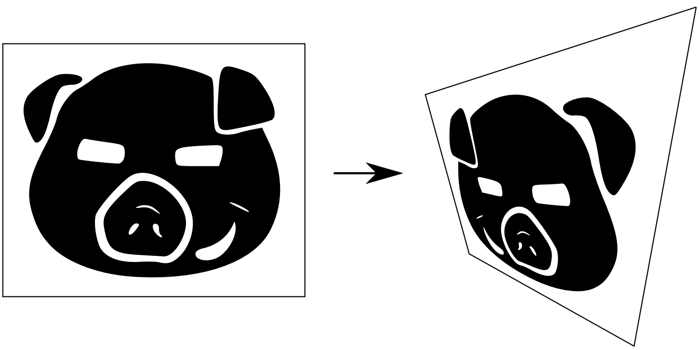
Projektivní geometrie I – Pravý úhel pohledu

Pár slov úvodem

Milý příteli,
do rukou se Ti dostává první díl letošního seriálu, který se bude zabývat projektivní geometrií. Na geometrii se můžeme dívat jako na takové obrázky – různé přímky, kružnice, trojúhelníky nakreslené na papíře. Pod projektivní geometrií si můžeš prozatím představit dívání se na takové obrázky „z různých stran“. Ukážeme si, že zapeklitý problém je často těžký právě tím, že se na něj koukáme ze špatného úhlu pohledu. Pokud obrázek obejdeme, nakloníme hlavu nebo si vedle něj lehneme do trávy, pokaždé vypadá trošku jinak. A když se umíme na obrázky koukat z toho správného úhlu, rázem se z obecných trojúhelníků stávají rovnostranné, z čtyřúhelníků obdélníky, z obecných přímek rovnoběžky a podobně. Dokazovat tvrzení pro tyto objekty je pak často mnohem lehčí, než jak tomu bylo v původním zadání.



V seriálu si budeme kreslit spoustu obrázků, proto se neděs jeho délky. Z praktických důvodů nebudeme všechno dokazovat úplně do detailů a formálně, a tak něco necháme jen pro zájemce. Pokud Ti formální detaily nepřijdou tak důležité, tak se s nimi nemusíš moc trápit :-). Seriál doplňují spíše lehčí *cvičení*, která by měla doprovázet nové věci představené v dané kapitole. Cvičení doporučujeme řešit chronologicky při čtení. Na konci každé kapitoly najdeš úlohy. Ty můžou mít různé obtížnosti, od lehkých až po velmi těžké. Vůbec nevadí, pokud jich vyřešíš jen pár nebo některé přeskočíš, na konci textu jsou k dispozici nápovědy. Ke konci seriálu můžeš také najít bonusovou kapitolu Zobecňování dvojpoměrů. Ta je pouze doplňující a její pochopení není důležité ke zbytku seriálu ani k řešení soutěžních úloh.

Seriál pro tebe letos píší Radek Olšák a Lenka Kopfová. Kdybys měl(a) nějaké nejasnosti či otázky, neváhej se na nás obrátit. Můžeš nám například napsat mail na *radek@olsak.net* nebo na *lenka.kopfova@gmail.com*.

Zobrazení

Co to je zobrazení?

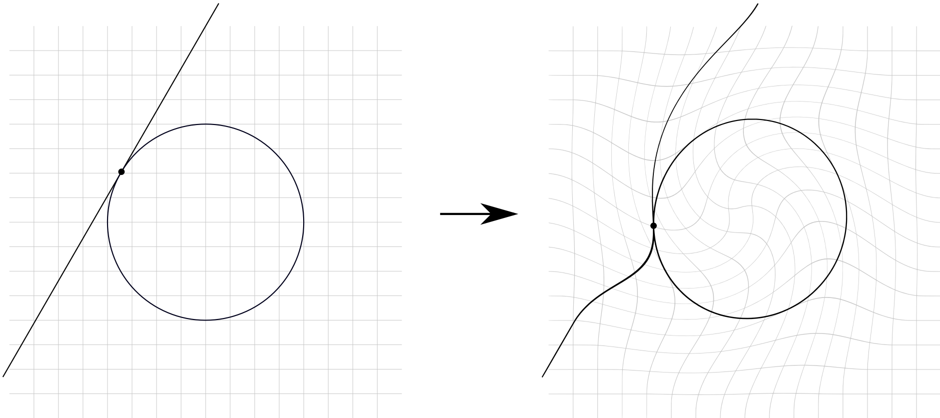
Pro účely seriálu budeme zobrazení brát jako funkci, která každému bodu roviny přiřadí nějaký jiný bod roviny. Zobrazovaný bod, např. P, nazveme *vzorem* a bod, na který se vzor zobrazí, nazveme *obrazem*. Pokud nestanovíme jinak, obraz budeme značit stejně jako vzor, akorát s čárkou, tedy P'. Bod, pro nějž vzor splývá s obrazem ($P = P'$), se nazývá *pevným bodem* zobrazení.

