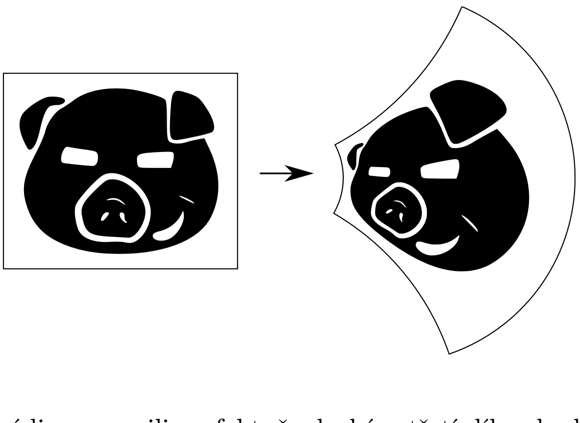
Projektivní geometrie II – Naprosto nesouvisející diagramy

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává druhý díl seriálu o projektivní geometrii. V prvním díle jsme se seznámili s afinními zobrazeními, dvojpoměry a s tím, jaké to je, když se na obrázek koukáme z jiného úhlu pohledu – pomocí perspektivy a kolineace. V tomto díle si ukážeme, že se nemusíme omezovat jen na koukání se na obrázek jinak, ale že někdy jej můžeme úplně celý překreslit. Začneme trochu komplexněji, poté si ukážeme, že inverzí možno mínit je i něco jiného než slov pořadí ve větě špatné. Dále se vydáme na výpravu až k pólům a následně zavedeme dualitu. Zjistíme, že ve správném slova smyslu přímky a kružnice můžeme považovat za ten samý objekt. A že zase v jiném kontextu můžeme zaměňovat přímky za body a naopak.



Také bychom rádi upozornili na fakt, že druhý a třetí díl se budou zabývat dosti odlišnými tématy, a tedy k pochopení třetího dílu nebude potřeba pochopit díl druhý a naopak. Ale samozřejmě nic Ti nebrání pochopit díly oba :).

Úvod do komplexních čísel

Komplexní čísla si zavedeme trochu netradičně, a to pomocí jejich geometrické představy.[1] Komplexní čísla jsou rozšířením čísel reálných a ty si můžeme představit na číselné ose. Každý bod na této ose pak představuje jedno reálné číslo. Pokud reálná čísla leží na přímce, přirozeným rozšířením se zdá být tedy rovina. Libovolný bod v této rovině pak představuje komplexní číslo, přičemž počátek bude odpovídat číslu 0. S čísly bychom ale chtěli umět dělat i nějaké operace, například je sčítat, násobit a podobně. Je tedy trochu otázkou, jak tyto operace zavést pro body v rovině. Můžeme se inspirovat u reálných čísel.

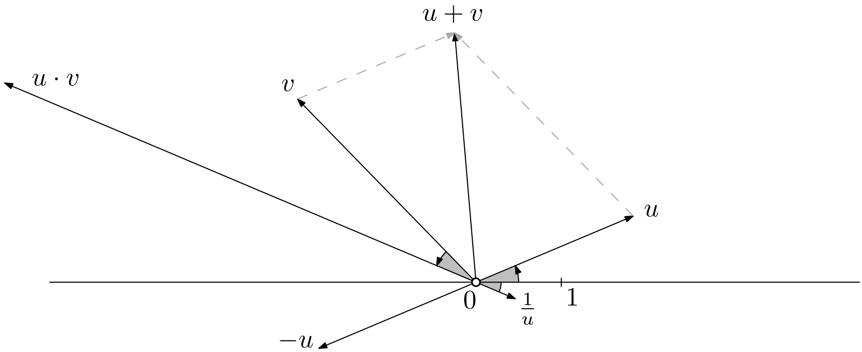
Sčítání komplexních čísel

Zamysleme se nad tím, jak se sčítají reálná čísla. Jak jsme si už řekli, reálná čísla si můžeme představit jako body na číselné ose. Na to, abychom je sečetli, si můžeme představit, že z počátku vede do každého z nich šipka[2]. Součet pak získáme jednoduše tak, že dané šipky přiložíme za sebe a výsledný bod, na kterém druhá šipka skončí, pak nazveme součtem. Naprosto obdobně si můžeme definovat sčítání na komplexních číslech. Představíme si šipky vedoucí z počátku do daných dvou bodů v rovině a za jejich součet budeme považovat bod, který dostaneme, pokud položíme dané dvě šipky za sebe. Když už umíme komplexní čísla sčítat, naprosto obdobně se můžeme podívat na odčítání. V reálných číslech si můžeme všimnout, že rozdíl dvou reálných čísel získáme, když druhou šipku připojíme za první ale tentokrát jejím „koncem se šipkou“. A stejně tak to bude platit i v komplexních číslech.

Poznámka 1. Vidíme, že šipky a body v komplexní rovině spolu souvisí. Každý bod jednoznačně určuje šipku od počátku do tohoto bodu. Analogicky každá šipka od počátku určuje svůj koncový bod. Dále uvedené vlastnosti tak platí i pro vektory i pro body, záleží jen, jak se na to zrovna koukáme. Pro rozlišení těchto dvou pohledů se vektory běžně značí malými písmeny a body písmeny velkými.

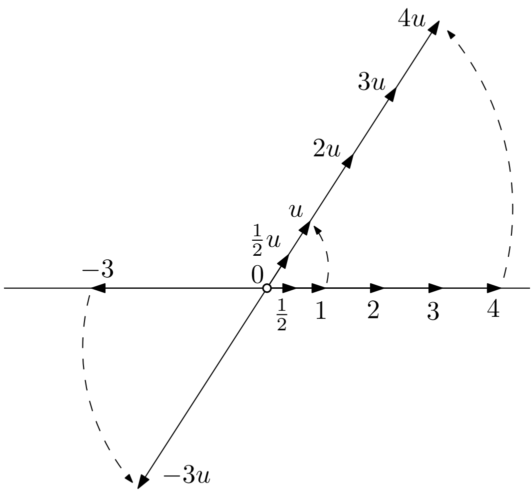
[1] Doporučujeme se podívat na video *Mirka Olšáka* (již vysloužilého organizátora MKS) na toto téma. Najdeš ho na odkaze
youtube.com/watch?v=Ip69mJyF-8s.

[2] Odborně pak můžeme potkat tuto šipku pod krycím názvem *vektor*.



Násobení komplexních čísel

Násobení je už trochu zajímavější. Rozmysleme si nejprve, jak by mělo fungovat násobení komplexního čísla reálným. Mějme nějaké komplexní číslo u. Z naší definice sčítaní komplexních čísel už umíme říct, jak by tento součin měl vypadat. Například $2u = u + u$, tedy $2u$, vznikne „natáhnutím“ šipky odpovídající u dvakrát. Obdobně $3u$, $4u$, $\frac{1}{2}u$, $-3u$ by bylo natáhnutím šipky u tolikrát, kde natáhnutí -3krát si můžeme představit jako překlopení šipky podle počátku a pak „natažení“ příslušnou již kladnou reálnou konstantou – v tomto případě 3.



Už tedy víme, jak se násobí komplexní číslo reálným. Díky komutativitě se na to můžeme podívat z druhé strany. Místo toho, abychom se na dané násobení dívali jako násobení komplexního čísla s reálným, podívejme se, co se děje, když vynásobíme reálné číslo komplexním? No nejprve se šipka určující dané reálné číslo otočí kolem počátku o úhel, který komplexní číslo u svírá s reálnou osou, a poté se vynásobí velikostí u. Z toho už můžeme odvodit, jak bude fungovat obecné násobení dvou komplexních čísel. Mějme komplexní číslo v a chceme ho vynásobit číslem u. Pak toto násobení bude s šipkou v dělat to samé jako předtím násobení reálného čísla číslem u. Tedy nejprve šipku do v otočí o úhel mezi u a kladnou reálnou poloosou a poté šipku velikosti v vynásobí velikostí u. Obecně tedy pro násobení dvou komplexních čísel platí, že násobení sčítá úhly, které dané dvě šipky svírají s reálnou osou, a násobí velikosti. Obdobně dělení bude odčítat úhly a dělit velikosti.

Definice 2. Mějme komplexní číslo x, pak symbolem $\overline{x}$ značíme *komplexně sdružené číslo* k x a jde o komplexní číslo, které dostaneme překlopením x v osové souměrnosti podle reálné osy.

Poznámka 3. Můžeš si rozmyslet, že komplexní sdružování je distributivní prakticky na všem. Například pro komplexní čísla u a v platí, že $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$ nebo $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$.

Cvičení 4. Rozmysli si, že reálná čísla jsou právě ta, pro která platí $x = \overline{x}$. A že součin $x\overline{x}$ je vždy kladný reálný.

Definice 5. (velikost komplexního čísla) *Velikostí* komplexního čísla z nazveme[3] $\sqrt{z\overline{z}}$ a budeme ji značit $|z|$ (z předchozího cvičení víme, že odmocňovaná hodnota je vždy kladné reálné číslo).

Poznámka 6. Pokud jsi se už dříve setkal(a) s komplexními čísly, tato geometrická definice Ti může přijít trochu matoucí. Běžněji (například na středních školách) se komplexní čísla zavádějí pomocí imaginární jednotky i, která je definována jako řešení rovnice $x^2 = -1$. Přestože toto zavedení k pochopení seriálu potřeba nebude a vystačíme si pouze s geometrickou představou komplexních čísel, nastíníme alespoň, jak spolu dané dva pohledy souvisejí a že se vlastně jedná o tutéž věc. Pokud bychom si v naší komplexní rovině definovali souřadnicový systém, pak imaginární jednotka i by se nacházela na souřadnicích $[0, 1]$. Ve škole se zavádí komplexní čísla jako všechna čísla ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla. Čísla a, b tak odpovídají souřadnicím komplexního čísla v dané komplexní rovině. Dále se typicky definují algebraické vlastnosti komplexní čísel – například platí, že $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ nebo $(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$. Tyto vlastnosti si již dokazovat nebudeme, protože pro nás nebudou potřebné. Ale můžeš si rozmyslet, že z geometrické definice komplexních čísel plynou i tyto vlastnosti.

Komplexní dvojpoměr

V prvním díle seriálu jsme si definovali dvojpoměr na různých objektech. Zkusme dvojpoměr bodů na přímce zapsat v řeči komplexních čísel. Mějme čtyři různá kom-

[3] Můžeš si všimnout, že velikost komplexního čísla tak odpovídá velikostí vektoru, který dané komplexní číslo určuje.

plexní čísla A, B, C, D na přímce, pak dvojpoměr (A, B, C, D) je roven

$$\frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}.$$

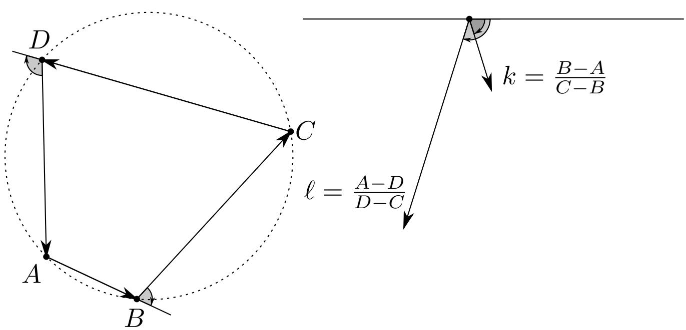
Pokud A, B, C, D leží na přímce, pak velikost výsledného komplexního čísla bude rovna standardnímu dvojpoměru. Zároveň všechna čísla $B-A$, $D-C$, $C-B$, $A-D$ svírají s reálnou osou stejný úhel α. Výsledné komplexní číslo bude tedy s reálnou osou svírat úhel $2\alpha - 2\alpha = 0$, takže bude reálné. Orientace rozdílů je stejná jako orientace úseček v definici z prvního dílu, takže znaménko se také shoduje. Na přímce se tedy komplexní dvojpoměr úplně shoduje se standardním.

