové, že A, B, X, Y leží na kružímce. Dokaž, že je projektivní.

Cvičení 15. Mějme přímku p, která se dotýká kružnice ω v bodě A. Zobrazení g zobrazí $X \neq A \in p$ na $Y \in \omega$ tak, že XY je tečna k ω a $Y \neq A$. Dokaž, že g je projektivní. Jak by se mělo chovat pro $X = A$?

Poznámka 16. Projektivní zobrazení z předchozího cvičení může být často užitečné. Umožňuje Ti totiž projektivně rozhýbat trojúhelník s pevnou kružnicí vepsanou.

Cvičení 17. Mějme kružnici ω a přímku p. Pak zobrazení f definujeme tak, že bodu $X \in \omega$ ($X \notin p$) přiřadí $Y \neq X \in \omega$ tak, že existuje bod G na p takový, že XG i YG jsou tečné k ω. Dokaž, že f je projektivní. Jak by se mělo chovat, když X je průsečík p a ω?

Cvičení 18. Mějme přímku p a kružnici ω tak, že A je jeden jejich průsečík. Definujeme zobrazení f z $X \neq A \in p$ do $Y \in \omega$ tak, že $|\sphericalangle AYX| = 90°$. Dokaž, že je projektivní. Kam by se mělo zobrazit A?

Možná Tě překvapilo, že se Tě ve cvičeních ptáme, jak se zobrazení chová v bodech, kde jsme ho nedefinovali. Je to velmi užitečná věc, jakou si u projektivních zobrazení uvědomit, protože tyto degenerované případy jsou často právě ty, které chceme ověřovat pro lemma *tři body stačí.*

Pojďme si ještě ukázat, jak intuitivně poznat, že zobrazení projektivní není. Nejlepší je všimnout si, zda je zadané zobrazení bijektivní. Nejlépe tak, že si zkusíš pro zadané zobrazení najít inverzní, pokud neexistuje jednoznačné inverzní, toto zobrazení projektivní není[3]. Další, čeho se dá všímat, je, jak moc „jednoznačně“ lze zkonstruovat. Ukážeme si na příkladě.

Příklad 19. Mějme kružnice ω a δ tak, že δ leží uvnitř ω a neprotínají se. Pak zobrazení f z $X \in \omega$ do $Y \in \delta$ definujeme tak, že XY je „pravotočivá“ tečna k δ. Pak f je bijektivní, ale intuice by Ti měla říct, že tato definice není dobře zkonstruovatelná, takže f projektivní není. To, co by Tě mělo bít do očí, je, že máme „pravotočivou“ a „levotočivou“ tečnu, ale dost uměle si vybíráme jednu z nich. Samozřejmě, že toto není dobře definovatelné pravidlo, můžou existovat i divná projektivní zobrazení, ale často je to dobrý náhled na to, co projektivní není.

Poznámka 20. Všimni si, že když už máme projektivní zobrazení zobrazující bod A do B, tak protože existuje vždy inverzní zobrazení, tak máme i projektivní zobrazení z B do A, takže občas budeme říkat, že jsou A, B projektivně svázané, čímž myslíme, že existují tato projektivní zobrazení.

V úlohách je důležitým krokem při použití této metody vybrat správný bod kterým hýbat. Většinou se chceš snažit hýbat jemně, aby se co nejméně částí úlohy hýbalo. Pak je větší šance, že vzniklá zobrazení budou projektivní. Tři jednoduché případy už pak často existují.

Úloha 21. (existence kamaráda) Říkáme, že body P, Q jsou *kamarádi* v ABC, pokud $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QAC|$, $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle QBC|$ a $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle QCA|$. Dokaž, že každý bod P, který neleží na stranách trojúhelníka ABC, má kamaráda.

V prvním díle jsme Ti ukázali kouzelný důkaz Pascalovy věty pomocí promítání dvojpoměrů. Teď už ale máš nástroje na to si ji dokázat sám (sama).

Úloha 22. (Pascalova věta) Mějme tětivový šestiúhelník $ABCDEF$. Označme $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap FA$. Dokaž, že X, Y, Z leží na jedné přímce.

Úloha 23. Mějme trojúhelník ABC s vepsištěm I. Kružnice vepsaná se dotýká strany BC v D. Body P, Q leží postupně na BI, CI tak, že $|\sphericalangle PAQ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$. Dokaž, že $|\sphericalangle QDP| = 90°$.

[3]Dala by se definovat projektivní zobrazení, která nejsou prostá, ale standardně taková nepotkáš.

Úloha 24. (Unlikely Concurrence) Mějme trojúhelník ABC. Označme body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC postupně X, Y. Dokaž, že XY, střední příčka vzhledem k vrcholu C a osa úhlu u vrcholu A prochází jedním bodem. Následně označ tento bod R a dokaž, že $|\sphericalangle CRA| = 90°$.

Úloha 25. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC a v něm bod P. Označme A_1 překlopené P podle BC. Analogicky B_1 překlopené P podle AC a C_1 překlopené P podle AB. Dokaž, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 prochází jedním bodem.

Úloha 26. (Jacobi) Mějme trojúhelník ABC. Sestrojme body X, Y, Z tak, že $|\sphericalangle YAC| = |\sphericalangle ZAB|$, $|\sphericalangle ZBA| = |\sphericalangle XBC|$ a $|\sphericalangle YCA| = |\sphericalangle XCB|$. Dokaž, že AX, BY, CZ prochází jedním bodem.

Úloha 27. Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y. Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z. Ukaž, že X, Y a Z leží na jedné přímce. (PraSe 38 Myš-Maš/6)

Úloha 28. Mějme trojúhelník ABC. Označme M, N středy stran AB, AC. Na tečně ke kružnici opsané ABC v bodě A zvolme bod X. Označme ω_B kružnici procházející MB dotýkající se přímky MX. Analogicky ω_C je kružnice skrz body NC dotýkající se NX. Dokaž, že ω_B a ω_C se protínají na BC.

Úloha 29. Mějme P, Q kamarády[4] v ABC. Označme X patu Q na BC. Kružnice nad průměrem AP protíná opsanou ABC v K různém od A. Přímka AQ protíná opsanou ABC v T různém od A. Dokaž, že T, X, K leží na přímce.

Úloha 30. Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k. Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k, body dotyku pojmenovala A a B. Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ. Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L. Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protnula k podruhé v bodě T. Ukaž, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\sphericalangle PBT| = |\sphericalangle QLA|$. (PraSe 38 Tečny/7)

Úloha 31. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P, Q takové, že platí $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle QBC|$, $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle QCA|$ a $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle QAB|$. Nechť jsou O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníků PBC a QBC. Dokaž, že platí $|\sphericalangle BAO_1| = |\sphericalangle CAO_2|$. (*i*KS 9. ročník G5)

Úloha 32. Mějme čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle BAD| + 2|\sphericalangle BCD| = 180°$. Označme E průsečík osy $\sphericalangle BAD$ s BD. Osa AE protíná BC a CD v X a Y. Dokaž, že A, C, X, Y leží na jedné kružnici.

Úloha 33. Mějme trojúhelník ABC. Na straně BC zvolme bod D. Na ose úhlu BAC zvolme bod I. Přímky BI, AI protínají kružnici opsanou ABD postupně v bodech P, Q. Analogicky přímky CI a AI protnou kružnici opsanou ACD v bodech R, S. Dokaž, že přímky RS, PQ, BC prochází jedním bodem.

Úloha 34. Mějme bod P na straně AB v trojúhelníku ABC. Na stranách AC a BC zvolíme S a T tak, aby $|AP| = |AS|$ a $|BP| = |BT|$. Kružnice opsaná PST

[4] Viz úloha existence kamaráda.

protne AB a BC znovu v Q a R. Přímky PS a QR se protnou v L. Ukaž, že přímka CL půlí PQ.

Úloha 35. Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme H ortocentrum ABC. Dále na AB a BC zvolme P, Q tak, aby $PH \parallel AD$ a $QH \parallel CD$. Dokaž, že kolmice na PQ skrz bod H prochází ortocentrem ACD.