Asi nejznámějšími geometrickými zobrazeními jsou tzv. shodná a podobná zobrazení. Mezi shodná zobrazení patří např. osová a středová souměrnost, otočení či posunutí. Příkladem podobného zobrazení pak může být třeba stejnolehlost či spirální podobnost[1]. Tato zobrazení nejsou předmětem našeho seriálu, ale jejich znalost se bude hodit. Proto pokud se o nich chceš dozvědět více nebo si je jen chceš připomenout, doporučujeme první díl seriálu na geometrická zobrazení.[2]

Prosté zobrazení

Pro seriál bude důležité vědět, co je to prosté zobrazení. Prostým nazveme každé zobrazení, které žádné dva body nezobrazí na tentýž obraz. Prostá se zdají být všechna „rozumná“ zobrazení. Příkladem zobrazení, které není prosté, by například mohla být projekce na přímku. V seriálu se zabýváme různými prostými zobrazeními roviny, nejprve tedy odvoďme, jaké vlastnosti získáme jen z prostoty daného zobrazení. Důležitou vlastností prostých zobrazení je, že „zachovávají tečny“. Mějme v rovině kružnici ω a přímku p, která je její tečnou a dotýká se jí v bodě X. Na tuto rovinu aplikujme nějaké prosté zobrazení. Pak ať už p' a ω' vypadají jakkoli, mají právě jeden společný bod, a to bod X' (viz obrázek). Žádný další vzniknout nemohl (díky tomu, že zobrazení je prosté) a X' na obou leží. I když to může znít jednoduše, je důležité na to nezapomenout, až někdy zmíníme, že zobrazení zachovává *tečnost*.

[1] Pokud nevíš, co je spirální podobnost, vůbec to nevadí. Pro pochopení seriálu to není potřeba.
[2] Nalezneš ho na stránce `http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf`.



Afinní zobrazení

Afinní zobrazení pro nás budou všechna prostá[3] zobrazení splňující:

- Každá přímka se zobrazí na přímku.
- Na každé přímce zachová poměry vzdáleností. Takže kdykoli A, B, C leží v přímce, tak $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$.
- Rovnoběžné přímky zobrazí na rovnoběžné přímky.

Třetí bod ve skutečnosti nepotřebujeme. Rovnoběžnost přímek p a q totiž umíme vyjádřit pomocí poměrů. Mějme libovolný bod X a libovolnou přímku r procházející bodem X, průsečíky r s přímkami p a q označme po řadě P, Q. Rozmysli si, že rovnoběžnost přímek p, q je ekvivalentní s podmínkou, že $\frac{|XP|}{|XQ|}$ je konstantní nezávisle na volbě přímky r.

Cvičení 1.

(i) Rozmysli si, že složení dvou afinních zobrazení je afinní.
(ii) Rozmysli si, že inverzní zobrazení k afinnímu zobrazení je afinní.[4]

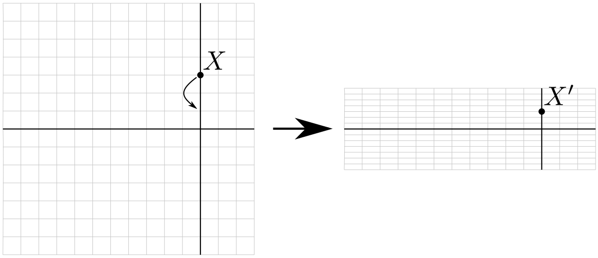
Nyní se podíváme na příklady afinních zobrazení. Všechna podobná zobrazení jsou afinní. Existují ale i afinní zobrazení, která nejsou podobná. Dvě taková si vytvoříme. U obou začneme s nějakou obecnou přímkou p, která zůstane zachována neboli všechny její body jsou pevné.

---

[3]V seriálu se budeme zabývat pouze prostými zobrazeními, obecně však afinní zobrazení prosté být nemusí.

[4]Zobrazení jsme si definovali jako funkci, která vzoru přiřadí jeho obraz. Pak na inverzní zobrazení se můžeme dívat jako na funkci, která naopak obrazu přiřadí jeho vzor. Takže například platí, že složení zobrazení a jeho inverzu je identita. Inverzní zobrazení existuje, protože uvažujeme pouze prostá zobrazení.

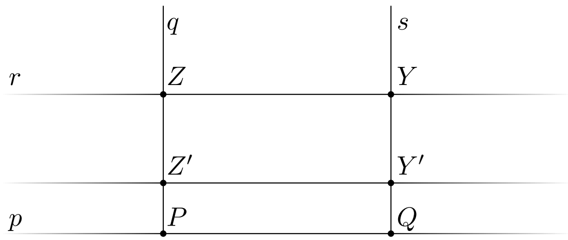
- **Zmáčknutí**: Vybereme si bod X mimo přímku p. Na **kolmici** na p procházející bodem X zvolíme obraz X' takový, že neleží na p. Pomocí vlastností, které se musí zachovat, zkonstruujeme obrazy všech bodů v rovině.



Uvažujme kolmici q na přímku p procházející bodem X. Označme P průsečík přímek p a q. Zvolme si libovolný bod Y na q. Zajímá nás, kde bude ležet Y'.

Pro přímku q' musí platit, že prochází X' a P'. Bod P se z definice zobrazí sám na sebe a X' leží na q. Tudíž body přímky q se opět zobrazí někam na q, speciálně na ní leží také Y'. Protože P se z definice zachová, bude shodné s P'. Chceme tedy, aby platilo $\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|P'X'|}{|P'Y'|} = \frac{|PX'|}{|PY'|}$. Na přímce q tedy zmáčknutí funguje stejně jako stejnolehlost se středem v P a koeficientem $\lambda = \frac{|PX|}{|PX'|}$.