Tím, že využíváme komplexní čísla, se už nebudeme omezovat na body na přímce. Tímto výrazem tedy značíme *komplexní dvojpoměr* obecné čtveřice komplexních čísel. Zkus si rozmyslet, že tyto dvojpoměry jsou i v komplexním tvaru jednoznačné, takže $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, právě když $X = Y$.

Pro body, co neleží na přímce, bude hodnota jejich dvojpoměru rovna nějakému komplexnímu číslu. Nás ale bude víc zajímat, kdy může hodnota dvojpoměru vyjít reálné číslo. Už víme, že to platí pro čtyři body na přímce. Pojďme se podívat kdy jindy.

Tvrzení 7. *Reálnou hodnotu dvojpoměru mají čtyři komplexní čísla, právě když leží všechny na jedné přímce nebo kružnici.*

Důkaz. Všimni si, že komplexní číslo $X - Y$ určuje směr přímky XY. Označme podíly $k = \frac{B-A}{C-B}$ a $\ell = \frac{D-C}{A-D}$. Pokud vynásobíme číslo $C - B$ číslem k, dostaneme komplexní číslo $B - A$. Takže z násobení komplexních čísel svírá k s reálnou přímkou stejný úhel, jako je úhel mezi přímkami BC a AB. Aby výsledný dvojpoměr byl reálný, musí svírat k a ℓ s reálnou přímkou úhly α, respektive β takové, že $\alpha + \beta = 0$ modulo $180°$. Takže tato podmínka je ekvivalentní s tím, že v čtyřúhelníku $ABCD$ je součet protilehlých úhlů $180°$, tedy $ABCD$ z obvodového úhlu leží na kružnici nebo na přímce. $\square$



Poznámka 8. Zbylé případy pořadí bodů se dají vyřešit analogicky, nebo celý problém úhlit orientovaně.

V další části seriálu se nám právě z tohoto důvodu bude hodit vnímat kružnice a přímky dohromady jako ten samý objekt.

Různá rozšíření rovin

V prvním díle jsme si zadefinovali rozšíření roviny $\mathbb{R}^2$. V tomto díle se budeme zabývat podobným rozšířením komplexní roviny. K této rovině přidáme jeden *nevlastní bod* v nekonečnu, budeme ho značit ∞. Všechny přímky pak budou tímto bodem procházet. Rovnoběžné přímky se tedy „dotýkají“ v tomto nevlastním bodě. Toto rozšíření nazveme *projektivní komplexní čísla*[4].

Přímky tak můžeme vnímat jako kružnice se středem v nekonečnu. Může se Ti zdát divné, že střed takové kružnice pak na ní leží. To je tím, že v projektivním světě střed kružnice není bodem, který by byl pro kružnici zajímavý.

Dodefinujeme si jak se komplexní sdružení chová s nevlastním bodem $\overline{\infty} = \infty$.

Poznámka 9. Existuje důvod, proč jsme teď přidali jen jeden bod, ale v prvním díle celou přímku. Obecně k prostoru dimenze d potřebujeme přidat prostor dimenze $d-1$, aby se z něj stal projektivní. V prvním díle jsme měli rovinu, kde je každý bod dán dvojicí reálných čísel neboli má dimenzi dva. Tady si sice kreslíme komplexní čísla zase do roviny, ale každý bod nám určuje jedno komplexní číslo, má tedy dimenzi jedna.

Poznámka 10. Doplníme si, jak se chová komplexní dvojpoměr s nevlastním bodem. Analogicky jako v prvním díle zdegeneruje do poměru

$$(A, B, C, \infty) = -\frac{B-A}{C-B} = \frac{A-B}{C-B}.$$

Dávej pozor, že opravdu využíváme jiné rozšíření než v prvním díle. Taky se může stát, že budeme rozšíření kombinovat. Nejdříve si třeba přidáme jeden nevlastní bod, pak chvíli budeme pracovat s tímhle rozšířením, následně ho smažeme a přidáme nevlastní přímku. Takové přidávání a odebírání bodů je většinou v pořádku, jen je občas potřeba si dát pozor, že tím opravdu neztrácíme žádné informace. Třeba když by úloha tvrdila, že nějaké čtyři nevlastní body tvoří harmonickou čtveřici, tak si ji musíme nejdříve někam promítnout, než na ty body zapomeneme.

Přímky a kružnice v tomto novém světě budou tak moc podobné, že si zavedeme pojem pro objekt, který je přímkou nebo kružnicí. Takové objekty budeme nazývat *kružímky*[5]. Všimni si, že kdykoli máme trojici bodů, tak existuje právě jedna kružímka, která jimi prochází. Z předchozího tvrzení ještě navíc víme, že čtyři body mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru, právě když leží na kružímce. Z toho plyne následující tvrzení.

[4] Také se občas nazývá *invertivní rovina* či *komplexní projektivní přímka*.

[5] Anglicky se nazývají *clines*.

Tvrzení 11. *Mějme zobrazení f projektivních komplexních čísel takové, že čtyři body mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru, právě tehdy, když jejich obrazy mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru. Pak toto zobrazení zobrazuje kružímky na kružímky. Speciálně pokud nějaké zobrazení zachovává dvojpoměry, tak zobrazuje kružímky na kružímky.*

Důkaz. Označme A, B, C tři body v komplexní rovině. Pak body X, pro které (A, B, C, X) je reálné, jsou právě ty body, které leží na kružímce procházející body A, B, C. Pro každé takové X tedy platí, že $(f(A), f(B), f(C), f(X))$ je reálné. Z toho ale plyne, že $f(X)$ leží na kružímce určené body $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$. Takže obrazy všech bodů na původní kružímce leží na nové kružímce. Ale protože jsme chtěli, aby byl reálný právě tehdy, tak můžeme tento argument aplikovat i obráceně. Začneme cílovou kružímkou a zobrazíme ji zpět. Tím dostaneme, že výsledkem tohoto zobrazení je opravdu celá kružímka, a ne jen její část. □

Möbiovská zobrazení

Některá standardní zobrazení v rovině se dají snadno popsat pomocí komplexních čísel.

(i) **Posunutí** je jen přičtení nějakého komplexního čísla. Takže $f(x) = x + c$, kde c je komplexní.
(ii) **Stejnolehlost** se středem v počátku je vynásobení reálným číslem. Takže $f(x) = rx$, kde r je reálné.
(iii) **Rotace** se středem v počátku je vynásobení nějakým komplexním číslem, které má velikost jedna. Takže $f(x) = kx$, kde $|k| = 1$.
(iv) **Spirální podobnost** se středem v počátku je vynásobení obecným komplexním číslem. Takže $f(x) = cx$ pro c komplexní.

Rozmysli si, že všechna zatím zmíněná zobrazení zachovávají komplexní dvojpoměry. Zaměříme se ještě na jednu funkci v komplexních číslech. Konkrétně na *komplexní inverz*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Toto zobrazení není definované pro x rovné počátku nebo nevlastnímu bodu, takže si ho rozšíříme tak, že $f(0) = \infty$ a $f(\infty) = 0$.

Tvrzení 12. *Komplexní inverz zachovává dvojpoměry.*

Důkaz. Do vzorce pro výpočet komplexního dvojpoměru dosadíme čtveřici $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$:

$$\frac{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D}\right)} = \frac{\left(\frac{A-B}{A \cdot B}\right)\left(\frac{C-D}{C \cdot D}\right)}{\left(\frac{B-C}{B \cdot C}\right)\left(\frac{D-A}{D \cdot A}\right)} = \frac{(A-B)(C-D)}{(B-C)(D-A)} = \frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}.$$

Takže pro každé čtyři body A, B, C, D platí $(A, B, C, D) = \left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}\right)$. Pro úplné dokončení důkazu je potřeba si rozmyslet, že tuto vlastnost splňuje, i když jeden z bodů je nevlastní. $\square$

Z tohoto tvrzení, jak už víme, plyne, že komplexní inverz zobrazuje kružímky na kružímky. To nám dává lepší geometrickou představu, jak se komplexní inverz chová.

Prohlédněme si nyní náš arzenál komplexních funkcí, které zachovávají dvojpoměry, a tedy i kružímky:

(i) $f_1(x) = x + c$,
(ii) $f_2(x) = cx$,
(iii) $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

Komplexní číslo c zde může být libovolné. Všechny funkce, které vzniknou jejich složením, pak také zachovávají dvojpoměry i kružímky. Těmto funkcím se říká *Möbiovská zobrazení*[6].

Tvrzení 13. *Všechna Möbiovská zobrazení se dají zapsat ve tvaru lineární lomené funkce $\frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou komplexní čísla. A všechna zobrazení tohoto tvaru, která jsou bijektivní, určují Möbiovská zobrazení.*

Tvrzení 14. *Mějme komplexní čísla A, B, C, A', B', C'. Pak existuje právě jedno Möbiovské zobrazení, které zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$ a $C \to C'$.*

Důkaz. Takové zobrazení musí zachovávat dvojpoměry neboli pro všechna X platí, že $(A, B, C, X) = (A', B', C', X')$. Z jednoznačnosti dvojpoměrů existuje nanejvýš jedno zobrazení, které tuto podmínku splňuje. Vyjádříme X' ze vztahů

$$(A, B, C, X) = (A', B', C', X'),$$
$$\frac{(B - A)(X - C)}{(C - B)(A - X)} = \frac{(B' - A')(X' - C')}{(C' - B')(A' - X')}.$$

Komplexní čísla A, B, C, A', B', C' jsou pro nás nějaké konstanty. Převedeme oba zlomky na stejnou stranu. Po roznásobení výrazu jmenovateli a roznásobení závorek tedy dostaneme výraz ve tvaru:

$$u_1 X X' + u_2 X + u_3 X' + u_4 = 0,$$

kde u_1, u_2, u_3 a u_4 jsou nějaké konstanty v komplexních číslech, protože vznikly násobením a sčítáním konstant. To ale umíme upravit do tvaru

$$v_1(X + v_2)(X' + v_3) - v_4 = 0$$

pro nějaká konstantní v_1, v_2, v_3, v_4. Z toho už umíme vyjádřit X':

$$(X' + v_3) = \frac{v_4}{v_1(X + v_2)},$$
$$X' = \frac{v_4}{v_1 X - v_1} - v_3,$$

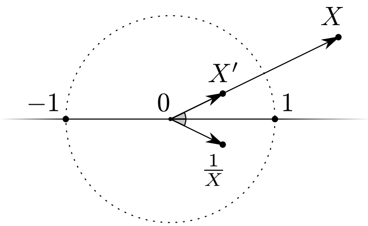
[6] Pro geometrickou představu doporučujeme video *youtube.com/watch?v=0z1fIsUNhO4*.

což je tvar nějaké lineární lomené funkce, takže se jedná o Möbiovské zobrazení. $\square$

Dokonce všechna prostá zobrazení zachovávající dvojpoměry v komplexních číslech jsou Möbiovská. Rozmysli si, že z tvrzení 14 plyne, že pokud se dvě Möbiovská zobrazení shodují na obrazu tří různých bodů, tak už se shodují na všech bodech.