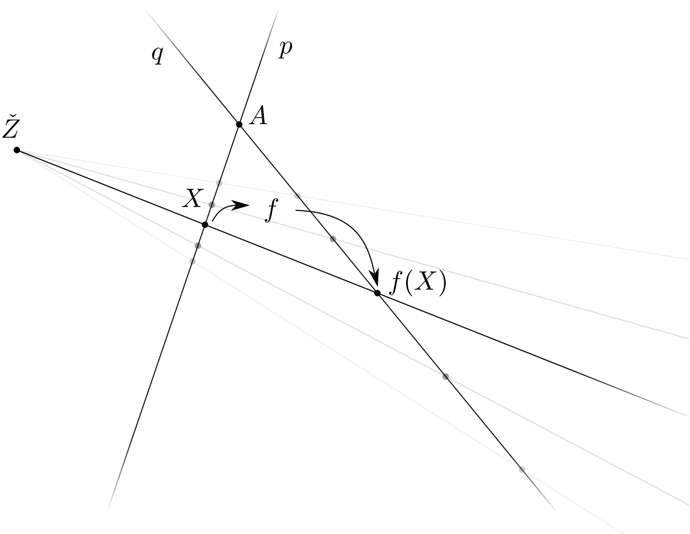
Úloha 36. V trojúhelníku ABC označme A' a B' paty výšek z A a B. Na kružnici opsané ABC na oblouku ACB je bod D. Dále $P = AA' \cap BD$ a $Q = BB' \cap AD$. Dokaž, že střed PQ leží na $A'B'$.

Úloha 37. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná se středem I dotýká stran AC a AB v bodech E, F. Obrazy bodů E, F ve středové symetrii přes I označme G, H. Buď Q průsečík GH a BC a M střed BC. Dokaž, že jsou přímky IQ a IM na sebe kolmé. (Taiwan TST 2014)

Záhadný bod

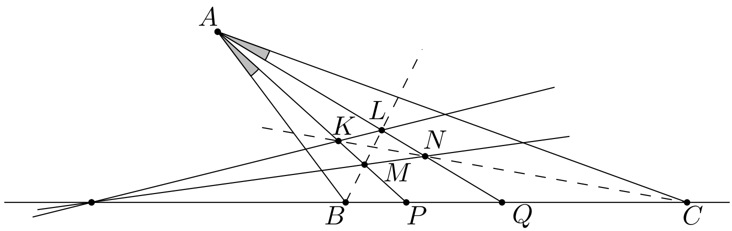
Pojďme se nyní podívat na trochu jiný styl úloh. Budou to úlohy, kde je třeba dokázat, že nějaká množina přímek prochází pevným bodem. Standardní postupy nám říkají, že jako první chceme zjistit, co je ten společný průsečík zač, a pak jen o každé přímce dokázat, že tímto bodem prochází. Ukážeme si způsob, jak lze občas přeskočit tento krok určující vlastnosti hledaného bodu. Dokážeme, že množina přímek prochází pevným bodem, i když vůbec nezjistíme, o jaký bod se jedná. K tomu nám poslouží následující lemma.

Lemma 38. (o záhadném bodu) *Mějme dvě přímky p, q. Označme A jejich průsečík. Nechť je $f : p \to q$ projektivní zobrazení. Pak pokud $f(A) = A$, pak všechny přímky $Xf(X)$ procházejí pevným bodem.*



Důkaz. Uvažme různé body $B \neq A \in p$, $C \neq A \in p$. Označme $\check{Z}$ průsečík $Bf(B)$ a $Cf(C)$. Definujme zobrazení g jako promítnutí z p do q skrz bod $\check{Z}$. Zobrazení f i g jsou projektivní. Zároveň $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$ a $f(A) = A = g(A)$. Takže z lemmatu *tři body stačí* je f shodné s g. Takže všechny přímky $Xf(X)$ prochází skrz $\check{Z}$. □

Příklad 39. Na straně BC v trojúhelníku ABC mějme body P, Q tak, že platí $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle QAC|$. Osa úhlu ABC protíná AP a AQ postupně v bodech M a L. Osa úhlu ACB protíná AP a AQ postupně v K, N. Dokaž, že BC, MN a KL prochází jedním bodem.



Řešení. Podíváme se na osy úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ACB$ jako držáky $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$. Pak dodefinujeme zobrazení φ, které bod $X \in \mathcal{U}$ zobrazí na $Y \in \mathcal{V}$ tak, že $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle YAC|$. Všimni si, že tohle zobrazení je projektivní. Označme I průsečík osy $\sphericalangle ABC$ a osy $\sphericalangle ACB$. Pak $\varphi(I) = I$, protože je to střed kružnice vepsané. Takže podle lemmatu o záhadném bodu všechny přímky $X\varphi(X)$ prochází pevným bodem. Pro dokončení důkazu si stačí všimnout, že $\varphi(M) = N$, $\varphi(L) = K$ a $\varphi(B) = C$. Takže BC, MN a KL prochází jedním bodem.

Úloha 40. Mějme pevný bod D a pevné přímky k, l, které procházejí společným bodem A. Na přímkách k, l jsou postupně body X a Y takové, že $|\sphericalangle XDA| = |\sphericalangle YDA|$. Dokaž, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 41. (těžká) Mějme trojúhelník ABC. Na straně BC leží bod P. Kružnice nad průměrem BP protne podruhé kružnici opsanou APC v Q. Přímka PQ a AC se protínají v M. Označme H ortocentrum trojúhelníka ABP. Dokaž, že když se P hýbe na BC, tak přímky HM prochází pevným bodem.

Dokreslujeme kuželosečky

V této kapitole si ukážeme, jak může být občas praktické si do úlohy dokreslit kuželosečku, kde jako kuželosečku bereme jakkoli zkolineovanou kružnici. Aby se nám kuželosečky hodily, dodefinujeme si na nich dvojpoměr, takže kuželosečky budou zapadat do držáků. Jak dodefinovat dvojpoměr na obecné kuželosečce? Uděláme malý podvod, neřekneme přímo, jak ho jednoduše spočítat, ale ukážeme, že nějak určit lze.

Definice 42. (dvojpoměr na kuželosečkách) Uvažme kuželosečku δ a na ní čtyři body A, B, C, D. Pak existuje kolineace, která zobrazí δ na kružnici. Na této kružnici ale A', B', C', D' umíme přiřadit nějaký dvojpoměr. Takže (A, B, C, D) definujeme na kuželosečce jako dvojpoměr (A', B', C', D'), kde jsme δ zobrazili kolineací.

Je tahle definice jednoznačná? Vzpomeň si, že pokud kolineace zachová kružnici, tak na ni zachová i dvojpoměr. Zároveň složení kolineací je stále kolineace. Takže nemůžou existovat dvě různé kolineace zobrazující δ na kružnici takové, že dvojpoměry (A', B', C', D') by se lišily.

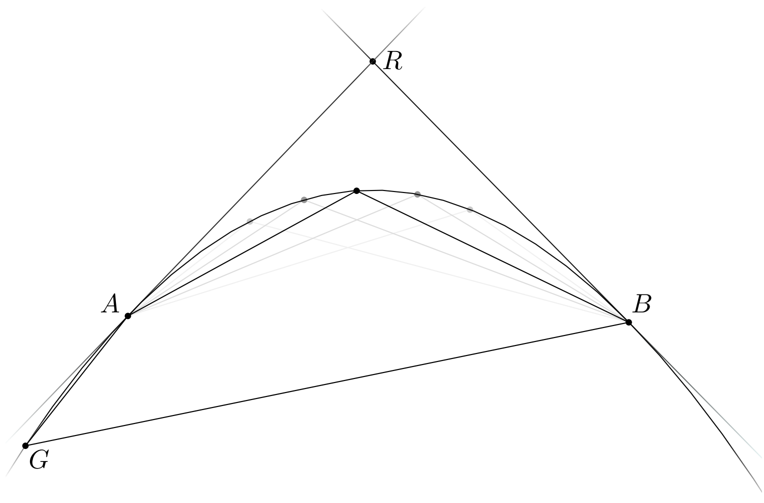
Projektivní zobrazení na kuželosečkách jsou velmi podobná projektivním na kružnici. Hlavně se nám budou hodit tyto dvě:

(i) Mějme kuželosečku δ a bod A, který na ní leží. Pak zobrazení z δ do svazku v A takové, že zobrazí X na AX, je projektivní. Bod A se zobrazí v tomto zobrazení na tečnu k δ.

(ii) (prostřelovací) Mějme kuželosečku δ a bod A, který na ní neleží. Pak zobrazení z δ do δ takové, že bod X zobrazí na Y tak, že Y je druhý průsečík XA a δ. Pokud existuje jen jeden průsečík, X se zobrazí samo na sebe.