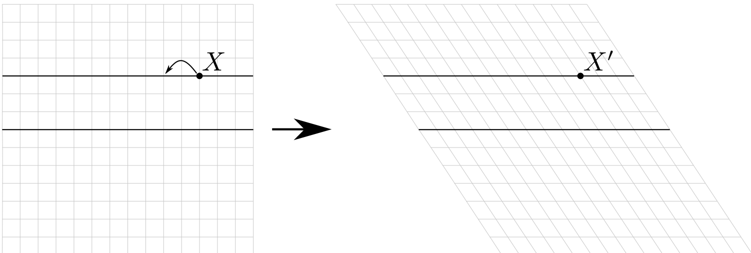
Vezměme libovolný bod Y, který neleží na přímce q. Dále uvažujme přímky s a r procházející bodem Y, kde $s \parallel q$ a $r \parallel p$. Označme Q průsečík přímek p, s a Z průsečík přímek r, q. Analogicky k předchozímu už víme, že bod Y' musí ležet na s. Rovnoběžnost se zachovává, tudíž obrazy přímek p a r musí být také rovnoběžné. Protože ale p' je totožná s p, r' musí být také rovnoběžná s p. Obraz bodu Z známe, je to bod na přímce q s tím „správným“ poměrem. Vedeme-li rovnoběžku s p bodem Z', její průsečík s s tak musí být právě Y'. Z rovnoběžnosti tedy platí $\frac{|PZ|}{|PZ'|} = \frac{|QY|}{|QY'|} = \lambda$.



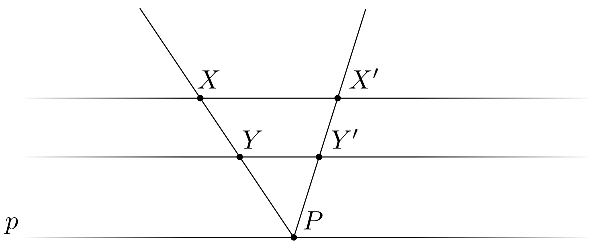
Z obou případů plyne, že pokud pro libovolný bod Y označíme P patu kolmice z Y na p, pak zmáčknutí zobrazí bod Y na jeho obraz v stejnolehlosti se středem v P a koeficientem λ. Dalo by se tedy říct, že zmáčknutí je taková „stejnolehlost podle přímky“.

Už víme, kam se v zmáčknutí zobrazí všechny body roviny. Musíme ale ještě ověřit, že se skutečně jedná o afinní zobrazení, tedy ověřit dané dvě (respektive tři) podmínky. Mějme libovolnou přímku q, která není rovnoběžná s p, a označme S průsečík přímek p, q. Nyní označme A, B libovolné body přímky q. Z výše uvedeného víme, že přímky AA' a BB' jsou rovnoběžné (obě jsou kolmé na p). To je ekvivalentní podmínce $\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SA'|}{|SB'|}$. Rozmysli si, že z toho plyne, že se už nutně všechny poměry na přímce q zachovávají a že to samé platí pro přímky rovnoběžné s p. Třetí podmínku jsme již dříve převedli na první, tedy stačí dokázat, že přímky se zobrazují na přímky. Toto tvrzení není zajímavé, a tak ho dokazovat nebudeme.

- **Zkosení**: Vybereme si bod X mimo přímku p. Na **rovnoběžce** s p procházející bodem X zvolíme X'. Opět se pokusíme zkonstruovat obrazy všech ostatních bodů roviny.



Zvolme libovolný bod Y a zkusme zjistit, kam se zobrazí Y'. Označme P průsečík přímek p a XY. Víme, že poměry se zachovávají, tedy $\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|PX'|}{|PY'|}$. Pokud tedy označíme $\lambda = \frac{|PX|}{|PX'|}$, pak Y' se zobrazí na přímku r tak, aby $\frac{|PY|}{|PY'|} = \lambda$. Můžeme si to tedy představit tak, jako bychom přímku PX otočili podle bodu P na přímku PX'. Pokud jsme tedy zmáčknutí nazvali stejnolehlostí podle přímky, pak by vhodný název pro zkosení nejspíš byl otočení podle přímky.[5,6] Ještě je potřeba podobně jako při zmáčknutí dokázat, že se při takovéto konstrukci obrazu libovolného bodu Y zachovávají rovnoběžky a poměry na přímkách. Rozmysli si, že tomu tak opravdu je. Důkaz je podobný jako při zmáčknutí.



[5]A složení zmáčknutí a zkosení by pak byla spirálka podle přímky. :D (Je to jen hloupý vtip, nic hlubšího v tom nehledej.)

[6]Každopádně se rozhodně nejedná o nějakou oficiální terminologii.