Inverze

Podívejme se znovu na zobrazení $\frac{1}{x}$. To každému komplexnímu číslu přiřadí jiné komplexní číslo, které svírá s reálnou přímkou opačný úhel. Takže pokud toto zobrazení složíme s překlopením podle reálné přímky, bude navíc splňovat, že přímka vedená body x a $f(x)$ vždy prochází počátkem. Toto zobrazení si ještě obohatíme o stejnolehlost se středem v počátku, výsledným zobrazením se stane *inverze*. Protože vznikne složením s komplexním sdružením, nejedná se již o Möbiovské zobrazení.



Definice 15. *Inverzí* nazveme zobrazení projektivních komplexních čísel ve tvaru

$$f(x) = \overline{\left(\frac{k}{x}\right)} = k/\overline{x},$$

kde k je reálné číslo, kterému říkáme *koeficient inverze*. Protože si můžeme počátek vždy umístit v rovině, kam chceme, zadefinujeme si *střed inverze* jako bod, který budeme považovat za počátek.

Všimni si, že pokud je koeficient ve tvaru $a \cdot b$, pak inverze zobrazí komplexní číslo o velikosti a na komplexní číslo o velikosti b a obráceně.

Tvrzení 16. *Mějme inverzi s kladným koeficientem k, pak množina pevných bodů je kružnice.*

Důkaz. Hledáme všechna X taková, že $k/\overline{X} = \overline{\left(\frac{k}{X}\right)} = X$ neboli $X\overline{X} = k$. Číslo $X\overline{X}$ je rovno $|X|^2$, takže $|X| = \sqrt{k}$. Množina všech takových X tedy leží na kružnici se středem 0 a poloměrem $\sqrt{k}$. Rozmysleme si, že pro každý bod této kružnice už pak platí, že se zobrazí sám na sebe a množinou všech takovýchto bodů je skutečně celá kružnice. $\square$

Z tohoto důvodu se inverzi často říká *kruhová inverze*. A často se nedefinuje svým středem, ale právě touto kružnicí. Oba pohledy na inverzy mají různá využití. Všimni si, že kruhová inverze se omezuje jen na kladné koeficienty. Na druhou stranu se dá rozšířit kruhová inverze o inverzi podle přímky. Chceme nějaké Möbiovské zobrazení s komplexním sdružením, které bude mít jako množinu pevných bodů přímku. Tím je překlopení podle dané přímky. Pokud tedy budeme mluvit o inverzi podle kružímky, může daná kružímka být i přímkou a pak se jedná o překlopení.

Všimni si, že teď pod pojmem inverze myslíme dvě zobrazení. Jedno je inverze daná středem a koeficientem. Ta neumí inverzi podle přímky. Druhá je inverze podle kružímky. Ta pro změnu nepovoluje inverze se záporným koeficientem.

Tvrzení 17. *Inverze zobrazuje kružímky na kružímky.*

Důkaz. Stačí si všimnout, že k/x zobrazuje kružímky na kružímky a překlopení také.

Zkusme si ale rozmyslet, co se děje s dvojpoměry po inverzi. Zobrazení $\frac{k}{x}$ je zachová. Zbývá aplikovat komplexní sdružení. Tím se akorát na výsledný dvojpoměr aplikuje komplexní sdružení. To znamená, že inverze zachovává reálné hodnoty komplexních dvojpoměrů a komplexní hodnoty komplexně sdruží. $\square$

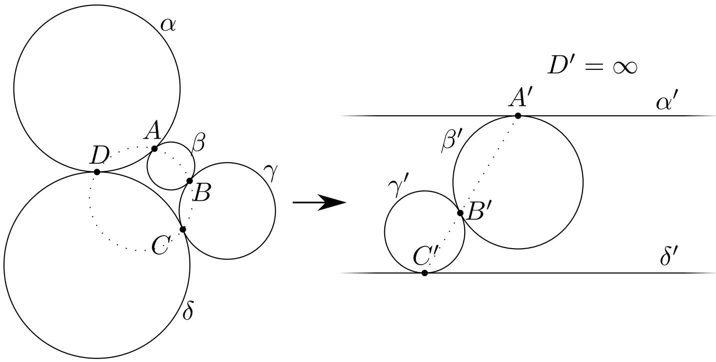
Pozorování 18. *V inverzi je obrazem kružnice procházející počátkem přímka, protože se zobrazí na kružímku procházející nevlastním bodem.*

Tohle pozorování je jeden ze základů, k čemu se inverze běžně v geometrii dá použít. Pokud úloha obsahuje příliš mnoho kružnic procházejících jedním bodem, tak je inverzí můžeme se středem v daném bodě změnit na přímky. Pojďme si to ukázat!

Příklad 19. Mějme čtyři kružnice α, β, γ, δ takové, že žádné dvě se neprotínají a α se dotýká β v A. Obdobně se β dotýká γ v B, kružnice γ se dotýká δ v C a konečně δ se dotýká α v D. Dokaž, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Řešení. Úlohu zinvertujeme se středem v D. Z kružnic α a δ se stanou přímky. Protože se dotýkají, stanou se z nich rovnoběžné přímky α' a δ'. Kružnice β se zobrazí na kružnici, co se dotýká α' v A'. Kružnice γ se zobrazí na kružnici, která se dotýká δ' v C' a β' v B'. Chceme ukázat, že A', B', C', D' leží na jedné kružímce, ale D' je nevlastní, takže chceme, aby A', B', C' ležely na přímce.

Uvážíme stejnolehlost se středem v B' zobrazující β' na γ'. Stejnolehlost zachovává rovnoběžky, takže zobrazí α' na δ'. Takže zobrazí i A' na C'. To ale znamená, že B' leží na přímce $A'C'$, což jsme chtěli dokázat.



Úloha 20. Mějme dvě kolmé přímky p, q s průsečíkem O. Kružnice ω_1 a ω_3 mají střed na p a prochází O. Kružnice ω_2 a ω_4 mají střed na q a prochází O. Označme průsečíky různé od O kružnic $A = \omega_1 \cap \omega_2$, $B = \omega_2 \cap \omega_3$, $C = \omega_3 \cap \omega_4$ a $D = \omega_4 \cap \omega_1$. Dokaž, že A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Úloha 21. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

(i) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,

(ii) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Dokaž, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají.

Tvrzení 22. *Pokud je P středem inverze a čárkami značíme obrazy bodů, pak platí $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle B'A'P|$.*[7]

Důkaz. Zapíšeme úhel pomocí dvojpoměru s nevlastním bodem. Komplexní číslo $(A, B, P, \infty) = \frac{A-B}{P-B}$ svírá s reálnou přímkou úhel $\sphericalangle ABP$. Po inverzi se dvojpoměr komplexně sdruží, takže

$$(A, B, P, \infty) = \overline{(A', B', \infty, P)}.$$

Následně využijeme permutování dvojpoměrů z prvního dílu a nakonec upravíme znovu pomocí dvojpoměru s nevlastním bodem

$$\overline{(A', B', \infty, P)} = \overline{\left(\frac{1}{(P, A', B', \infty)}\right)} = \overline{\left(\frac{B' - A'}{P - A'}\right)}.$$

Komplexní sdružení nemění velikost svíraného úhlu. Výsledné komplexní číslo tak svírá s reálnou osou úhel $\sphericalangle B'A'P$. Takže $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle B'A'P|$. $\square$

Poznámka 23. Všimni si, že z toho plyne, že body A, B, A', B' leží na kružnici pro všechna A, B.

[7] Standardní důkaz tohoto tvrzení je přímočaré využití mocnosti, protože ji ale v seriálu moc nevyužíváme, ukážeme si méně tradiční důkaz.

Poznámka 24. Všimni si, že z předchozího důkazu se dá zjistit vlastnosti nějakých poměrů po inverzi. Protože k dokázání úhlu využíváme silnější podmínku.

Toto tvrzení o inverzi z ní dělá ještě silnější nástroj, protože umožňuje přenášet úhly. Občas se už může dokonce vyplatit využít inverzi, i když v zadání žádná kružnice není. Při invertování se hodí si rozmyslet, kolik tak kružnic navíc nám z přímek vznikne a jestli spíš pomůžou, nebo uškodí. Přímky, na kterých leží jen dva body, jako třeba strany trojúhelníka invertovat nemusíme, protože nám nedávají žádnou informaci navíc.

Úloha 25. Mějme kružnice ω_1 a ω_2, které se protínají v bodech A, B. Na přímce AB leží bod O. Kružnici se středem O a poloměrem $|OA|$ označíme Ω. Dále nechť Ω protíná ω_1 v bodech A, X_0. Přímka X_0A protne ω_2 v X_1. Analogicky, Ω protne ω_2 v A, Y_0. Přímka Y_0A protne ω_1 v Y_1. Průsečík Ω s přímkou AB různý od A označíme Z. Dokaž, že $|\sphericalangle ZX_1A| = |\sphericalangle ZY_1A|$.

Úloha 26. (Shooting lemma) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB. střed oblouku AB označíme $\check{S}$. Uvažme dvě přímky p, q procházející $\check{S}$. Přímka p protne ω podruhé v X_0 a BC v X_1. Obdobně q protne ω podruhé v Y_0 a BC v Y_1. Dokaž, že X_0, X_1, Y_0 a Y_1 leží na kružnici.

Úloha 27. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a uvnitř jeho stran AC, BC po řadě body D, E. Dokaž, že paty výšek z bodu C na přímky AB, AE, BD, DE leží na jedné kružnici.

Úloha 28. Nechť se kružnice k, l se středy S, T protínají ve dvou různých bodech A, B. Nechť přímka AS protíná l v bodě $C \neq A$. Nechť přímka AT protíná k v bodě $D \neq A$. Dokaž, že přímka AB prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ACD

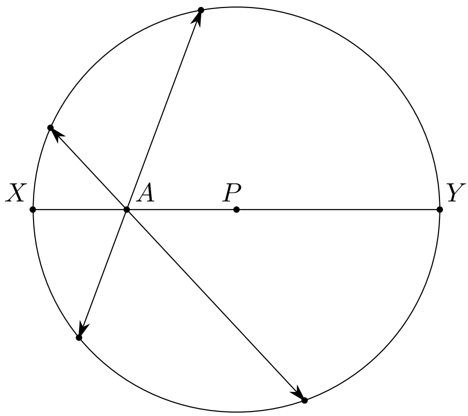
Úloha 29. (IMO 1996) Nechť P je bod uvnitř ABC takový, že

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Dokaž, že osy úhlů $\sphericalangle ABP$ a $\sphericalangle ACP$ protínají přímku AP v jednom bodě.