Cvičení 43. Zkus si dokázat, že jsou tato zobrazení opravdu projektivní.

Věta 44. (Steinerova kuželosečka) *Mějme různé body A, B v projektivní rovině. Označme $\mathcal{U}$ držák přímek procházejících bodem A a $\mathcal{V}$ držák přímek procházejících bodem B. Dále mějme projektivní zobrazení φ z $\mathcal{U}$ do $\mathcal{V}$. Pak pokud obraz AB není BA, tak množina průsečíků $p \cap \varphi(p)$ je kuželosečka. A platí, že A, B na této kuželosečce leží a φ zobrazí AB na tečnu v B k této kuželosečce.*

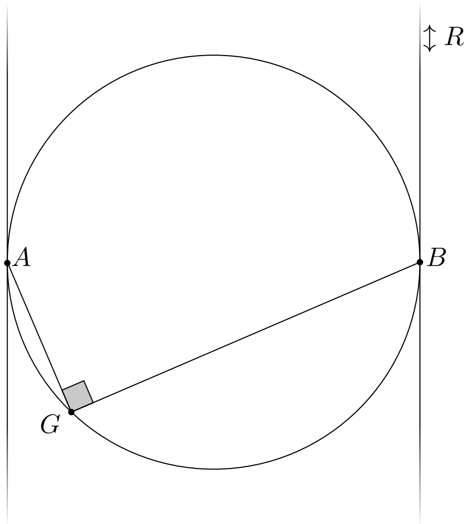


Důkaz. Myšlenka důkazu je taková, že se pokusíme úlohu zkolineovat tak, že zadané zobrazení je nějaké pěkné, u kterého množinu průsečíků známe. Dobrým kandidátem je zobrazení přímky p skrz A na přímku q skrz B tak, že $p \perp q$.[5] Pak množina jejich průsečíků je Thaletova kružnice. Tak to pojďme udělat.

Označme φ^{-1} zobrazení inverzní k φ. Dále označíme $k = \varphi(AB)$ a $\ell = \varphi^{-1}(BA)$. Pak protože AB se nezobrazí na BA, tak k a ℓ jsou různé přímky. Označme R jejich průsečík. Vyberme libovolnou[6] přímku q procházející A. Označme G průsečík $q \cap \varphi(q)$.

Tak nyní máme čtyři body A, B, R, G. Kolineace nám dovoluje tyto čtyři body umístit do libovolných jiných čtyř bodů projektivní roviny (v obecné poloze). Tak si pojďme rozmyslet, kde je chceme mít, aby se φ chovalo jako ta rotace, kterou hledáme.

Když chceme, aby byly vždycky kolmé, tak AB se zobrazí na kolmici na AB skrz B a BA se inverzně zobrazí na kolmici skrz A, takže R chceme zobrazit na nevlastní bod ve směru kolmém na AB. Bod G je obecný bod na naší hledané kuželosečce, takže ten chceme zobrazit na Thaletovu kružnici nad AB.



To je přesně kolineace, kterou použijeme. Zbývá říct, že φ po této kolineaci je opravdu ta hezká rotace, kterou chceme. K tomu využijeme *tři body stačí*. φ je projektivní a rotace o $90°$ taky, takže máme tyto dvě projektivní zobrazení a ty porovnáváme. Obraz AB je v obou BR. Obraz AG je v obou BG a obraz AR je v obou BA. Takže máme tři body, kde se shodují. Množina průsečíků $p \cap \varphi(p)$ je kuželosečka, protože jsme ji kolineací dokázali zobrazit na kružnici. A zmíněné vlastnosti o tom, že A, B na ní leží, a na co se zobrazí AB, z této kolineace plynou taktéž. □

Možná by Tě zajímalo, jaká je množina těchto průsečíků, když $\varphi(AB) = BA$. Pak je tato množina přímka. Můžeš si zkusit rozmyslet, že tohle tvrzení je duální

[5] Toto zobrazení je projektivní, protože se jedná o otočení o $90°$ a následné posunutí z A do B.

[6] Dost obecnou, takže nesmí být rovna těm, o kterých už jsme mluvili.

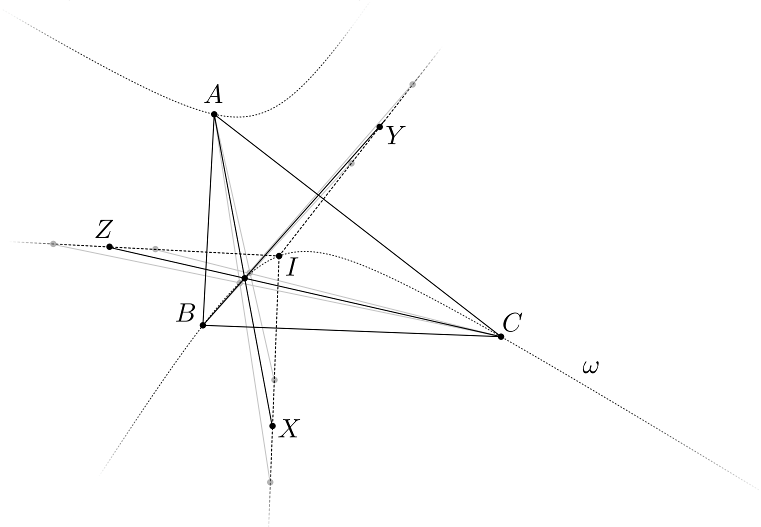
k tvrzení o záhadném bodu. Hodí se k tomu, že dualita zachovává dvojpoměry, takže se chová hezky k projektivním zobrazením.

Máme už dostatek znalostí o kuželosečkách, tak si můžeme ukázat, jak nám můžou pomoci při řešení metodou projektivního hýbání s body.

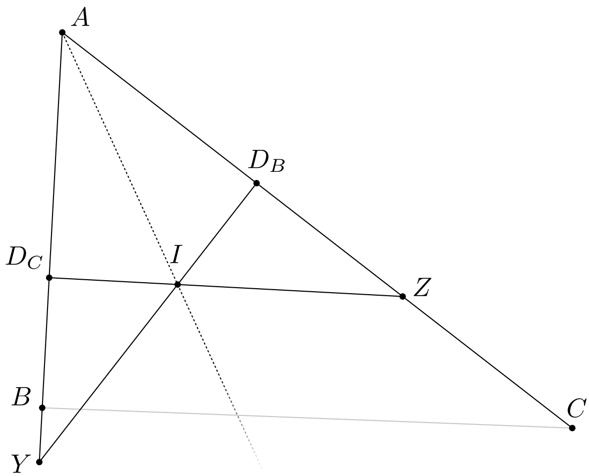
Příklad 45. (Kariya) Mějme trojúhelník ABC a I označme jeho vepsiště. Pak označme D_A, D_B, D_C paty I na strany a, b, respektive c. Body X, Y, Z leží postupně na polopřímkách ID_A, ID_B, ID_C tak, že $|IX| = |IY| = |IZ|$. Dokaž, že přímky AX, BY, CZ prochází jedním bodem.

Řešení. Začneme hýbat z bodem X po přímce ID_A. Pak zobrazení z X do Y je projektivní, kde pro X na polopřímce opačné k ID_A bude Y ležet na polopřímce opačné k ID_B. To, že je projektivní, se dá nahlédnout buď tak, že je to obecné shodné zobrazení, nebo ho přímo najít jako rotaci kolem I.

Obdobně zobrazení z X do Z je projektivní, takže máme projektivně svázané přímky AX, BY, CZ. Jenže teď narážíme na problém. Naše původní metoda předpokládala, že najdeme dvě zobrazení do nějakého bodu na nějakém držáku. Ale hledaný průsečík AX, BY a CZ se obecně nehýbe ani po přímce, ani po kružnici. Přichází na řadu Steinerova kuželosečka. Dokreslíme Steinerovu kuželosečku, kterou generují přímky BY a CZ, a označíme ji ω.



Nejdříve dokážeme, že A na ní leží, zatím to víme jen o B a C. Ale pokud úloha platí, tak ze symetrie na ní musí ležet i A. Nechť Y je průsečík ID_B s AB. Pak ze symetrie podle osy úhlu $\sphericalangle CAB$ je Z průsečík ID_C s AC. Takže přímka BY je shodná s AB a přímka CZ je shodná s přímkou AC, takže $A = CZ \cap BY$ leží na ω.