Pojďme si shrnout, jak se afinní zobrazení chová k útvarům v rovině. Obecné afinní zobrazení zachovává:

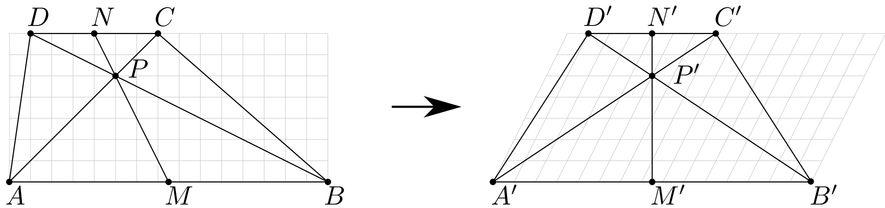
- přímky,
- rovnoběžnost,
- poměry na přímkách,
- poměry obsahů,
- elipsy. Dokonce existuje pro každou elipsu afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.

A nezachovává:

- kružnice,
- vzdálenosti,
- úhly.

Úloha 2. Mějme lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$. Označme P průsečík jeho úhlopříček. Dále M, N jsou postupně středy stran AB a CD. Dokaž, že M, N, P leží na jedné přímce.

Řešení. Označme jako q přímku spojující M a N. Uvážíme zkosení, které zachová přímku AB a zobrazí N na bod přímo nad M. To způsobí, že q' bude kolmá na $A'B'$ (a tedy i $C'D'$). Protože středy úseček se zachovávají, bude q' osou $A'B'$ i $C'D'$, takže celý obrázek bude symetrický podle q'. Speciálně to znamená, že P' musí ležet na q', tedy i P leží na q. □



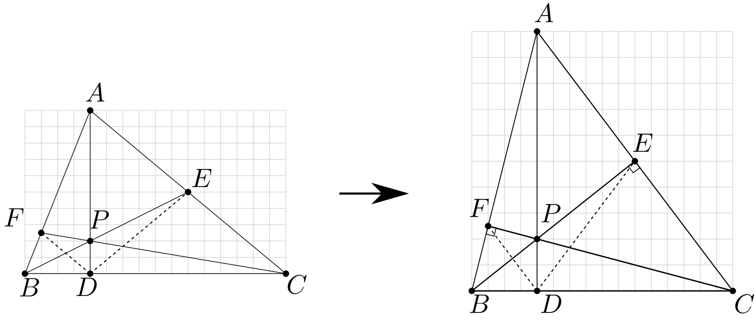
Poznámka. V mnoha úlohách aplikujeme zobrazení na celý obrázek, propříště nebudeme popisovat obrazy bodů čárkami.

Tvrzení 3. (Blanchet[7]) *V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD. Dokaž, že $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle FDA|$.*

Důkaz. Na první pohled to vypadá, že máme problém, protože úloha chce dokázat rovnost úhlů a afinní zobrazení úhly nezachovává. Tvrzení, které máme dokázat, si tedy přeformulujeme na: „přímky ED a FD jsou osově symetrické podle AD“. Jestliže zachováme přímku BC, můžeme uvážit jakékoli zmáčknutí a dostaneme

[7]Čti [Blančet].

ekvivalentní úlohu. Uvážíme tedy takové, že $|\sphericalangle BEC| = 90°$. Ukážeme si, že takové zmáčknutí určitě existuje. Sestrojíme si Thaletovu kružnici nad průměrem BC. Označme Y její průsečík s výškou z bodu E v trojúhelníku EBC. Pak uvažujme takové zmáčknutí, které zachovává přímku BC a bod E zobrazí na Y. Z Thaletovy věty máme zaručeno, že $|\sphericalangle BEC| = 90°$. Nyní protože AD i BE jsou výšky, tak i CF je výška. Stačí nám tedy dokázat toto tvrzení pro výšky. To už se lehce doúhlí. Čtyřúhelník $AEDB$ je díky pravým úhlům tětivový, tedy $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle ABE| = 90° - |\sphericalangle BAC|$. (Nebo $= |\sphericalangle BAC| - 90°$, pokud je u A tupý úhel.) Obdobně také čtyřúhelník $AFDC$ je tětivový, takže $|\sphericalangle FDA| = |\sphericalangle ACF| = 90° - |\sphericalangle BAC|$. (Nebo se rovná $|\sphericalangle BAC| - 90°$, pokud je u A tupý úhel.) Z čehož plyne $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle FDA|$ a důkaz je hotov. □



Cvičení 4.

(i) Rozmysli si, že pro každý trojúhelník existuje afinní zobrazení, které z něj vytvoří rovnostranný, a jak z toho plyne, že pro každý trojúhelník existuje afinní zobrazení, které ho zobrazí na jakýkoli jiný vybraný trojúhelník.

(ii) Dokaž pomocí afinních zobrazení, že se těžnice protínají v jednom bodě.

(iii) Je dána elipsa e se středem S. Na ní leží bod X. Označme t tečnu k elipse v bodě X. Rovnoběžka s t vedená bodem S protne elipsu v bodech A, B. Dokaž, že tečna k e v bodě A je rovnoběžná s XS.

Úloha 5. Elipsa vepsaná obdélníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA postupně v bodech X, V, W, Y . Dokaž, že $|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|$.

Úloha 6. Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD s pravým úhlem u ramena BC splňující $|AB| > |CD| > \frac{|AB|}{3}$. Středy úhlopříček AC, BD označíme postupně E, F. Nakonec průsečíky AF a BE, CF a DE označíme postupně X, Y. Který z čtyřúhelníků $ADXY$, $BCXY$ má větší obsah?