Tvrzení 30. *Mějme v rovině kružnici ω a bod A, který na ni neleží. Pak existuje inverze se středem v A taková, že obraz ω je znovu ω. Neboli že existuje inverze, která kružnici ω „překlápí“ skrz bod A.*

Důkaz. Označme P střed ω. Uvažme přímku procházející skrz body PA. Ta protne ω v bodech X, Y. Pak existuje inverze, se středem A a koeficientem $|AX| \cdot |AY|$ zobrazující $X \to Y$. Kružnice ω je symetrická podle přímky AP. Protože P na téhle přímce leží, bude i výsledná kružnice ω' symetrická podle AP. Takže i výsledná kružnice je kružnice nad průměrem XY. $\square$



Poznámka 31. Koeficientu takové inverze se středem v A, která ω „překlápí“, se také říká *mocnost* bodu A ke kružnici ω.

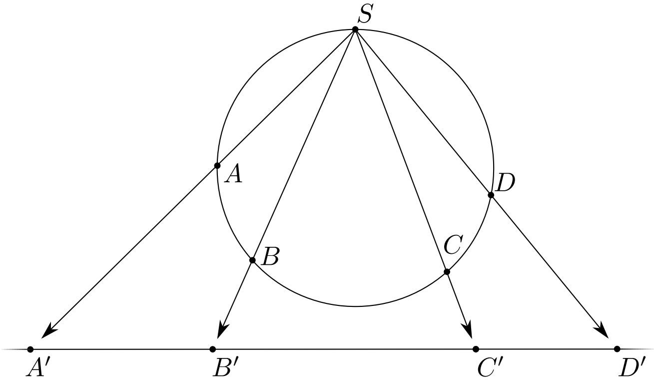
Dvojpoměry na kružnicích

Komplexní dvojpoměr jsme navrhli tak, aby se shodoval se standardním dvojpoměrem na přímce. Jenže v prvním díle jsme si definovali dvojpoměr i na kružnici. Komplexní dvojpoměr na kružnici nám vyšel reálný, ale chovají se obě definice na kružnici opravdu stejně? Jen pro rozlišení v této části budeme značit na chvíli definici dvojpoměru z prvního dílu pomocí hranatých závorek $[A, B, C, D]$.

Uvažme čtyři komplexní čísla A, B, C, D ležící na kružnici. Pak libovolná inverze se středem S na ω zobrazí ω na nějakou přímku. Na této přímce víme, že se naše dvě definice chovají stejně. Označíme-li tedy čárkami obrazy v této inverzi, pak $(A', B', C', D') = [A', B', C', D']$. Protože inverze zachovává reálné hodnoty komplexních dvojpoměrů, tak platí $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$. Z prvního dílu víme, že dvojpoměr na kružnici získáme pomocí projekce nějakého dvojpoměru na přímce skrz bod na kružnici. Neboli

$$[A', B', C', D'] = [SA', SB', SC', SD'] = [A, B, C, D].$$

Poslední rovnost plyne z toho, že v inverzi platí, že S, X a X' leží na přímce. Takže $[A, B, C, D] = (A, B, C, D)$. $\square$



Takže už můžeme v klidu používat dvojpoměry na kružnicích a nemusíme se odkazovat na to které, protože se obě definice chovají stejně. Pojďme se s tímto novým vzhledem znovu podívat na harmonické čtyřúhelníky.

Jak už z prvního dílu víme, harmonické čtyřúhelníky jsou ty, které mají hodnotu dvojpoměru rovnou -1. Pojďme se podívat, co nového o nich víme, když využijeme komplexní dvojpoměr.

Tvrzení 32. *Pro harmonický čtyřúhelník platí* $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$.

Důkaz. To, že je daný čtyřúhelník harmonický, znamená, že hodnota komplexního dvojpoměru je rovna -1 neboli

$$\frac{(B-A)\cdot(D-C)}{(C-B)\cdot(A-D)} = -1.$$

Takže

$$\frac{|B-A|\cdot|D-C|}{|C-B|\cdot|A-D|} = 1,$$

což po pronásobení $|C-B|\cdot|A-D|$ dává přesně rovnost, kterou jsme chtěli ukázat. □

Skládáme inverze

Tvrzení 33. *Složení dvou inverzí, které mohou mít různé středy, je Möbiovské zobrazení.*

Důkaz. Inverzi se středem v P můžeme zapsat v rovině s počátkem 0 jako

$$\overline{\left(\frac{k}{x-P}\right)} + P.$$

Když složíme dvě taková zobrazení, tak se dvě komplexní sdružení vyruší a zbyde nějaká lineární lomená funkce neboli Möbiovské zobrazení. □

Lemma 34. (Kouzelné inverzní lemma – KIL) *Řekneme, že konfigurace je* hezká, *pokud obsahuje kružímku k a body A, B, které jsou svoje inverzy podle k. Pak pokud zobrazíme hezkou konfiguraci pomocí jakékoli inverze f, dostaneme znovu hezkou konfiguraci.*

Důkaz. Čárkou značíme obrazy v inverzi f.

Označme g_k inverzi podle k a $g_{k'}$ inverzi podle k zobrazeného pomocí f. Dále označme $A' = f(A)$ a $B' = f(B)$. Zobrazení $f(g_k(X))$ je Möbiovské, protože se jedná o složení dvou inverzí. Obdobně zobrazení $g_{k'}(f(X))$ je Möbiovské. Podíváme se na obraz nějakého bodu M ležícího na k.

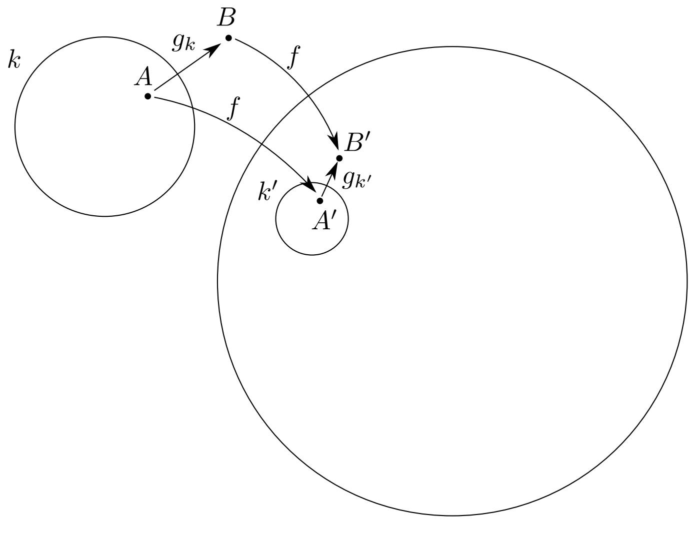
(i) Nejprve se podívejme na zobrazení $f(g_k(X))$. Protože M leží na k, tak se zobrazí pomocí $g_k(X)$ sám na sebe. Takže v tomto zobrazení $M' = f(M)$.

(ii) Podle $g_{k'}(f(X))$ nejdříve zobrazíme M pomocí f. Tím dostaneme $M' = f(M)$. Pak zobrazíme M' podle $g_{k'}$. Ale protože M' leží na k', tak se zobrazí sám na sebe.

Obě zobrazení se shodují na obrazech alespoň tří bodů na k a jsou Möbiovská, takže už se shodují na všech bodech. Tedy

$$\begin{aligned} f(g_k(A)) &= g_{k'}(f(A)), \\ f(B) &= g_{k'}(A'), \\ B' &= g_{k'}(A'). \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že B' je opravdu obraz A' podle k'. Neboli tvoří hezkou konfiguraci. $\square$



Příklad 35. Mějme kružnici ω se středem O a bod A vně této kružnice. Kružnice δ se středem A a poloměrem $|AO|$ protne ω v bodech P, Q. Označme A' invertované A podle kružnice ω. Dokažte, že PQ je osa úsečky $A'O$.

Řešení. Konstrukce tvořená kružnicí δ, bodem A a bodem v nekonečnu ∞ tvoří hezkou konfiguraci. Tu zinvertujeme podle ω. Z δ se stane přímka, protože prochází středem ω, konkrétně přímka PQ. Z bodu A se stane A' a z ∞ se stane O. Takže z tvrzení KIL je O obraz A' podle PQ. To ale už víme, že je překlopení. Takže PQ je osa $A'O$.

Poznámka 36. Z tvrzení KIL obecně plyne, že pokud se úloha zabývá jen otázkou inverzů, můžeme ji jakkoli zinvertovat a dostaneme ekvivalentní úlohu.

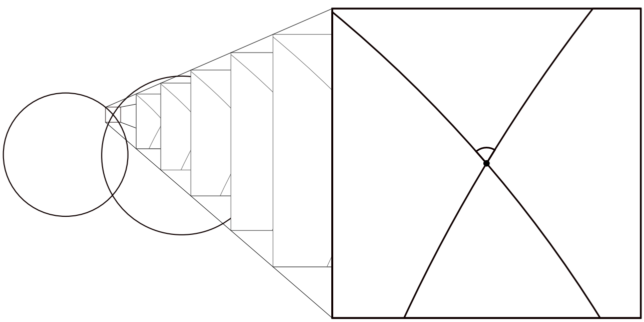
Úloha 37. V trojúhelníku ABC označme ω kružnici se středem A a poloměrem $|AB|$. Dále nechť je D inverzí bodu C podle ω. Jako X označme překlopené A podle přímky DB. Nakonec budiž O inverzí X podle ω. Dokaž, že O je středem kružnice opsané ABC.

Úloha 38. Mějme harmonický čtyřúhelník $ABPC$. Označme ω kružnici procházející A a dotýkající se BC v B. Analogicky Ω je kružnice procházející A a dotýkající se BC v C. Druhý průsečík ω a Ω označíme X. Dokaž, že X a P jsou osově souměrné podle BC.

Úhly mezi kružímkami

Zadefinujeme si úhel mezi dvěma kružnicemi, které se protínají, jako úhel svíraný jejich tečnami ze společného bodu. Představme si to tak, že se podíváme opravdu blízko jejich průsečíku. Při přiblížení vypadají skoro jako přímky, takže svírají nějaký úhel. Analogicky úhel mezi kružnicí a přímkou je úhel mezi tečnou v průsečíku s danou přímkou.

Všimni si, že pokud se dvě kružnice protínají ve dvou bodech, tak v obou mají mezi sebou stejný úhel.



Tvrzení 39. *Möbiovská zobrazení zachovávají úhly mezi kružímkami.*

Pozorování 40. *Z předchozího tvrzení plyne, že inverze úhly mezi kružímkami překlápí, takže také zachovává jejich velikost.*

Formální důkaz tohoto tvrzení je nad rámec seriálu. Ukážeme si ale náhled, proč by něco takového mělo platit. Velikost úhlu je lokální vlastnost neboli velikost úhlu umíme poznat, ať se na bod díváme jakkoli blízko, nezajímá nás vzdálené okolí v obrázku. Když se podíváme na Möbiovské zobrazení „hodně blízko“, chová se jako afinní. Okolí bodu nějak pootočí a zachová přímky. Ale zároveň, protože je Möbiovské, zachovává kružnice. Ale všechna afinní zobrazení, která zachovávají kružnice, jsou podobná zobrazení, takže zachovávají i úhly.