Dodefinujeme si body H_1 a H_2. Budiž H_1 druhý průsečík BY a ω a H_2 druhý průsečík AX a ω. Víme, že H_1 leží na BY a CZ a H_2 leží na AX. Stačí tedy ukázat, že se tyto dva body rovnají nezávisle na poloze X. Konečně tedy definujeme dvě projektivní zobrazení. První bude ψ a zobrazuje $X \mapsto Y \mapsto BY \mapsto H_1$. A druhé bude φ a zobrazuje $X \mapsto AX \mapsto H_2$.

Můžeme tedy využít lemma *tři body stačí.* Pořad si ale musíme dávat pozor, abychom nedokazovali úlohu kruhem, a musíme pamatovat na to, že ω je definovaná jako průsečíky přímek BY a CZ. Takže třeba nevíme, že BA se zobrazí na tečnu k ω v A. A tohle dokázat není triviální, takže si vybereme radši jiné degenerované případy, které se dokazují lépe.

(i) Když X leží na AC, tak $H_1 = H_2 = C$. Plyne ze symetrie podle úhlu $\sphericalangle BCA$.
(ii) Když X leží na AB, tak $H_1 = H_2 = B$. To je trochu složitější. Ze symetrie znovu víme, že CZ protíná ω podruhé v B. Obraz CZ v projektivním zobrazení do BY tedy musí být tečna k ω v B. Takže $H_1 = B$.
(iii) Když $X = I$, Pak $H_1 = H_2 = I$.

Tím jsme dokázali, že se H_1 vždy rovná H_2.

Poznámka 46. Všimni si, že se nemohlo stát, že by Steinerova kuželosečka byla degenerovaná do přímky. Pak by totiž B, C na ní neleželo. Zato A by na ní stále ze stejného argumentu leželo. To by ale porušilo symetrii celé úlohy. Takže se opravdu jedná o kuželosečku, a ne o přímku.

Poznámka 47. Všimni si, že dva ze tří případů nám Steinerova kuželosečka dala vlastně zadarmo, protože víme, že existuje případ, kdy se H_1 bude rovnat B, resp. C. Tyto dva případy bývají často degenerované, takže jsou přímo určené k lemmatu *tři body stačí.* Proto si často stačí uvědomit, kdy tyto případy nastanou, a najít jeden případ navíc. Pozor na případ, kdy se H_1 rovná A. Ten sice také vždycky existuje, ale neumíme říct, že H_2 je v tu chvíli také A. K tomu bychom právě potřebovali, že AX je tečná k ω.

Tato metoda je velmi užitečná, protože nám pomáhá se vypořádat s body, co se po hezkých držácích nehýbou přímo. Ale není jednoduché ji umět správně použít, protože je potřeba dávat velký pozor na to, co máme jak definované a nezapočítat nějaký degenerovaný případ dvakrát.

Úloha 48. (IMO 2019/2) Na stranách BC a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body A_1 a B_1. Body P a Q jsou zvoleny postupně uvnitř úseček AA_1 a BB_1 tak, že přímka PQ je rovnoběžná se stranou AB. Dále P_1 je bod na přímce PB_1, pro nějž platí, že B_1 leží uvnitř úsečky PP_1 a zároveň $|\sphericalangle PP_1C| = |\sphericalangle BAC|$. Podobně bod Q_1 leží na přímce QA_1 tak, že A_1 leží uvnitř úsečky QQ_1 a zároveň platí $|\sphericalangle CQ_1Q| = |\sphericalangle CBA|$. Dokaž, že body P, Q, P_1, Q_1 leží na jedné kružnici.

Involuce

Nyní se podíváme na speciální projektivní zobrazení, kterým se říká *involutorní* či přímo *involuce*.

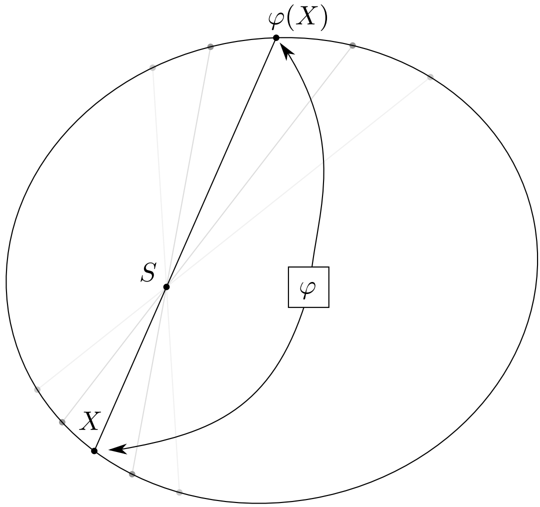
Definice 49. *Involucí* nazýváme projektivní zobrazení φ z držáku $\mathcal{U}$ do $\mathcal{U}$, které je samo sobě inverzní neboli platí $\varphi(\varphi(X)) = X$.

Poznámka 50. Obecně se v matematice involuce říká jakémukoli zobrazení, které je samo sobě inverzní. Jen v tomto seriálu kdykoli řekneme involuce, myslíme projektivní zobrazení. Také identita je příklad involuce, dokonce i projektivní. Té budeme říkat *triviální involuce*.

Rozmysli si, že pár involucí už známe – třeba prostřelovací projektivní zobrazení nebo jakákoli inverze. Pojďme si ukázat, jak se involuce chová na kuželosečce. Obecně se na involutorní zobrazení chceš často dívat jako na rozdělení objektů[7] do dvojiček, kde bod může být ve dvojičce sám se sebou (takovou dvojičku pak nazveme triviální). Také si všimni, že dvě involuce jsou stejné, pokud se shodují na dvou dvojičkách, kde alespoň jedna je netriviální. Pak totiž máme tři body, na kterých se shodují.

Lemma 51. *Nechť ω je kuželosečka[8] a φ je netriviální involuce na této kuželosečce. Pak všechny přímky $X\varphi(X)$ prochází pevným bodem. Tomuto bodu budeme říkat střed involuce.*

[7]Dvojičky mohou být například body či přímky, záleží, na jakém držáku jsme.
[8]Většinou se bude hodit jako kuželosečka přímo kružnice.



Důkaz. Uvažme bod $Y \in \omega$, který se nezobrazí sám na sebe, a $Y' = \varphi(Y)$. Dále mějme bod $Z \in \omega$ různý od Y a Y'. Pak p označíme přímku YY' a q přímku $Z\varphi(Z)$, kde pokud $\varphi(Z) = Z$, bereme tečnu k ω v Z. Označíme $S = p \cap q$. Nyní definujeme involutorní zobrazení ψ na ω jako prostřelení skrz S. Pak ψ a φ se shodují na obrazech různých bodů Z, Y, Y', takže jsou z lemmatu *tři body stačí* stejná. Takže všechny přímky $X\varphi(X)$ prochází bodem S. □

Všimni si, že tohle znamená, že každá involuce na kružnici je inverze, protože prostřelovací zobrazení je inverze. Tak to vypadá, že na kružnici jsme už všechna involutorní zobrazení znali, ukážeme si, že stejně tak je tomu i na přímce.