Definice. (obecná poloha) Body A, B, C jsou v *obecné poloze*, pokud žádné tři z nich neleží na přímce.

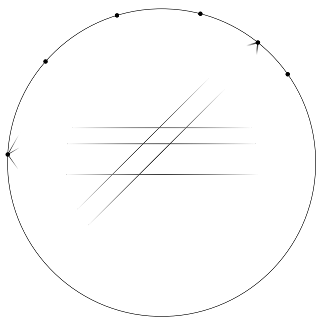
Poznámka. Všimni si, že z první části cvičení 4 plyne, že každé afinní zobrazení můžeme jednoznačně definovat pomocí tří bodů v obecné poloze a jejich obrazů.

Shrnutí

Zavedli jsme si afinní zobrazení. Afinními zobrazeními jsou pro nás všechna shodná a podobná zobrazení, mačkání, kosení a všechna složení těchto zobrazení.

Rozšíření roviny

V klasické rovině skoro platí, že každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě. Existuje však trochu hloupý, degenerovaný případ, kterým jsou rovnoběžky. Ty by se protly až někde v nekonečnu. Pro každý směr přímek proto dodáme k naší rovině *nevlastní bod*.[8] Když uvážíme a, b, c rovnoběžné přímky, tak všechny tři prochází stejným nevlastním bodem. I přesto, že přímky „jdou do nekonečna ve dvou směrech“, nevlastní bod protínají jen jeden. Tím jsme přidali „kolem“ roviny nekonečno nevlastních bodů. Řekneme, že všechny nevlastní body leží na jedné *nevlastní přímce*. Rozmysli si, že nyní se opravdu každé dvě přímky protínají v právě jednom bodě, a dokonce každými dvěma body prochází právě jedna přímka. Takto rozšířenou rovinu nazýváme *projektivní rovinou*. Všimni si, že afinní zobrazení fungují i v projektivní rovině.



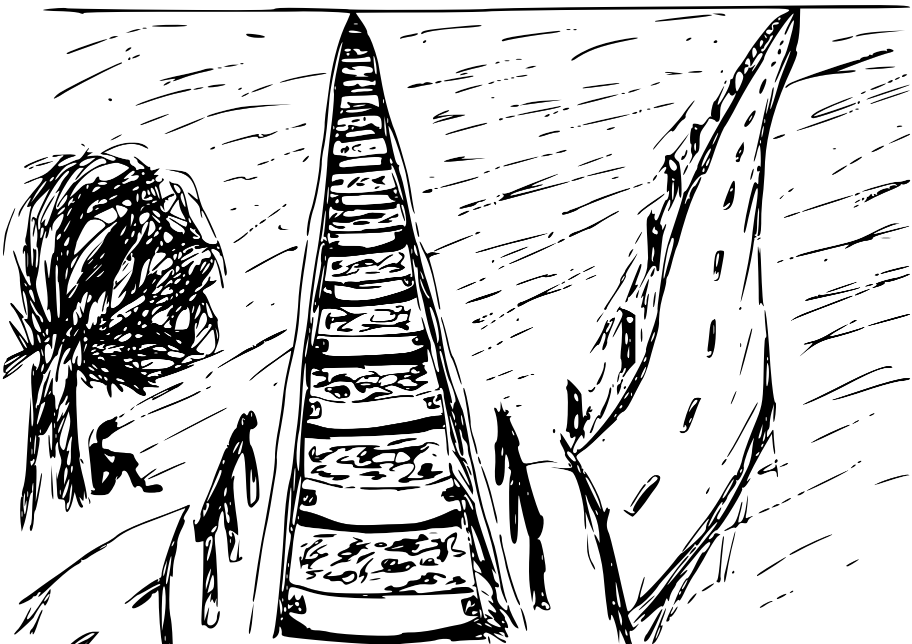
Obrázek naznačuje nevlastní přímku kolem celé roviny.

Cvičení 7. (body v nekonečnu) Cílem tohoto cvičení si je jen rozmyslet, jak fungují body na nevlastní přímce. Úkolem je tedy si jen tak nějak kreslit. Nebuď proto zmatený/zmatená, že se nejedná o úlohu v pravém slova smyslu. Zkonstruuj si v rovině čtverec $ABCD$. Označ X průsečík AB a CD. Na straně BC zvol bod P. Přímka PX protíná DA v Q. Označ R průsečík AC s nevlastní přímkou.

[8] *Nevlastní* znamená, že neleží v rovině, na kterou jsme zvyklí.

Perspektiva

Zatím jsme papír, na kterém máme nakreslenou konstrukci, jen různě mačkali. V této kapitole vyzkoušíme, jak se chová, když se na něj podíváme z různých bodů v prostoru. Znáš to, stojíš na dlouhé rovné cestě na rozlehlé planině. Její okraje tvoří dvě rovnoběžné přímky, ale když se podíváš do dáli, cesta mizí kdesi na horizontu, kde se její okraje „protínají“. Okraje jiné cesty, vedoucí trochu jiným směrem, se protínají na stejném horizontu, ale v jiném bodě.