Kolmé kružnice

Toto tvrzení dává vzniknout kružnicím, které jsou na sebe kolmé. Ty se v mnoha ohledech chovají pěkně.

Tvrzení 41. *Kružnice ω a δ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když obraz δ v inverzi podle ω je zase δ.*

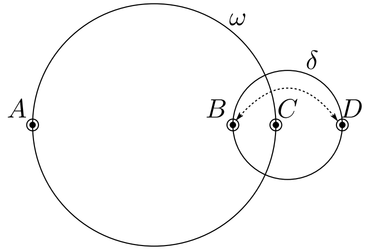
Důkaz. Protože se úloha zabývá jen otázkou inverzů, můžeme podle tvrzení *KIL* celou situaci jakkoli zinvertovat a dostaneme ekvivalentní úlohu. Zinvertujeme celou úlohu podle jednoho průsečíku ω a δ. Tím se z kružnic stanou přímky. Obraz δ' podle ω' je δ', právě když jsou tyto přímky na sebe kolmé. Takže δ se zobrazí na δ podle ω, právě když jsou kolmé. □

Tvrzení 42. *Mějme kružnice ω, δ, které se protínají. Přímka p prochází středy obou z nich a protíná ω v A, C a δ v B, D. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *Kružnice ω a δ jsou na sebe kolmé.*
(ii) *Čtveřice bodů (A, B, C, D) je harmonická.*

Důkaz. Označme B' obraz B v inverzi podle ω. Pak protože inverze zachovává dvojpoměry, víme, že $(A, B, C, B') = (A, B', C, B)$. Z přepočítávání dvojpoměrů z prvního dílu dostaneme $(A, B, C, B') = \frac{1}{(A,B',C,B)}$. Takže když označíme $x = (A, B, C, B')$, platí $x = \frac{1}{x}$. Tedy x je rovno 1 nebo -1. Ale kdyby $x = 1$, tak A, B, C, B' nejsou různé body, z čehož plyne $x = -1$. Takže (A, B, C, B') je harmonická.

Tudíž (A, B, C, D) je harmonická, právě když $D = B'$, což nastane, právě když ω v inverzi zobrazí δ samu na sebe neboli právě když jsou na sebe kolmé. □



Poznámka 43. Tento trik, ve kterém jsme projektivně zobrazili (A, B, C, D) na nějak zpermutovanou čtveřici A, B, C, D a tím ukázali, že je harmonická, může občas usnadnit dokazování harmonických čtveřic. Zkus si podobným způsobem dokázat větu *Ceva–Menelaus* z prvního dílu jen pomocí promítání dvojpoměrů.

Úloha 44. Mějme kružnici ω se středem O. Na ω leží bod S. Na polopřímce OS leží bod X. Dále X' je obraz bodu X v inverzi podle ω. Na ω leží bod A. Dokaž, že AS je osa úhlu XAX'.

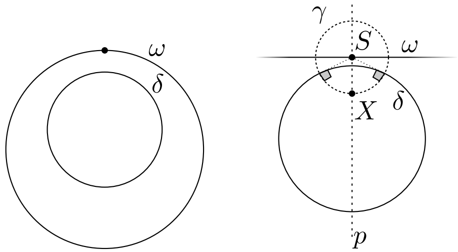
Úloha 45. Mějme dvě kolmé kružnice ω a δ se středy O a S. Přímka OS protíná ω v A tak, že O leží mezi S a A. Jeden průsečík ω a δ označíme X. Přímka AX protne δ podruhé v Y. Dokaž, že $YS \perp OS$.

Lemma 46. *Pro dvě kružnice ω a δ, které se neprotínají, existuje Möbiovské zobrazení, které je zobrazí na soustředné kružnice.*

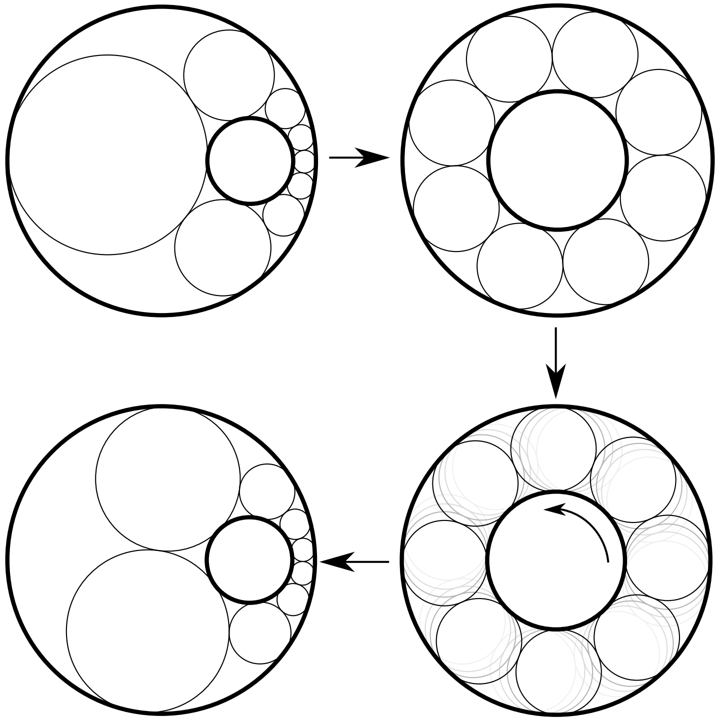
Důkaz. Všimni si, že pokud jsou dvě kružnice soustředné, tak mají více společných os symetrií. Pokusíme se tedy sestrojit pomocí inverzí dvě přímky, které jsou obě kolmé na zadané kružnice. Po těchto zobrazeních už tyto kružnice musí být soustředné.

Začneme inverzí se středem v jakémkoli bodě na kružnici ω. Tím se z ω stane přímka a δ bude kružnice, která ω neprotíná. Označme S patu výšky ze středu kružnice δ na přímku ω. Sestrojíme kružnici γ kolmou na δ se středem v S. Tu sestrojíme tak, že z S vedeme tečny SK, SL k δ kružnice o poloměru $|SK|$ je pak kolmá na δ.

Označme p přímku kolmou na ω procházející S. Pak platí tyto kolmosti: $p \perp \gamma$, $p \perp \omega$, $p \perp \delta$, $\gamma \perp \delta$, $\gamma \perp \omega$. Označme X jeden z průsečíků γ a p a invertujme se středem v X. Tím se z γ a p stanou kolmé přímky. Z ω a δ budou znovu kružnice. Přímky γ i p jsou na obě kružnice kolmé neboli ω a δ jsou soustředné. Toto zobrazení jsme dostali jako složení dvou inverzí, tedy je Möbiovské. $\square$



Věta 47. (Steinerovo porisma) *Mějme dvě kružnice ω a Ω, které se neprotínají a mezi ně se dá vepsat pás kružnic, které se navzájem dotýkají. Pak ať nakreslíme první kružnici pásu kdekoli tak, aby se dotýkala ω i Ω, tak tato kružnice je součástí nějakého uzavřeného kružnicového pásu, který se dotýká ω i Ω.*



Důkaz. Protože se úloha zabývá pouze kružnicemi a tím, jak se dotýkají, můžeme na ni aplikovat jakékoli inverze a Möbiovská zobrazení. Z předchozího lemmatu zobrazíme kružnice ω a Ω na soustředné. V takovém případě můžeme získat jakýkoli nový kružnicový pás pouhým otočením již známého pásu podle středu ω. Aplikováním inverzního Möbiovského zobrazení dostaneme zpět původní konfiguraci s novým pásem. $\square$

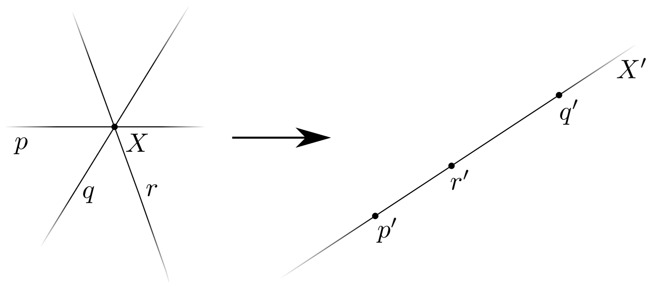
Dualita

Poznámka 48. V této části seriálu se vrátíme do rozšíření roviny z prvního dílu a nebudeme tedy používat komplexní čísla.

Obecný princip duality

Body a přímky v rovině se chovají do určité míry podobně, jenom „obráceně“. Jakékoli dva různé body jednoznačně určují přímku a naopak jakékoli dvě nerovnoběžné přímky mají jednoznačný průsečík. V následující definici si zavedeme „prohazování“ přímek a bodů.

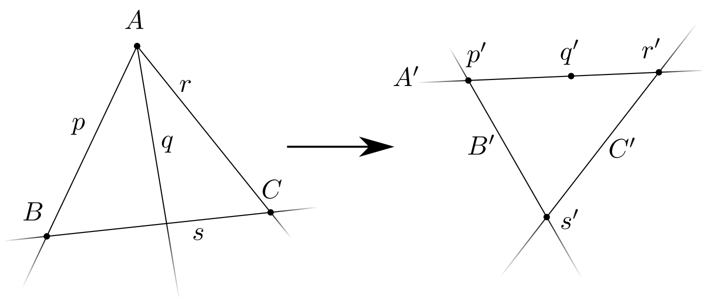
Definice 49. *Diagramem*[8] $\mathcal{D}$ rozumíme nějakou množinu přímek a množinu bodů. Duální diagram $\mathcal{D}'$ pak je takový diagram, ve kterém každému bodu A v $\mathcal{D}$ odpovídá duální **přímka** A' v $\mathcal{D}'$, podobně každé přímce p v $\mathcal{D}$ odpovídá duální **bod** p', a navíc kdykoli bod A leží na přímce p, tak bod p' leží na přímce A'.



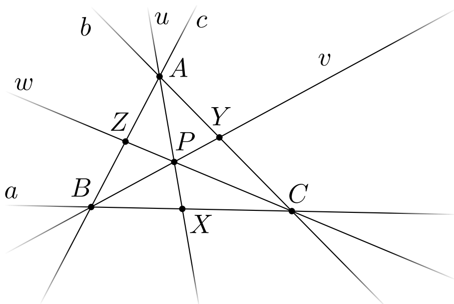
Příklad 50. Mějme tři přímky p, q, r procházející bodem A. Na p leží bod B a na r leží bod C. Přímku BC označme s. Zdualizuj diagram.

Řešení. Nakreslíme si přímku A'. Protože p, q, r procházejí bodem A, tak p', q', r' leží na A'. Tak si je dokreslíme. Na p leží B, což znamená, že B' prochází bodem p'. Analogicky C' prochází r'. Jako s je označena přímka BC, takže v duálním diagramu je s' průsečík B', C'.

[8] Víte, kolik váží jeden řecký bůh? – Jeden diagram :D.



Cvičení 51. Zkus si překreslit následující obrázek tak, že nahradíš přímky za body.



V dosavadních příkladech jsme dualizovali pouze konečné diagramy. V následující sekci si ukážeme, že toho ve skutečnosti můžeme dualizovat mnohem víc. Ukáže se, že celá projektivní rovina je sama k sobě duální.