Tvrzení 52. *Každá netriviální involuce na přímce je nějaká inverze.*

Důkaz. Uvažme přímku p a na ní netriviální involuci φ. Označme A_1, A_2 ($A_1 \neq A_2$) prvky jedné dvojičky této involuce a B_1, B_2 ($B_1 \neq B_2$) prvky druhé. Pak dokresleme kružnice nad průměry A_1A_2 a B_1B_2. Pak chordála těchto kružnice protíná p v X. Takže existuje inverze se středem X, která prohazuje právě tyto dvojičky. Takže *tři body stačí* a tato inverze je stejná jako původní involuce. □

Tvrzení 53. *Mějme projektivní zobrazení φ, pro které platí, že prohazuje jednu dvojičku, neboli pro různá A, B platí $\varphi(A) = B$ a $\varphi(B) = A$. Pak φ je involuce.*

Důkaz. Nalezněme obraz nějakého třetího prvku C. Označíme $D = \varphi(C)$. Pak se podíváme na dvojpoměr (A, B, C, D). Po aplikování projektivního zobrazení φ dostáváme rovnost

$$(A, B, C, D) = \Big(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)\Big) = \Big(B, A, D, \varphi(D)\Big) = \Big(A, B, \varphi(D), D\Big).$$

Takže z jednoznačnosti dvojpoměrů $\varphi(D) = C$, Takže toto zobrazení je involucí. □

Tvrzení 54. *Netriviální involuce má nanejvýš dva pevné body.*

Důkaz. Označme φ involuci s alespoň třemi pevnými body A, B, C. Pak pro libovolný prvek X různý od A, B, C platí

$$(A, B, C, X) = \Big(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(X)\Big) = \Big(A, B, C, \varphi(X)\Big)$$

Takže z jednoznačnosti dvojpoměrů $X = \varphi(X)$ pro všechna X. Ale z toho plyne, že φ je triviální involuce. □

Tvrzení 55. *Pokud se dvě netriviální involuce shodují na dvou pevných bodech, jsou stejné.*

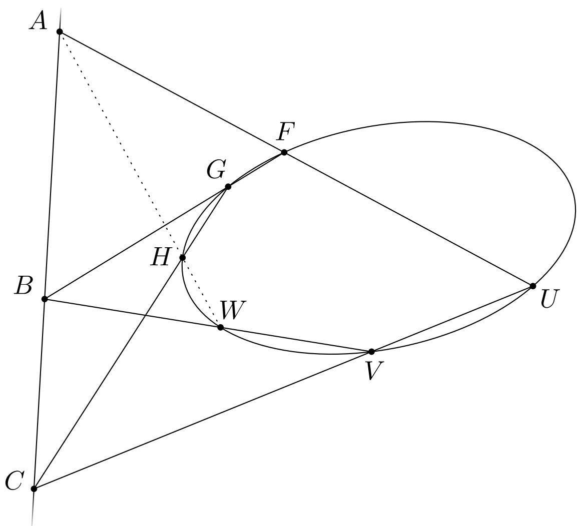
Důkaz. Označme φ a ψ involuce s pevnými body A, B. Označme C obecný prvek různý od A, B a $D = \varphi(C)$. Pak aplikováním φ na dvojpoměr (A, B, C, D) dostáváme

$$(A, B, C, D) = \Big(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)\Big) = (A, B, D, C) = \frac{1}{(A, B, C, D)}.$$

Protože jsou body A, B, C, D různé, znamená to, že $(A, B, C, D) = -1$. Označíme $E = \psi(C)$. Pak analogicky dostaneme, že $(A, B, C, E) = -1$ neboli z jednoznačnosti dvojpoměrů $D = E$. Takže zadané involuce se shodují ve všech bodech. □

Poznámka 56. Pokud bychom předchozí lemmata dokazovali jen pro body na přímce, můžeme nahlédnout, že plynou z toho, že všechny involuce jsou inverze.

Lemma 57. (ping pong) *Mějme kuželosečku ω. Dále mějme tři body A, B, C ležící na přímce p. Pak označme φ_A involuci na ω se středem A. Analogicky φ_B a φ_C. Pak složení $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C$ je znovu involuce a má střed na přímce p.*



Důkaz. Uvědom si, že z toho, že máme involuce, tak inverzní zobrazení k φ_A je φ_A a analogicky pro φ_B a φ_C. Dokážeme nejdříve, že se jedná o involuci. Stačí ukázat, že pro každé X na ω platí

$$\xi(X) = \varphi_A(\varphi_B(\varphi_C(X))) = \varphi_C(\varphi_B(\varphi_A(X))) = \xi^{-1}(X).$$

Označme U nějaký bod na ω. Dále označme $V = \varphi_C(U)$, $W = \varphi_B(U)$. Pak $\varphi_A(W) = \xi(U)$. Analogicky definujeme $F = \varphi_A(U)$, $G = \varphi_B(F)$ a $H = \varphi_C(G)$. Pak $H = \xi^{-1}(U)$. Takže stačí ukázat, že $H = \varphi_A(W)$. Neboli že HW prochází A. To ale plyne z Pascalovy věty na $UVWHGF$. Takže se opravdu jedná o involuci.

K druhé části důkazu uděláme trochu triky. Kolineační BÚNO se jedná o kružnici. Víme, že involuce na kružnici se středem v K se dá interpretovat jako inverze se středem v K. Podíváme se tedy na zobrazení φ_A, φ_B, φ_C v celé komplexní rovině. Jedná se o inverze se středy A, B a C. Každá z těchto inverzí je zobrazení, které je symetrické podle přímky p. Takže i výsledné zobrazení bude symetrické podle p. Takže se jedná o inverzi, která je symetrická podle p. To ale znamená, že má střed na p. □

Úloha 58. Mějme trojúhelník ABC. Označme H jeho ortocentrum a O střed kružnice opsané ω. Označme A_1 bod naproti A na ω. Bod A' budiž druhý průsečík A_1H a ω. Bod A'' označme překlopené H podle strany BC. Symetricky definujeme body B', B'', C', C''. Dokaž, že přímky $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se protínají v jednom bodě na Eulerově přímce[9] trojúhelníku ABC.

Lemmata, co tu jsou, si zkus také dokázat. Budou se Ti ještě hodit.

Lemma 59. *Mějme kružnici ω a na ní involuci φ. Mimo ni bod P. Dokaž, že kružímky opsané $PX\varphi(X)$ prochází pevným bodem různým od P.*

Lemma 60. *Mějme přímku ℓ a mimo ni bod P. Dále uvažme involuci φ na ℓ. Dokaž, že nezávisle na volbě $X \in \ell$ všechny kružímky opsané $PX\varphi(X)$ prochází pevným bodem různým od P.*

Úloha 61. Mějme trojúhelník ABC. Na ose úhlu u A zvolme bod G. Dále zvolme body K, L na BC tak, že $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle LAC|$. Dokaž, že nezávisle na bodech K, L kružnice opsané GKL prochází pevným bodem různým od G.

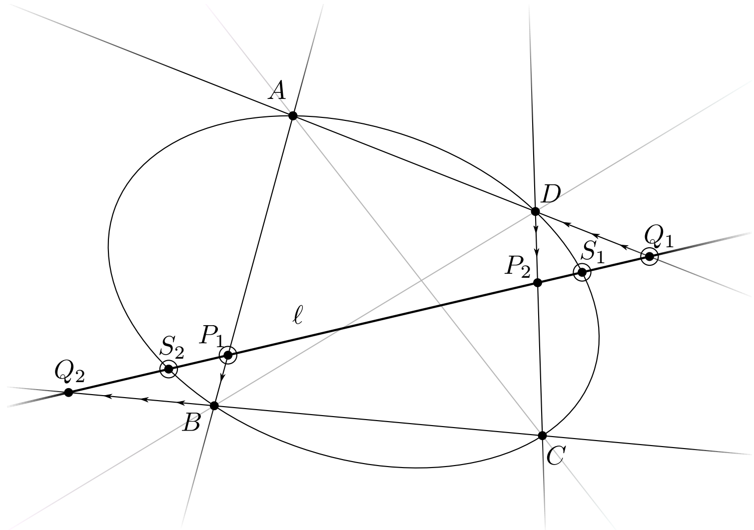
Lemma 62. *Mějme přímku ℓ a na ní involuci φ. Dokaž, že nezávisle na $X \in \ell$ všechny kružnice nad průměrem $X\varphi(X)$ sdílí chordálu.*

Desarguesova involuce

V této kapitolce si ukážeme nástroj, který nám pomůže nalézt involuce v úloze.

[9] Pokud nevíš, co je to Eulerova přímka, doporučujeme Ti první díl seriálu o *Geometrii trojúhelníka*. Viz *https://prase.cz/archive/36/uvod1s.pdf*.