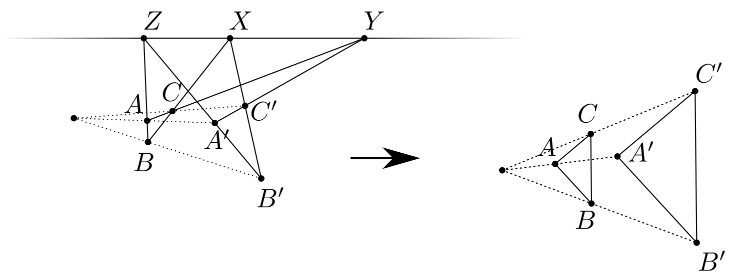


Pokusíme se tento fenomén využít v řešení úlohy. Vezmeme obrázek a zkusíme říct, že je to vlastně mnohem hezčí obrázek, na který se akorát někdo podíval „z boku“.

Věta 8. (Desargues[9]) *Mějme dva trojúhelníky v rovině – ABC a $A'B'C'$. Označme průsečíky $X = BC \cap B'C'$, $Y = CA \cap C'A'$ a $Z = AB \cap A'B'$. Pak pokud X, Y, Z leží na jedné přímce, tak přímky AA', BB', CC' prochází jedním bodem.*

[9] Čti [Dezark].

Důkaz. (náhledem) Představme si, že obrázek máme nakreslený na zemi a přímka procházející body X, Y, Z je horizontem. Pak to, co je nakreslené na zemi, jsou dva trojúhelníky, ve kterých $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. Každou tuto dvojici si můžeme představit znovu jako cesty a body X, Y, Z jsou jejich body na horizontu. Na zemi tedy mají trojúhelníky rovnoběžné odpovídající strany neboli jsou stejnolehlé. Přímky AA', BB', CC' prochází středem stejnolehlosti. (Ještě se může stát, že nepůjde o stejnolehlost, ale o posunutí. V tom případě se dané tři přímky protnou v jednom bodě až na nevlastní přímce.) □



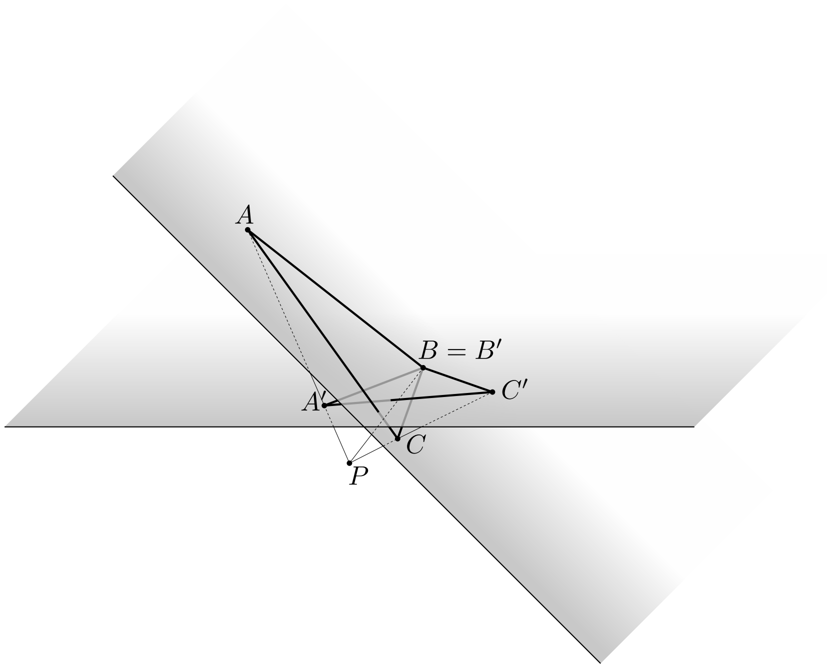
Může se zdát, že jsme úlohu nevyřešili pro všechny případy. Co když přímka XYZ prochází „středem“ obrázku? Přece běžně nad horizontem země není. Tedy podíváme-li se na rovinu „z boku“, nevidíme ji celou, protože nějaká její část je za námi.

Proto si zadefinujeme zobrazení, které tyto problémy vyřeší a přitom se bude velmi blížit právě onomu „podívání z boku“.

Perspektiva formálně

Využijeme ještě jedné představy ze života. Představ si, že před tebou je okno. Svůj pohled, jakým vidíš zem, můžeš nakreslit na okno tak, že na každý bod X na okně nakreslíš to, co je z tvého pohledu za ním. Tuto projekci z jedné roviny do druhé si definujeme pořádně.

Jak matematicky říct, co znamená dívat se na věc z jiného pohledu? Budeme používat klasickou souřadnicovou soustavu s osami x, y, z. Umístíme rozšířenou rovinu do rozšířeného trojrozměrného prostoru s počátkem P (to bude náš pozorovatel), a to tak, že obsahuje všechny body, pro které $z = 1$. Tuto rovinu v prostoru otočíme podle P. Následně promítneme zpět do roviny $z = 1$ skrz počátek (promítneme na okno). *Promítnutí* tady znamená, že bod X v prostoru se zobrazí na X' takový, že P, X, X' leží na přímce a z souřadnice bodu X' je rovna 1. Z konstrukce perspektivy si můžeme uvědomit, že perspektiva je zobrazením, které zachovává přímky a průsečíky.