Tento pohled na dualitu budeme v dalších kapitolách dost využívat, takže jestli se cítíš trochu nejistě, zkus si překreslit nějaké další obrázky. Teď si ukážeme, jak takovéto prohození bodů a přímek celé roviny udělat. Geometricky si popíšeme, jakou přesně přímku přiřadíme kterému bodu.

Definice 52. (skalární součin) Uvažme rovinu s počátkem P a v ní dva body A a B různé od počátku. Bod B kolmo promítneme na přímku PA a projekci označíme B_0. Pak *skalární součin* $A \cdot B$ definujeme jako součin $PA \cdot PB_0$, kde vzdálenosti bereme orientovaně, tedy pokud P leží mezi A, B_0, bude hodnota skalárního součinu záporná. Rozmysli si, že to můžeme zapsat jako $A \cdot B = |PA| \cdot |PB| \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi PA a PB. Z toho si všimni, že je skalární součin symetrický neboli $A \cdot B = B \cdot A$.

Poláry

Nyní už máme nástroj, který nám umožňuje splnit naší myšlenku obecné duality. Bodu A v rovině přiřadíme množinu A' všech bodů X splňujících $A \cdot X = 1$. Projekce všech takových bodů na polopřímku PA musí mít velikost $\frac{1}{|PA|}$. Označme B bod na polopřímce PA takový, že $|PB| = \frac{1}{|PA|}$. Pak A' obsahuje všechny body na přímce kolmé na PA procházející bodem B. Takže jsme bodu A přiřadili přímku A'. Přímka A' se nazývá *polárou* A a bod A se nazývá *pólem* A'. Pro každou přímku, která neprochází počátkem, existuje pól.

Tvrzení 53. *Nechť $\mathcal{D}$ značí diagram obsahující všechny body v rovině kromě počátku, a všechny přímky v rovině neprocházející počátkem. Pak zobrazení, které zobrazí každý bod na jeho poláru a každou přímku na její pól, definuje dualitu diagramu $\mathcal{D}$ se sebou samotným.*

Důkaz. Uvažme bod A a přímku p diagramu $\mathcal{D}$ tak, že A leží na p. Potřebujeme dokázat, že p' leží na A'. Jelikož A leží na poláře bodu p', tak $A \cdot p' = 1$. To z definice poláry bodu A současně znamená, že bod p' leží na poláře bodu A neboli na A'.[9] □

Cvičení 54. Rozmysli si, že pokud dodefinujeme poláru počátku jako nevlastní přímku a poláru jakéhokoli nevlastního bodu A jako přímku procházející počátkem kolmou na směr A, tak dostaneme dualitu celé projektivní roviny se sebou samotnou.

Podobně jako jsme inverzi skládali se stejnolehlostí a koeficientu dané stejnolehlosti říkali koeficient inverze, budeme i dualitu skládat se stejnolehlostí. Vzniká nám tím pojem *koeficient duality*.

Definice 55. Definujeme polárovou dualitu se středem v P. Posuneme P do počátku. Pak tato dualita bude definována tak, že bodu A přiřadí množinu všech bodů X takových, že $A \cdot X = k$, kde k je nenulové reálné číslo, kterému říkáme *koeficient duality*.

Tvrzení 56. *Mějme v rovině body A, P a přímku p, která jimi neprochází a je kolmá na AP. Pak existuje dualita se středem P, která zobrazí A na p.*

Poláry podle kružnice

Všimni si, že polárová dualita s kladným koeficientem k zobrazí bod, který leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{k}$, na přímku procházející daným bodem, která je tečnou k dané kružnici.

Analogicky jako jsme mohli používat pojem inverze podle kružnice, můžeme nyní používat pojem polárová dualita podle kružnice.

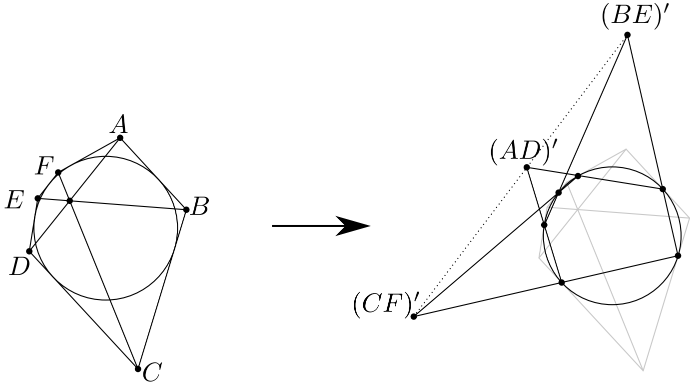
Tvrzení 57. *Mějme bod A vně kružnice ω. Označme X, Y body dotyku tečen vedených bodem A ke kružnici ω. Pak XY je polárou bodu A podle ω.*

Důkaz. Víme, že AX je polárou X a AY je polárou Y. Protože přímka XY je přímkou definovanou body X, Y a bod A je bodem definovaným přímkami X', Y', tak z principu duality je XY polárou A. □

[9] Tvrzení také známé pod názvem: „Polára bodu na poláře prochází pólem původní poláry“. V anglické literatuře označováno jako La Hire's Theorem.

Věta 58. (Brianchon) *Mějme tečnový šestiúhelník $ABCDEF$. Pak přímky AD, BE a CF prochází jedním bodem.*

Důkaz. Uvažme dualitu podle kružnice vepsané. Označme body dotyku vepsané s AB, BC, CD, DE, EF, FA postupně I, J, K, L, M, N. Pak $A' = IN$. Analogicky známe poláry i zbylých bodů šestiúhelníka. Pól přímky AD je průsečíkem polár A a D. Což jsou dvě protější strany šestiúhelníka $IJKLMN$. Tvrzení, že AB, BC, CD prochází jedním bodem, znamená, že jejich póly leží na jedné přímce. Ale to je přesně Pascalova věta, kterou jsme si ukazovali v prvním díle. □



Úhel mezi bodem a přímkou

Hlavní trik, který s polárami budeme využívat, je přenášení úhlů. K usnadnění tohoto přenášení si však musíme dodefinovat pár značení.

Definice 59. Následující definice využívají rovinu s počátkem P.

(i) Úhel mezi přímkami $|\sphericalangle pq|$ je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku p proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku q.

(ii) Úhel mezi body $|\sphericalangle AB|$ je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku PA proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku PB.

(iii) Úhel mezi bodem a přímkou $|\sphericalangle Ap|$, kde A leží na p, je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku PA proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku p. Obdobně $|\sphericalangle pA|$ je úhel, o který musíme otočit p na PA.

Tvrzení 60. (o dualitě úhlů) *Pro všechny body a přímky v dualitě platí*

(i) $|\sphericalangle pq| = |\sphericalangle p'q'|$,

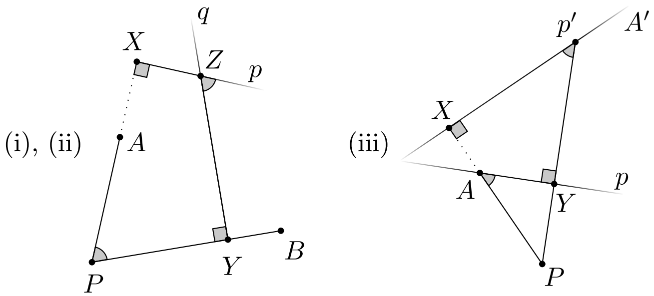
(ii) $|\sphericalangle AB| = |\sphericalangle A'B'|$,

(iii) $|\sphericalangle Ap| = |\sphericalangle A'p'|$.

Důkaz.

(i), (ii) Nejdříve dokážeme první a druhé tvrzení. Označíme $A = p'$ a $B = q'$. Dále označíme průsečíky $X = PA \cap p$, $Y = PB \cap q$ a $Z = p \cap q$. Pak $PXZY$ leží na jedné kružnici protože $|\sphericalangle ZYP| = 90° = |\sphericalangle ZXP|$. Takže z obvodového úhlu je úhel mezi p a q stejný jako úhel mezi PA a PB. Což jsme chtěli dokázat. $\square$

(iii) Pro třetí tvrzení označíme $X = PA \cap A'$ a $Y = Pp' \cap p$. Pak X, A, Y, p' leží na jedné kružnici, protože $|\sphericalangle p'YA| = 90° = |\sphericalangle p'XA|$. Znovu z obvodového úhlu plyne, že úhel mezi p a PA je stejný jako úhel mezi A' a Pp'. $\square$



Úloha 61. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nechť $E = AB \cap CD$ a $F = AD \cap BC$. Mějme bod X uvnitř $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle AXE| = |\sphericalangle CXF|$. Dokaž, že $|\sphericalangle AXB| + |\sphericalangle CXD| = 180°$.

Úloha 62. (Blanchet zas a znovu) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD. Dokaž, že $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle FDA|$.

Úloha 63. Mějme pevný bod D a pevné přímky k, l, které procházejí společným bodem A. Na přímkách k, l jsou postupně body X a Y takové, že $|\sphericalangle XDA| = |\sphericalangle YDA|$. Dokaž, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 64. Mějme rovnoběžník $ABCD$ a v něm nalezněme bod F, který splňuje $|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle CBF|$. Dokaž, že $|\sphericalangle FCB| = |\sphericalangle FAB|$.

Úloha 65. Mějme trojúhelník ABC takový, že $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme postupně D, E, F průsečíky os úhlů u vrcholů A, B, C s protější stranou. Dokaž, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Tvrzení 66. (o dualitě na kružnici) *Mějme trojúhelník ABC se stranami a, b, c. Na jeho kružnici opsané mějme bod P. Uvažme dualitu se středem v P. Pak platí, že čtyřúhelníky $ABCP$ a $a'b'c'P$ jsou podobné. Tedy speciálně bod P leží na kružnici opsané $a'b'c'$.*

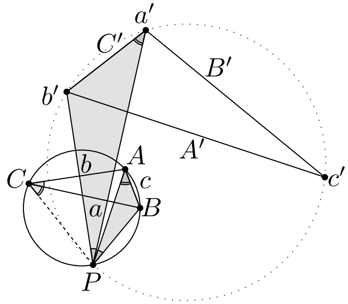
Důkaz. Dokážeme, že trojúhelníky ABP a $a'b'P$ jsou podobné. Z obvodového úhlu $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP|$. Z duality úhlů

$$|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle Ca| = |\sphericalangle C'a'| = |\sphericalangle b'a'P|.$$

Znovu z obvodového úhlu $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle ACB|$. Z duality úhlů pak

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ab| = |\sphericalangle a'b'| = |\sphericalangle a'Pb'|.$$

Dostali jsme, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle b'a'P|$ a $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle a'Pb'|$. Takže z věty uu jsou trojúhelníky ABP a $a'b'P$ podobné. Obdobně jsou trojúhelníky ACP a $a'c'P$. Takže i čtyřúhelníky $ABCP$ a $a'b'c'P$ jsou podobné. □