Věta 63. (Desarguesova involuce – DIT[10]) *Mějme čtyři body A, B, C, D. Označme $p_1 = AB$, $p_2 = CD$, $q_1 = AD$, $q_2 = BC$, $r_1 = AC$, $r_2 = BD$. Dále mějme v rovině přímku ℓ neprocházející body A, B, C, D. Označíme $P_1 = \ell \cap p_1$. Analogicky definujeme P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2. Libovolná kuželosečka procházející body A, B, C, D protíná ℓ v S_1, S_2. Pak na přímce ℓ existuje involuce, která prohazuje dvojičky (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2), (S_1, S_2).*



Důkaz. Uvažme na ℓ involuci (inverzi) ξ, která zobrazí S_1, S_2, P_1 postupně na S_2, S_1, P_2. Ta existuje, protože inverze, stejně jako Möbiovské zobrazení, je dáno třemi obrazy. Protože jde o inverzi, zobrazí P_2 na P_1. Ukážeme, že $\xi(Q_1) = Q_2$. Všimni si, že

$$(P_1, Q_1, S_1, S_2) \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} (B, D, S_1, S_2) \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} (Q_2, P_2, S_1, S_2) = (P_2, Q_2, S_2, S_1).$$

Už víme, že ξ zobrazí P_1, S_1, S_2 na P_2, S_2, S_1. Protože je projektivní, zachovává dvojpoměr, takže z jednoznačnosti dvojpoměrů se $\xi(Q_1) = Q_2$. Analogicky ukážeme, že $\xi(R_1) = R_2$. Takže ξ je hledanou involucí. □

Než si ukážeme, jak toto tvrzení použít v úloze, hodí se si rozmyslet, jak vypadají degenerované varianty.

Věta 64. (Desarguesova involuce pro 3 body) *Mějme trojúhelník ABC na kuželosečce ω. Dále mějme přímku ℓ. Ta protíná AB, AC, BC postupně v P_1, P_2, Q_1. Dále protíná tečnu k ω v A v bodě Q_2. Také protíná ω v bodech S_1, S_2. Pak existuje involuce prohazující dvojičky (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (S_1, S_2).*

Věta 65. (Desarguesova involuce pro 2 body) *Mějme body A, B na kuželosečce ω. Přímka ℓ protíná tečny vedené A, B k ω postupně v bodech Q_1, Q_2. Dále ℓ*

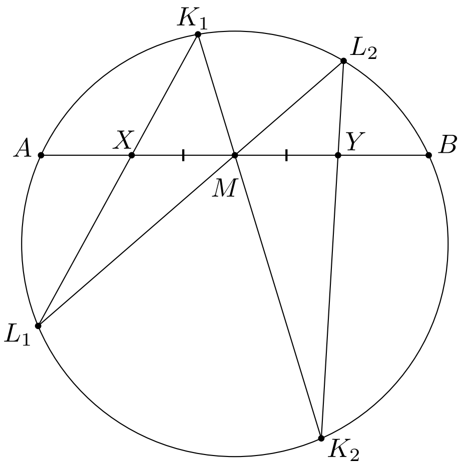
[10] Pochází z anglického Desargues Involution Theorem.

protíná AB v X a ω v S_1, S_2. Pak existuje involuce prohazující tyto dvojičky (X, X), (Q_1, Q_2), (S_1, S_2).

Tato tvrzení nedoporučujeme vnímat jako tři odlišné věty. Hodí se naučit se „vidět" v těchto tvrzeních původní Desarguesovu větu. Rozmysli si čím nesmí procházet přímka ℓ v těchto degenerovaných případech, když v DIT nesmí procházet body A, B, C, D.

Ukážeme si nyní použití DIT na již známé úloze.

Příklad 66. (butterfly) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB se středem M. Na ω zvolme body K_1, L_1. Označme K_2 průsečík K_1M s ω různý od K_1. Obdobně definujme bod L_2. Nechť $X = K_1L_1 \cap AB$ a $Y = K_2L_2 \cap AB$. Pak $|XM| = |YM|$.



Řešení. Uvažme čtyřúhelník $K_1L_1L_2K_2$ s kružnicí opsanou a přímku AB. Aplikujme na ně Desarguesovu involuci. Dostáváme involuci φ prohazující dvojičky (A, B), (M, M), (X, Y). Definujeme si involuci, která je na přímce AB a jedná se o překlopení podle M. Pak (A, B) a (M, M) jsou v této involuci, takže φ se s touto involucí shoduje na třech bodech, takže φ je překlopení podle M. Takže $|XM| = |YM|$.

Poznámka 67. Všimni si, že jsme dokázali i silnější tvrzení, víme, že kdykoli vezmeme libovolnou kuželosečku procházející body $K_1L_1L_1K_2$, tak protne AB v bodech symetrických podle M.

Úloha 68. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Označme p tečnu k ω v A. Přímka ℓ protíná AB, AC, BC, p v bodech K, L, M, N. Dokaž, že kružnice opsané AKL a AMN se protínají na ω.

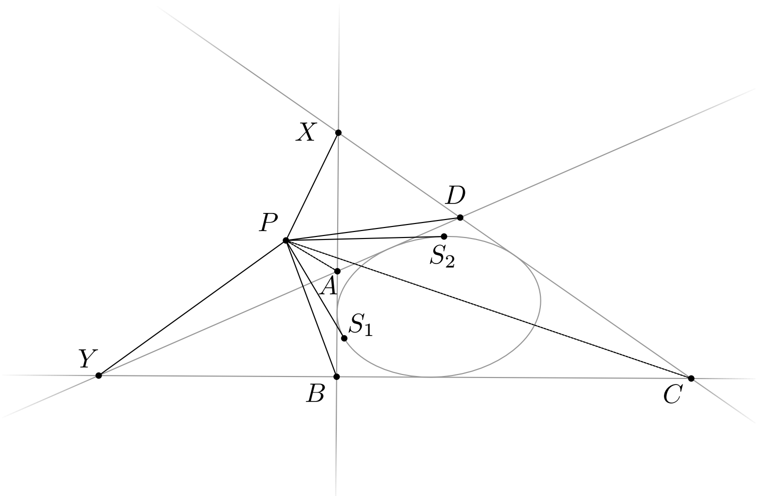
Úloha 69. Mějme trojúhelník ABC. Kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c v bodech A_1, B_1, C_1. Označme M průsečík A-těžnice a přímky B_1C_1. Dokaž, že MA_1 je kolmá na BC.

Úloha 70. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Ω. Kružnice ω se dotýká Ω v T a AB v K. Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ protíná ω v bodech P, Q. Dokaž, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle QAC|$.

Duální Desarguesova involuce

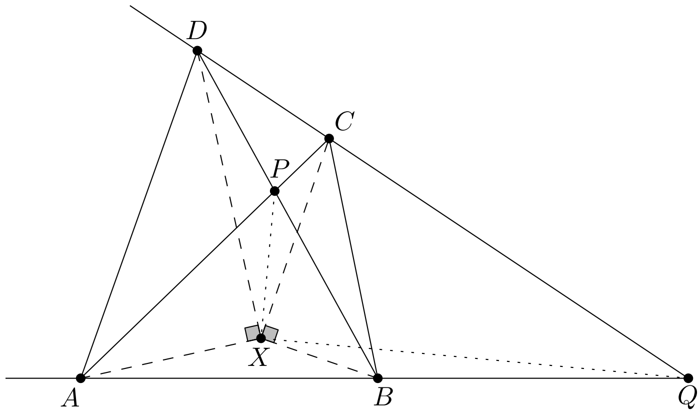
Většinou se nám v úlohách bude hodit duální varianta Desarquesovy involuce. Duální budeme myslet podle kružnice opsané $ABCD$. Ale občas $ABCD$ není tětivový. V minulém díle jsme si ukázali, že pokud kolineace zachová kružnici, zachová dualitu podle dané kružnice. Podobně jako jsme dodefinovali na kuželosečkách dvojpoměr, tak teď můžeme dodefinovat dualitu podle kuželosečky tak, že je to dualita podle kružnice po nějaké kolineaci.

Věta 71. (duální Desarguesova Involuce – DDIT) *Mějme čtyrúhelník $ABCD$. Dále kuželosečku, která se dotýká přímek AB, BC, CD, DA. Dále mějme v rovině bod P neležící na těchto přímkách. Označme PS_1 a PS_2 tečny z P na ω. Dále označme $X = AB \cap CD$ a $Y = BC \cap DA$. Pak ve svazku přímek skrz P existuje involuce prohazují dvojice přímek (PX, PY), (PA, PC), (PB, PD) a (PS_1, PS_2).*



Tato věta se často dá použít i bez kuželosečky, protože vždycky lze nalézt kuželosečku vepsanou čtyřem přímkám. Bez kuželosečky dostaneš tři dvojičky involuce. Už dvě nedegenerované dvojičky ji pomocí lemma *tři body stačí* přesně určí. Takže dostaneš nějakou informaci o třetí dvojičce. Ukážeme si, jak se tím dala řešit část úlohy z druhé série.