Promítnutí trojúhelníka ABC z jedné roviny do druhé skrz bod P.

Všimněme si, že pro body prostoru, pro které $z = 0$, neexistuje v obyčejné rovině projekce do roviny $z = 1$. Proto se takové body zobrazí na nevlastní body v daném směru. Otočená rovina se protíná s rovinou $z = 0$ v jedné přímce. Tato přímka se v tomto zobrazení zobrazí na nevlastní. To je právě ta přímka, kterou jsme brali jako „horizont“.

Rozmysli si, že ta část obrázku, kterou nyní vidíme „nad horizontem“, je ta část roviny, kterou jsme vůbec neviděli, protože byla za námi. (v představě s oknem a zemí atd.)

Zformulujeme ještě jednou důkaz Desarguesovy věty, jak by měl být správně formálně sepsaný.

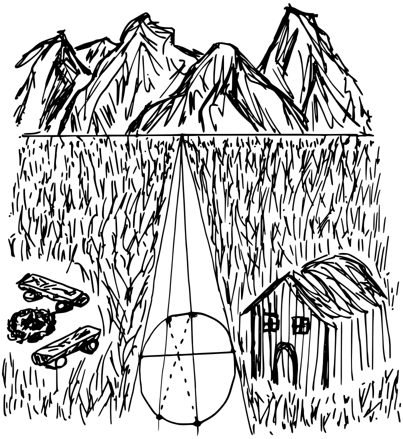
Důkaz. (Desargues podruhé – formální) Existuje perspektiva zobrazující přímku XYZ na nevlastní. Ta zachová všechny vlastnosti úlohy, protože se úloha zabývá pouze průsečíky přímek. Můžeme tedy říct, BÚNO[10] jsou body X, Y, Z nevlastní. Trojúhelníky potom mají po dvou rovnoběžné strany $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ a $CA \parallel C'A'$. Z toho plyne, že jsou stejnolehlé. Přímky AA', BB' a CC' prochází tedy jedním bodem, a to středem stejnolehlosti. (Nebo stejně jako v neformálním důkazu půjde o posunutí, tedy o stejnolehlost se středem v nevlastním bodě.) □

Perspektiva a kružnice

Představ si kružnici ω a přímku p mimo ni. Pak perspektiva, která zobrazuje přímku p na nevlastní, naši kružnici roztáhne do elipsy. Tuto elipsu pak můžeme pomocí afinního zobrazení „srovnat“ zpět do kružnice. Složením těchto zobrazení jsme získali nové zobrazení, které zobrazilo p na nevlastní a zachovalo jednu, námi vybranou, kružnici. Zachovali znamená, že jejím obrazem je znovu kružnice, ale nemusí platit, že body kružnice jsou pevnými body tohoto zobrazení. Ukážeme si sílu tohoto zobrazení na příkladu:

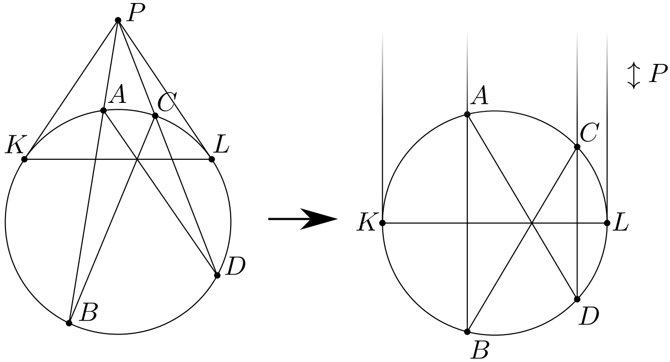
Příklad 9. (Radečkovo lemma) Mějme kružnici ω a bod P mimo ni. Body K, L leží na ω tak, že PK a PL jsou tečny k ω. Body A, B leží na ω tak, že A, B, P leží na jedné přímce a body C, D na ω tak, že P leží na přímce CD. Dokaž, že přímky AC, BD a KL prochází jedním bodem.

[10] Zkratka pro „bez újmy na obecnosti“.



Řešení. Uvažme rovnoběžku p s KL procházející bodem P. Použijme složení perspektivy a afinity takové, které zachová ω a přímku p zobrazí na nevlastní. Transformovaný obrázek pak bude vypadat následovně. Máme kružnici ω a v nekonečnu bod P. Body K, L leží na ω tak, že tečny k ω v K a L prochází bodem P, tudíž jsou rovnoběžné. KL je tedy průměrem kružnice ω. Přímka AB je také rovnoběžná s PK neboli musí být kolmá na KL. Takže body A a B jsou podle KL symetrické. Obdobně body C a D jsou podle KL symetrické, takže i přímky AC a BD jsou podle KL symetrické neboli se protínají na KL. □

V obrázku máme u nevlastního bodu P šipku nahoru i dolů. Je to tím, že body v nekonečnu jsou definované neorientovanými rovnoběžkami, takže ten bod „nahoře" je ten samý jako ten bod „dole".