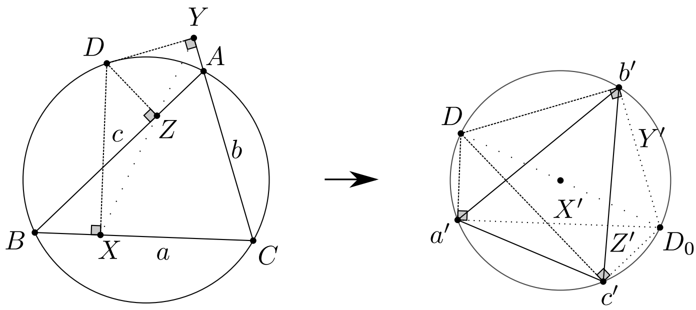


Věta 67. (Simsonova přímka) *Mějme trojúhelník ABC a na jeho kružnici opsané bod D. Označme X, Y, Z postupně paty z D na přímky BC, AC, AB. Pak X, Y, Z leží na jedné přímce.*

Důkaz. Označme a, b, c postupně strany trojúhelníka BC, CA, AB. Uvažme polárovou dualitu se středem v D a libovolným koeficientem. Z tvrzení 66 leží D na kružnici opsané $a'b'c'$. Z duality úhlů $90^\circ = |\sphericalangle Xa| = |\sphericalangle X'a'|$. Takže přímka X' je kolmice na Da' procházející a'. Analogicky Y' je kolmice na Db' skrz b' a Z' je kolmice na Dc' skrz c'. Chceme ukázat, že X', Y', Z' prochází jedním bodem. Označme D_0 bod naproti na kružnici opsané $a'b'c'$ od bodu D. Pak $|\sphericalangle Da'D_0| = 90^\circ$. Takže X' prochází D_0. Analogicky i Y' a Z' prochází D_0. Tedy X', Y' a Z' prochází jedním bodem, takže X, Y, Z musely ležet na jedné přímce. □

Úloha 68. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a vepsištěm I. Označme p tečnu k ω různou od stran trojúhelníka. Na přímce p zvolme body A_0, B_0, C_0 tak, aby $|\sphericalangle AIA_0| = |\sphericalangle BIB_0| = |\sphericalangle CIC_0| = 90^\circ$. Dokaž, že přímky AA_0, BB_0 a CC_0 prochází jedním bodem.

Úloha 69. (Miquelův bod) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme P průsečík AB a CD. Analogicky Q je průsečík BC a AD. Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům QAB, QCD, PBC a PAD prochází jedním bodem M. Dokaž, že M leží na PQ, právě když $ABCD$ je tětivový. Můžeš si všimnout i dalších zajímavých úhlových vlastností.



Poláry a inverze

Všimni si, že inverze a poláry spolu dost souvisí. Konkrétně poláru bodu A dostaneme tak, že vedeme kolmici na PA procházející inverzí (se stejným koeficientem) bodu A, kde P je střed duality i inverze.

Tvrzení 70. (dualita zachovává dvojpoměry) *Mějme body A, B, C, D na přímce. Uvažme jakoukoli dualitu. Pak $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. (Z principu duality víme, že přímky $A'B'C'D'$ prochází jedním bodem, takže je na nich dvojpoměr dobře definovaný.)*

Důkaz. Označme P střed duality. Rozlišme dvě konfigurace.

(i) Nejprve rozeberme případ, kdy P leží na přímce A, B, C, D. Všechny přímky A', B', C', D' jsou rovnoběžné. Promítneme dvojpoměr (A', B', C', D') na přímku A, B, C, D. Tím dostaneme to samé, jako když (A, B, C, D) zinvertujeme se stejným středem a koeficientem.

(ii) V druhém případě, když P leží mimo $ABCD$, z promítacího tvrzení víme, že

$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$

Otočíme tento svazek o $90°$ na (PA_1, PB_1, PC_1, PD_1). Pak PA_1 je rovnoběžné s A', $PB_1 \parallel B'$, $PC_1 \parallel C'$ a $PD_1 \parallel D'$. Protože u dvojpoměrového svazku záleží jen na úhlech mezi přímkami, platí, že

$$(PA_1, PB_1, PC_1, PD_1) = (A', B', C', D').$$

Takže $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. □

Úloha 71. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$ a nechť I je střed kružnice jemu vepsané. Označme $Q = AB \cap CD$ a $P = BC \cap AD$. Označme M kolmou projekci bodu I na přímku PQ. Dokaž, že $|\sphericalangle DMI| = |\sphericalangle BMI|$.

Věta 72. (Simsonova přímka podruhé) *Mějme trojúhelník ABC a na jeho kružnici opsané bod D. Označme X, Y, Z postupně paty z D na přímky BC, AC, AB. Pak X, Y, Z leží na jedné přímce.*

Důkaz. Uvažme dualitu se středem v D a následnou inverzi se stejným koeficientem a středem v D. Ta zobrazí stranu trojúhelníka na patu z D na danou stranu.Takže třeba $a \to X$. Označme čárkou obrazy v dualitě a dvojčárkou obrazy po následné inverzi. Z tvrzení dualita na kružnici víme, že $a'b'c'D$ je tětivový. Takže po inverzi máme, že $a''b''c''\infty$ leží na kružímce. Ale protože obsahuje bod v nekonečnu, musí ležet na přímce. Takže X, Y, Z leží na přímce. □

Může se Ti zdát, že jsme na tuto větu využili moc silné nástroje (dualitu i inverzi), když se dá jednoduše vyúhlit. Tyto nástroje nám ale dávají další vhled do toho, co to Simsonova přímka vlastně je. Pojďme si ukázat netriviálnější tvrzení, které z tohoto náhledu celkem rychle plyne.

Příklad 73. Mějme harmonický čtyřúhelník $ABCD$. Označme X, Y, Z paty z D na přímky BC, CA, AB. Pak $|XY| = |YZ|$.

Řešení. Znovu aplikujeme dualitu se středem v D. Z tvrzení dualita na kružnici víme, že $a'b'c'D$ je podobný s $ABCD$, tedy speciálně je harmonický. Takže $(a', b', c', D) = -1$. Po zinvertování podle D dostáváme, že

$$(X, Y, Z, \infty) = (a'', b'', c'', \infty) = -1.$$

To je ale dvojpoměr s bodem v nekonečnu, tedy Y je středem úsečky XZ.

Úloha 74. V čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík úhlopříček AC a BD. Dále označme M průsečík kružnic opsaných PCD a PAB různý od P. Nakonec označme H_1, H_2, H_3 a H_4 postupně paty kolmic z bodu P na přímky AB, BD, DC a CA. Dokaž, že H_1, H_2, H_3 a H_4 leží na jedné přímce.

Poláry v zadání

Občas se stane, že k vyřešení úlohy ji ani nepotřebujeme celou dualizovat, ale stačí si uvědomit, které přímky v zadaní jsou poláry kterých bodů v zadání. Nejlépe si to ukážeme na příkladě.

Úloha 75. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω se středem I. Kružnice ω se dotýká stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F. Přímka EF protíná přímku BC v G. Dokaž, že $GI \perp AD$.

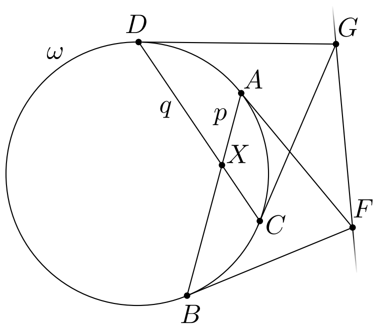
Řešení. Pokusíme se ukázat silnější tvrzení, že AD je polárou G podle ω. Pak musí GI být kolmé na AD. Najdeme pól AD podle ω. Ten musí být průsečíkem polár A a D. Polára A je EF, polára D je BC, takže G je opravdu pólem AD.

Úloha 76. Mějme trojúhelník ABC a jeho vepsiště I. Označme body dotyku vepsané kružnice se stranami BC, CA, AB postupně D, E, F. Označme S průsečík přímek EF a BC. Dokaž, že $SI \perp AD$.

Poláry a kolineace

Už jsme si ukázali, jak vypadá polára bodu ležícího na kružnici a vně kružnice. Pojďme nějak projektivně zkonstruovat poláru bodu uvnitř kružnice.

Tvrzení 77. *Mějme bod X uvnitř kružnice ω. Nechť p, q jsou libovolné přímky procházející bodem X, p protíná ω v A, B a q protíná ω v C, D. Tečny k ω v A a B se protínají v F. Tečny k ω v C a D se protínají v G. Pak přímka FG je polára X.*



Důkaz. Už víme, že p je polára F a q je polára G. Z principu duality tak přímka procházející F, G. musí být polárou průsečíku p, q. Takže FG je opravdu polára X. □

Tvrzení 78. (kolineace zachovává poláry) *Mějme kružnici ω, bod A a jeho poláru a vzhledem k ω. Pak pokud kolineace zobrazí ω na kružnici ω', $A \to A'$ a $a \to a'$, tak a' je polára A' vzhledem k ω'.*

Důkaz. Poláry umíme zkonstruovat využitím pouze tečen a průsečíků. To všechno ale kolineace zachovává. Zachovává tedy i poláry. □

Tím se možnosti kolineace ještě rozšířily. Pojďme si to ukázat.

Příklad 79. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ se středem O kružnice opsané. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Dokaž, že $PO \perp QR$.

Řešení. Označme ω kružnici opsanou $ABCD$. Dokážeme silnější tvrzení. Dokážeme, že QR je polára P podle ω. Uvažme kolineaci zobrazující QR na nevlastní a ω na kružnici. Z $ABCD$ se tím stane obdélník. Poláry se zachovaly. QR je nevlastní a P je střed ω, takže QR je polára P. Takže PO muselo být kolmé na QR.

Poznámka 80. Rozmysli si, že v předchozím případě dokonce PQ je polára R a PR je polára Q podle ω a že z toho plyne, že O je ortocentrum PQR. To je tvrzení, které se v prvním díle zdálo kolineací absolutně nedokazatelné.

Úloha 81. Mějme tečnový tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme I střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a P průsečík úhlopříček. Dokaž, že O, I, P leží na jedné přímce.

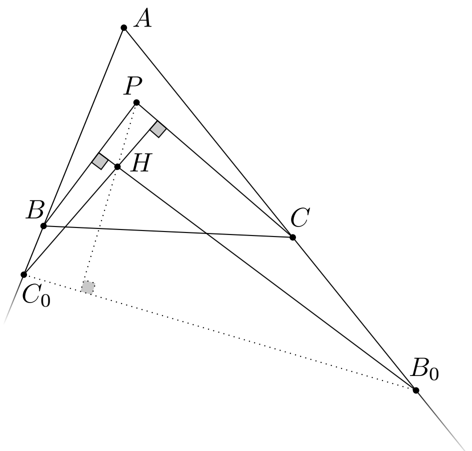
Dualita s ortocentrem

Ukážeme si speciální případ duality. Pro trojúhelník ABC se stranami a, b, c najdeme dualitu, která zobrazí $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$.

Tvrzení 82. (existence duality podle trojúhelníka) *Uvažme dualitu zobrazující $A \to BC$ se středem v ortocentru. Podíváme se, kam tato dualita zobrazí B. B leží na A' neboli B' prochází skrz A. Zároveň musí být kolmá na BH, ale to je právě AC. Analogicky je polára C přímka AB.*

Poznámka 83. Pro pravoúhlý trojúhelník tato dualita neexistuje, protože ortocentrum v něm splývá s vrcholem.