Příklad 72. Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Průsečík AB a CD označíme Q a průsečík AC a BD je P. Dále mějme bod X takový, že $|\sphericalangle AXD| = 90° = |\sphericalangle BXC|$. Dokaž, že $|\sphericalangle QXP| = 90°$.



Řešení. Uvažme čtyřúhelník $ABDC$. Na pořadí záleží, protože to určuje, jaké dvojičky nám DDIT dá. Aplikujeme DDIT na $ABDC$ a bod X. Dostaneme tyto dvojičky v jedné involuci (XA, XD), (XB, XC) a (XP, XQ). Otočení svazku o $90°$ je involuce, protože je projektivní a dvakrát aplikovaná je identita. První dvě dvojičky jsou v involuci rotace o $90°$, takže i poslední dvojička je v involuci rotace o $90°$. Takže $|\sphericalangle PXQ| = 90°$.

DDIT také často potkáš v zdegenerované podobě. Proto si napíšeme i další varianty, které často potkáš v úloze.

Věta 73. (DDIT pro trojúhelník) *Mějme trojúhelník ABC s kuželosečkou vepsanou ω, která se dotýká strany BC v D. Dále mějme bod P různý od A, B, C, D. Označme PS_1, PS_2 tečny z P k ω. Pak existuje involuce ve svazku přímek skrz P, která prohazuje (PA, PD), (PB, PC) a (PS_1, PS_2).*

Věta 74. (DDIT pro dva body) *Mějme dva body A, B na kuželosečce ω. Tečny k ω v A, B se protínají v X. Mějme v rovině bod P. Tečny z P k ω označíme PS_1, PS_2. Pak existuje involuce ve svazku přímek skrz P, která prohazuje (PX, PX), (PA, PB) a (PS_1, PS_2).*

Znovu si rozmysli, že v těchto větách vidíš původní DDIT. Tyto degenerované varianty nám už dávají pouze tři dvojičky, které se prohazují, takže bez kuželosečky jejich použití nedává žádné nové informace. Taky si rozmysli, kde v těchto degenerovaných případech nesmí být bod P, když v DDIT nesmí ležet na přímkách AB, BC, CD, DA.

Úloha 75. Mějme trojúhelník ABC. Na BC zvolme A_1, X, Y. V A_1 zvolme přímku ℓ. Ta protne AB a AC v B_1, C_1. Přímky XB_1 a YC_1 se protínají v Z. Dokaž, že množina všech Z leží na jedné přímce nezávisle na poloze ℓ.

Úloha 76. Na straně BC trojúhelníka ABC zvolme bod A_1. Na polopřímkách BA a CA zvolme body C_1 a B_1 tak, aby $|\sphericalangle BA_1C_1| = |\sphericalangle CA_1B|$. Přímky B_1B a

C_1C se protínají v A_2. Dokaž, že nezávisle na poloze B_1 a C_1 přímky A_1A_2 prochází pevným bodem.

Úloha 77. (isogonal lines lemma) Mějme v rovině bod A. Dále uvažujme body K, L, M, N takové, že $|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle LAN|$. Označme $X = LN \cap KM$ a $Y = LM \cap KN$. Pak $|\sphericalangle XAN| = |\sphericalangle YAM|$.

Úloha 78. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω. Označme D bod dotyku kružnice připsané ke straně BC. Na přímce AD zvolme bod X tak, aby úsečka XD neobsahovala žádný bod ω. Tečny z X k ω protnou stranu BC v bodech K, L. Dokaž, že $|BK| = |CL|$. (*i*KS 8. ročník)

Úloha 79. Mějme trojúhelník ABC. Dále přímku ℓ a na ní bod P. Označme A_1 průsečík přímky AP překlopené podle ℓ s BC. Analogicky sestrojme B_1 a C_1. Dokaž, že A_1, B_1, C_1 leží na přímce.

Poznámka 80. Pomocí této úlohy se dá dokázat úloha z minulého dílu (Droz-Farny). Vezmi P jako ortocentrum ABC a pak najdi správné dvě kolmice.

Úloha 81. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Na straně BC zvolme bod K. Kružnice nad průměrem KI (označíme ji ω) protne kružnici vepsanou ABC v bodě $L \notin BC$. Přímka AL protne ω podruhé v M. Dokaž, že MI je osa úhlu BMC.

Úloha 82. Mějme trojúhelník ABC. Osa úhlu u A protíná BC v D. Přímky skrz D, které jsou tečné postupně kružnicím opsaným ABD a ACD, protínají postupně AC v E a AB v F. Označme G průsečík BE a CF. Dokaž, že $|\sphericalangle EDG| = |\sphericalangle ADF|$.

Úloha 83. Mějme trojúhelník ABC. Kružnice jemu vepsaná se dotýká BC v bodě D. Na přímce AD vně kružnice vepsané zvolme bod G. Označme ω kružnici opsanou BCG. Tečny z G ke kružnici vepsané ABC protínají ω podruhé v E, F. AD protíná ω podruhé v T. Dokaž, že přímka EF a tečna k ω v T se protínají na BC.

Úloha 84. Mějme trojúhelník ABC a bod P. Skrz P vede přímka ℓ. Překlopme PA podle ℓ, výsledná přímka protne BC v A_1. Analogicky překlopené PB a PC protnou AC a AB v B_1 a C_1. Dokaž, že A_1, B_1, C_1 leží na přímce.

(USAMO 2012 P5)

Úloha 85. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω. Body dotyku vepsané se stranami a, b, c jsou postupně D, E, F. Bod K je jedním z průsečíků EF a kružnice opsané ABC. Tečny z K k ω protnou kružnici opsanou ABC podruhé v I, J. Dokaž, že IJ prochází pólem přímky BC podle kružnice opsané ABC.

Úloha 86. (těžší) Mějme trojúhelník ABC. Kružnici vepsanou označme ω a její střed I. Označme T bod na kružnici opsané různý od A, který splňuje, že osa $\sphericalangle CTB$ prochází I. Dále zvolme M libovolný bod na kružnici opsané ABC. Tečny z M k ω protínají BC v bodech X_1, X_2. Dokaž, že čtyřúhelník MX_1X_2T je tětivový.

(Taiwan TST3 2014 P3)

Poznámka 87. Bod T v této úloze je známý jako bod dotyku „Mixtilinear incircle“ a kružnice opsané. O tomto bodu se ví spoustu zajímavých vlastností. Pro vyřešení této úlohy o něm však nic vědět nepotřebuješ.

Invertujeme Involuce

V této kapitole nás budou zajímat hlavně následující dvě pozorování.

(i) Involuce na přímce, která má nevlastní bod pevný, je překlopení.
(ii) Když invertujeme involuci, v invertovaném světě dostaneme znovu involuci.[11]

Příklad 88. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s kružnicí opsanou Ω. Průsečík AD a BC označme P. Skrz P veďme přímku p. Ta protíná Ω v bodech A_1, B_1. Dále protíná kružnici opsanou PAB v A_2 a kružnici opsanou PDC v B_2. Dokaž, že $|A_1A_2| = |B_1B_2|$.

Řešení. K dokázání stejných délek si můžeme říct, že hledáme překlopení, které zobrazí A_1 na B_1 a A_2 na B_2. Standardní postup by pak byl dokreslení středu A_1B_1 a snažení se dokázat, že je to střed i A_2B_2. Ale my už víme, že překlopení se dá definovat i jinou vlastností než pomocí středu. Chceme najít překlopení, které zobrazí A_1 na B_1 a A_2 na B_2. To znamená, že hledáme involuci, která zobrazuje tyto dvojičky na sebe a nevlastní bod je v ní pevným bodem.

Zinvertujeme celou úlohu podle P. Dostáváme tětivový čtyřúhelník $A'B'C'D'$, přímka $p' = p$ protne Ω' v A_1' a B_1'. Dále protne $A'B'$ v A_2' a $C'D'$ v B_2'. Chceme ukázat, že existuje involuce zobrazující A_1' na B_1', A_2' na B_2', která má P jako pevný bod. To je ale přesně Desarguesova involuce na přímku p a čtyřúhelník $A'B'C'D'$.

Úloha 89. Rozmysli si, že předchozí příklad platí, i když nahradíme kružnice opsané PAB a ADC kružnicemi opsanými PBD a PAC.