Příklad 84. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. V něm leží bod P. Označme B_0 bod na AC takový, že $B_0H \perp BP$. Analogicky sestrojíme C_0 na AB tak, aby $C_0H \perp CP$. Dokaž, že $PH \perp C_0B_0$.



Řešení. Najdeme póly přímek PB a PC v dualitě podle trojúhelníka ABC. Přímka PB prochází bodem B, takže její pól leží na b. Označíme její pól Q. Pak protože střed duality je ortocentrum, musí platit, že $QH \perp PB$. Takže $Q = B_0$. Analogicky pól PC je C_0. Takže přímka C_0B_0 je polára $P = PB \cap PC$. Z toho plyne, že $PH \perp C_0B_0$.

Poznámka 85. Mohli jsme dodefinovat i bod A_0. Pak z toho, že PA, PB, PC prochází jedním bodem, plyne, že A_0, B_0, C_0 leží na přímce.

Úloha 86. Mějme trojúhelník ABC a označme H jeho ortocentrum. Dále mějme ceviány[10] AD, BE, CF. Kolmice na přímku DH procházející skrz A protíná BC v A_0. Obdobně kolmice na EH procházející skrz B protíná AC v B_0 a kolmice na FH procházející C protíná AB v C_0. Dokaž, že A_0, B_0 a C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 87. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Označme M_a střed strany BC, M_b střed strany AC a M_c střed strany AB. Průsečík polopřímky M_aH s kružnicí opsanou označíme X_a a průsečík AX_a s BC označíme Y_a. Analogicky sestrojíme body X_b, X_c a Y_b, Y_c. Dokaž, že Y_a, Y_b a Y_c leží na přímce.

Úloha 88. Mějme trojúhelník ABC a jeho ortocentrum H. Na straně BC leží bod D. Přímka skrz H kolmá na DH protne přímky AB a AC postupně v bodech K a L. Dokaž, že $\frac{|KH|}{|HL|} = \frac{|BD|}{|DC|}$.

Úloha 89. Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H. Na AC nalezněme bod B' takový, že $|\sphericalangle AHB'| = |\sphericalangle ABC|$. Analogicky na AB nalezneme C' splňující $|\sphericalangle AHC'| = |\sphericalangle ACB|$. Dokaž, že $B'C' \parallel BC$.

Úloha 90. V trojúhelníku ABC s ortocentrem H a patami výšek z vrcholů A, B, C označenými D, E, F. Nechť M je střed strany BC. Přímka EF protne přímku BC v X. Dokaž, že $XA \perp HM$.

Úloha 91. (Droz-Farny) Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H. Přímky p, q jsou na sebe kolmé a prochází bodem H. Přímka p protíná BC v A_0, AC v B_0 a AB v C_0. Analogicky q protíná BC v A_1, AC v B_1 a AB v C_1. Dokaž, že středy úseček A_0A_1, B_0B_1 a C_0C_1 leží na přímce.

Úloha 92. Mějme trojúhelník ABC. Označme H jeho ortocentrum a M střed strany BC. Dále K je průsečík MH s kružnicí opsanou ABC. Přímka rovnoběžná s BC procházející skrz H protíná přímku AK v bodě X. Vnější osa úhlu BHC protíná BC v bodě Y. Označme S střed oblouku BC neobsahující A. Dokažte, že $SH \perp XY$

Úloha 93. V trojúhelníku ABC označme H ortocentrum. vnější osa úhlu BHC protne BC v X. vnitřní osa AHB protne AB v Y a vnitřní osa AHC protne AC v Z. Dokaž, že X, Y, Z leží na přímce.

Shrnutí

Shrneme, co jsme v druhém díle ukázali.

[10]Ceviány v trojúhelníku jsou tři přímky, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníka a protínají se v jednom bodě.

Komplexní dvojpoměr

(1) Definován jako
$$\frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}$$
pro komplexní čísla A, B, C, D.

(2) Na přímce i na kružnici se chová stejně jako standardní.

Möbiovská zobrazení

(1) Lineární lomené funkce v komplexních číslech
$$\frac{ax+b}{cx+d}$$
pro komplexní koeficienty a, b, c, d.

(2) Zachovávají dvojpoměry.

(3) Zachovávají kružímky.

Inverze

(1) Definovaná středem a koeficientem. Posuneme střed do počátku, pak je to zobrazení tvaru $k/\overline{x}$, kde k je reálný koeficient.

(2) komplexně konjugují dvojpoměry.

(3) Zachovává kružímky.

(4) Označme P střed inverze a čárkou obrazy. Pak P, X, X' leží na přímce pro všechna X.

(5) Kružnice procházející středem se zobrazí na přímku neprocházející středem.

(6) Pro body A, B a jejich inverzy A', B' podle inverze se středem P platí $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PB'A'|$.

(7) Složení dvou inverzí je Möbiovské zobrazení.

(8) Inverze podle kružímky. Definovaná jako Möbiovské zobrazení s pruhem, jehož množina pevných bodů je zadaná kružímka. Inverze podle přímky je překlopení.

(9) Tvrzení *KIL*.

Kolmé kružnice

(1) Tečny v jejich průsečících jsou kolmé.

(2) Obraz ω v inverzi podle Ω je znovu ω právě když jsou ω a Ω na sebe kolmé.

(3) Označme p přímku spojující středy kolmých kružnic. Ta kružnice protne ve čtyřech bodech. Tyto body tvoří harmonickou čtveřici.

Dualita

(1) Nahrazujeme body a přímky tak, aby se zachovala vlastnost náležení. Takže pokud A leží na p, pak p' leží na A'.

(2) Konečné duální diagramy.

Poláry

(1) Skalární součin $A{\cdot}B$ ve světě s počátkem P je roven $A{\cdot}B = |PA|{\cdot}|PB|\cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi PA a PB.

(2) Definované pomocí skalárního součinu. Polára A je množina bodů X takových, že $A \cdot X = k$, kde k je reálný koeficient polárové duality.
(3) Určují dualitu celé projektivní roviny.
(4) Dobře se přepočítávají úhly.
(5) Pro čtyři body na kružnici $ABCD$ platí, že po dualitě se středem v D jsou čtyřúhelníky $ABCD$ a $a'b'c'D$ podobné, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka ABC.
(6) Inverze bodu A je pata středu duality na poláru A'.
(7) Pokud kolineace zachová kružnici, zachová i poláry vzhledem k dané kružnici.
(8) Pro trojúhelník ABC existuje polárová dualita se středem v ortocentru zobrazující $A \to a$, $B \to b$ a $C \to c$.

Pár slov závěrem

Zde končí naše putování projektivním světem druhého dílu. Ale nemusíš truchlit, vydáme se zde ještě jednou a naposled v díle třetím. Pro připomenutí: na druhé procházce jsme nejprve potkali komplexní čísla, těch jsme se nezalekli a ukázali si, že pomocí nich lze jednoduše popsat některá klasická zobrazení, celou třídu těchto zobrazení jsme pak nazvali Möbiovská. Dále jsme se podrobněji zaměřili na jedno konkrétní zobrazení – inverzi a zjistili, že kružnice a přímky jsou si v jistém pohledu tak podobné, že jsme jejich čeleď nazvali kružímky. Také jsme se vydali až na pól, kde jsme namísto očekávaných polárních medvědů nalezli poláry. Hlavním objevem druhého výletu se pak stal tvor jménem dualita, který kudy chodil, tu se hned přímky měnily v body a naopak body v přímky. Pro větší sblížení se všemi potkanými zvířátky jsme si vlastnosti jednotlivců demonstrovali na spoustě příkladů a obrázků.

A na co se můžeš těšit ve třetím putování? Tentokrát se vydáme do končin dosud nepoznaných a tajuplných. Ukážeme si, jak se dají úlohy dokazovat za pomoci hýbání s body. A že občas je stačí dokázat ve třech speciálních případech a pak už jsou dokázány celé. Pomocí hýbání pak budeme schopni dokazovat i zvláštní tvrzení jako třeba, že určitá množina přímek prochází jedním bodem bez toho, abychom znali daný bod. Seznámíme se se zvířátkem zvaným Desarguesova involuce, které sice může dle jména působit děsivě, ale při bližším poznání umí schovat zoubky, být kouzelné a poradit si s mnohými obrázky. Například umí dokázat, že nějaké dvě náhodné úsečky na přímce jsou stejně dlouhé. Doufáme, že jste se při této výpravě nezalekli šavlozubých tygrů a doprovodíte nás i na této závěrečné cestě. Vstříc novému dobrodružství!

Návody

20. Zinvertuj podle O. Z kružnic vznikne obdélník.

21. Invertuj se středem A_3. Rozmysli si, co se stane s dotýkajícími se kružnicemi.

25. Zinvertuj podle A a přenes úhly.

26. Najdi pevnou inverzi se středem v $\check{S}$, která zobrazí X_0 na X_1 nezávisle na poloze přímky p.

27. Dokresli kružnice nad průměry AB, AC, CD, CE. Následně zinvertuj podle C.

28. Zinvertuj podle A. Objeví se trojúhelník s výškami.

29. Zinvertuj podle A a dokaž, že $|AB|/|BP| = |AC|/|CP|$.

37. Označ O_1 střed kružnice opsané ABC. kružnice opsaná ABC, nevlastní bod a bod O_1 tvoří hezkou konfiguraci.

38. X, P a BC mají tvoří hezkou konfiguraci. Zinvertuj podle A.

44. Najdi harmonickou čtveřici. Najdi pravý úhel. Využij tvrzení dvě ze tří.

45. Zinvertuj podle δ a najdi pravý úhel.

61. Zdualizuj podle X.

62. Zdualizuj podle paty výšky.

63. Zdualizuj podle D. Dokaž, že póly hledaných přímek leží na jedné přímce.

64. Zdualizuj podle F.

65. Rozmysli si, jak se chová dualita podle bodu, který leží na ose úhlu. Co když leží na rameni?

68. Zdualizuj podle kružnice vepsané.

69. Zdualizuj úlohu podle průsečíku dvou kružnic opsaných. Uvědom si, že z toho co dostaneš plyne, že M leží i na zbylých dvou. Pro druhou část převeď tětivovost na součet úhlů 180.

71. Zdualizuj podle kružnice vepsané. Převeď podmínku pomocí dvě ze tří na harmonický svazek.

74. Stačí najít Simsonovy přímky. Zkus ale využít důkaz Simsonovy přímky. Zdualizuj a zinvertuj podle M.

76. Zjisti, že S je polára AD podle kružnice vepsané.

81. Najdi poláru P podle kružnice vepsané i opsané. To, co zjistíš, říká dost informace, aby platilo, že O, I, P leží na přímce.

86. Hledaná přímka je polára průsečíku cevián AD, BE, CF v dualitě podle ABC.

87. Jaká je polára bodu M_a v dualitě podle ABC.

88. Převeď poměr na dvojpoměr s nevlastním bodem a pak zdualizuj podle ABC.

89. Přenes úhel v dualitě podle ABC.

90. Překlop A podle M na A_0. Jaká je polára A_0 v dualitě podle ABC.

91. Pro zdualizování převeď na harmonické svazky. Po dualitě už jen zbývá vyúhlit.

92. Zdualizuj podle ABC osu úhlu BAC a osu strany BC.

93. Body X, Y, Z se v dualitě podle ABC zobrazí na různé osy úhlů.