Úloha 90. Mějme trojúhelník ABC. Na stranách AB a AC zvolme body E, F. Přímka EF protíná kružnici opsanou v A_1, B_1. Dále protíná kružnice opsané trojúhelníkům ABF a ACE postupně v A_2, B_2. Dokaž, že $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.

Úloha 91. Mějme trojúhelník ABC. Na ose úhlu u A zvolme bod P. Kružnice opsaná ABP protíná AB a AC v bodech B_1, C_1. Kružnice opsaná ACP protíná AB a AC v bodech B_2, C_2. Dokaž, že $|B_1B_2| = |C_1C_2|$.

Shrnutí

Co jsme si v tomto díle ukázali.

[11] Pozor, tohle neznamená, že skládání involucí je involuce, to dokonce většinou není.

Držáky

(1) Jakékoli objekty, na kterých pro každé čtyři prvky umíme určit dvojpoměr.
(2) Definujeme je, abychom mohli o svazcích, bodech na přímkách a bodech na kuželosečkách mluvit jako o jednom objektu.

Projektivní zobrazení

(1) Zobrazení mezi držáky.
(2) Zachovává dvojpoměry.
(3) Složení projektivních zobrazení je projektivní.
(4) Existuje inverzní projektivní zobrazení.
(5) Lemma *tři body stačí*.
(6) Záhadný bod.
(7) K poznání projektivního zobrazení může často pomoci inverze.

Steinerova kuželosečka

(1) Projektivně svázané přímky generují kuželosečku.
(2) Řeší úlohy, kde se tři projektivně svázané přímky mají protínat v jednom bodě.

Involuce

(1) Projektivní zobrazení, které je samo sobě inverzní.
(2) Rozděluje prvky na dvojičky a pevné body.
(3) Každá involuce na kuželosečce má střed.
(4) Dvě netriviální involuce se rovnají, pokud mají shodné dvě dvojičky.
(5) Když na kuželosečce složíme tři involuce, jejíž středy leží na přímce, dostaneme novou involuci se středem na téže přímce. (Ping pong)
(6) Netriviální involuce na přímce, která má nevlastní bod pevný, už nutně je překlopení.
(7) Na involuce se můžeme dívat ve zinvertovaném světě a stále jsou to involuce.
(8) Pro involuci φ na přímce platí, že všechny kružnice nad průměry $X\varphi(X)$ mají společnou chordálu.
(9) Pro involuci φ na přímce a bod P mimo ni platí, že všechny kružímky opsané $PX\varphi(X)$ prochází druhým pevným bodem.

Desarguesova involuce

(1) Standardní varianta je pro čtyřúhelník, ale dá se degenerovat až do varianty jen pro dva body.
(2) Má užitečnou duální variantu, která hovoří o involuci ve svazku přímek.

Pár slov závěrem

Zde se shledáváme u rozcestníku na konci naší poslední výpravy. Unaveni, zahlceni zážitky a dojmy z projektivního světa. Doufáme, že se Ti tato destinace líbila, my jsme rádi byli Tvými průvodci. A třeba na ni ještě někdy vzpomeneš za nostalgických večerů u praskání ohně. Tady na rozcestí, poutníče, je ale Tvá volba, kam se vydat příště a do kterých končin matematiky Tě nohy zanesou. Ale ať už to bude kamkoli, přejeme Ti lehký krok a úsměv na rtech.

Seriál pro Tebe psali Radek a Lenka. Velkou měrou nám ale pomohla i spousta jiných PraSátek, tímto děkujeme především Hedvice, Radovi, Matějovi, Kubovi, ale také všem ostatním průzkumníkům terénu projektivního světa. Na viděnou zas někdy příště :-).

Návody

14. Zinvertuj podle A. Najdi prostřelovací zobrazení.

15. Inverze se středem A. Jak se chová konstrukce tečné kružnice ke dvěma rovnoběžkám?

17. Najdi pól p podle ω.

18. Dokresli kružnici nad průměrem AX.

21. Hýbej s P po AP.

22. Hýbej třeba s A po kružnici opsané. Existují právě tři z ostatních bodů takové, že když se jim A rovná, věta je triviální.

23. Hýbej s P po BI. Pro třetí případ vyber P vepsiště menšího trojúhelníka.

24. Hýbej s C po AC. Střední příčka je rovnoběžná se stranou.

25. Najdi vhodnou přímku, po které P hýbat, aby se zachovala přímka AA_1.

26. Hýbej s X po BX.

27. Hýbej s D po CD.

28. Označ D průsečík ω_C a BC. Všimni si, že $|\sphericalangle XND| = |\sphericalangle ACB|$. Takže zobrazení z X do D se dá vnímat jako rotace o pevný úhel.

29. Označte X' průsečík KT a BC. Zafixujte ABC a bod T. Hýbejte s Q po AT. Ukažte, že $Q \mapsto X$ a $Q \mapsto X'$ jsou projektivní.

30. Převeď podmínku o úhlech na $LQ \parallel AT$.

31. Hýbej s P po PB. Jako třetí bod zvol P na ose ACB a tuhle konfiguraci vyřeš znovu hýbáním.

32. Označ I vepsiště BAD. Hýbej s C po kružnici opsané BID.

33. Hýbej s I po AI. Najdi dva triviální případy a za třetí zvol nevlastní bod. Pak rozhýbej D.

34. Uvědom si, že I je opsiště PST. Pata na AB je pak středem PQ. Hýbej s P po AB. Dokaž, že se přímky CD, PS a QR protínají v jednom bodě.

35. Zafixuj A, B, C, P a hýbej s Q po BC. Uvaž $Q = B$, $Q = BC_\infty$ a $PQ \parallel AC$.

36. Hýbej s P po AA'. Definuj Q' jako průsečík BB' a vystejnolehlené $A'B'$ z P koeficientem 2.

37. Hýbej s A po AB.

40. Najdi projektivní zobrazení zobrazující X na Y.

41. Zobrazení z P do M je projektivní. Dokresli kružnici opsanou a dobře tohle zobrazení definuj.

48. Dokresli průsečíky X, Y přímky PQ s CB a CA. Pak Q_1CQX je tětivový. Převeď tětivovost PQP_1Q_1 pomocí nových kružnic a mocnosti na průsečík přímek. Hýbej s B_1 po CA.

58. OH je Eulerova přímka. Slož involuce se středy H, O, H.

59. Zinvertuj podle P.

60. Zinvertuj podle P

62. Chordála je množina středů kolmých kružnic (obecně inverzí). Najdi inverzi kolmou na všechny zadané kružnice.

68. Použij lemma o involucích, které mluví o průsečíku kružnic.

69. Degenerované DIT na $B_1B_1C_1C_1$. Výslednou involuci promítni na BC.

70. Dokresli průsečík CT s ω. Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ bude hrát roli přímky ℓ. Použij DIT pro trojúhelník.

75. DDIT na B_1C_1CB skrz bod A. Involuci promítni na BC.

76. DDIT na B_1BC_1C. Co pak splňuje přímka A_1A_2?

77. Přímočaré použití DDIT, kde involuce bude překlopení podle osy úhlu $\sphericalangle KAL$.

78. DDIT pro trojúhelník.

79. DDIT pro čtyřúhelník. Předefinuj bod C_1.

81. DDIT na M a trojúhelník.

82. Dokaž, že $EF \parallel BC$, a z toho pak, že $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle FDB|$. Pak vypusť DDIT.

83. Promítni duální Desarguesovu involuci na ω.

84. Předefinuj C_1 jako průsečík A_1, B_1 s AB. Dokaž pomocí DDIT, že splňuje požadovanou vlastnost.

85. Použij DDIT podle K na $EEDD$ a $FFDD$. Dokaž, že na BC určují stejné involuce. Ukaž, že $IBJC$ je harmonický.

86. DDIT se středem v T Ti dá informaci o úhlech u T. DDIT se středem M pomocí lemmatu převeď na jinou tětivovost, zbavíš se tak divných bodů X_1 a X_2.

89. Jen se v Desarguesově involuci změní, kterou dvojičku bereme.

90. Zinvertuj podle A. Involuci na kružnici najdi pomocí jejího středu.

91. Překlop celou úlohu podle osy úhlu. Pak už ji můžeš převést na involuci a invertovat podle A. Hledaná involuce bude překlopení svazku přímek procházejících vhodným bodem.