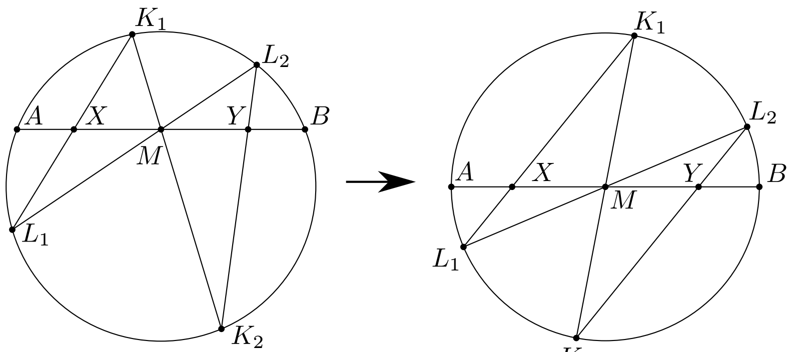
Zachováváme toho víc

Mějme kružnici ω a přímku p mimo ni.

- Označme q kolmici na p procházející středem ω. Pak tato konfigurace je podle q symetrická. Pokud zobrazíme p do nekonečna a ω zachováme, výsledek bude podle q' také symetrický. Pro důkaz si rozlož perspektivu na otočení v prostoru a projekci a uvědom si, že symetrie podle q je zachována.
- Na obecné rovnoběžce s p různé od p mějme dané body A, B, C. Pak perspektiva, která zobrazí p do nekonečna, zachová poměr $\frac{|AB|}{|BC|}$. Pro důkaz znovu rozlož na rotaci v prostoru a projekci a uvědom si, že na rovnoběžkách s p se projekce chová jako stejnolehlost neboli zachovává poměry.

Pojďme si nyní dokázat další úlohu:

Tvrzení 10. (butterfly) *Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB se středem M. Na ω zvolme body K_1, L_1. Označme K_2 průsečík K_1M s ω různý od K_1. Obdobně definujme bod L_2. Nechť $X = K_1L_1 \cap AB$ a $Y = K_2L_2 \cap AB$. Pak $|XM| = |YM|$.*



Důkaz. Označme R průsečík tečen k ω v bodech A, B. Uvažme přímku $p \parallel AB$ procházející bodem R, ta určitě neprotíná ω. Přímku p zobrazíme na nevlastní a ω zachováme. Pak se z AB stane průměr kružnice ω, protože tečny v A a B budou rovnoběžné. Poměry $\frac{|AM|}{|MB|}$ a $\frac{|XM|}{|YM|}$ jsme zachovali, protože $p \parallel AB$. Takže jsme získali ekvivalentní úlohu. Takto upravená úloha je již velmi snadná. □

Poznámka. Pojďme si uvědomit, co nám říká trik využitý v této úloze. Máme kružnici ω a na ní body A, B. Pak můžeme zobrazit AB na průměr ω a ω zachovat. Takové zobrazení zachovává poměry na rovnoběžkách s AB. I když to zní jako trochu podvod, můžeme říct, BÚNO je AB průměr.[11]

[11] Dokud si tedy dáváme pozor na to, že v úloze zachováme vše potřebné.

Těžko na cvičišti…

A nyní si můžeš nabyté znalosti vyzkoušet na následujících úlohách.

Úloha 11. Mějme body P, A, B na přímce v tomto pořadí. Označme p kolmici na tuto přímku vedenou bodem A. Dále mějme tečnu PX ke kružnici nad průměrem AB, kde X je bod dotyku (tečny jsou dvě, uvažujeme libovolnou z nich). Označíme Y jako průsečík BX a p. Dokaž, že PX půlí AY.

Úloha 12. Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC ($|AB| = |AC|$). Na jeho rameni AB zvolíme bod X. Rovnoběžka s BC vedená bodem X protne AC v Y. Označíme S střed XY a M střed BC. Nechť P je průsečík MX a CS. Dokaž, že trojúhelník PMC má poloviční obsah než ABC.

Úloha 13. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označíme si body dotyku kružnice vepsané po řadě K, L, M, N. Dokaž, že přímky KM, LN, AC, BD se protínají v jednom bodě.

Úloha 14. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označme body dotyku kružnice vepsané ke stranám AB, BC, CD, DA postupně W, X, Y, Z. Dokaž, že přímky AC, WX, YZ prochází jedním bodem.

Úloha 15. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω. Označme D bod dotyku kružnice připsané ke straně BC. Na přímce AD zvolme bod X tak, aby úsečka XD neobsahovala žádný bod ω. Tečny z X k ω protnou stranu BC v bodech K, L. Dokaž, že $|BK| = |CL|$. (Iksko 2018/19)

Úloha 16. Máme danou půlkružnici nad průměrem UV. Na této půlkružnici zvolíme body P, Q. Průsečík tečen z P a Q označíme R. Průsečík UP a VQ označíme S. Dokaž, že $SR \perp UV$.

Úloha 17. V trojúhelníku ABC označme body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB postupně D, E, F. Na úsečce AD uvnitř kružnice vepsané zvolme bod L. Úsečky BL a CL protnou kružnici vepsanou postupně v bodech X, Y. Dokaž, že přímky EF, BC, XY prochází jedním bodem.

Úloha 18. Bod M je středem strany AB trojúhelníka ABC. Na polopřímce opačné k MC zvolíme bod N a uvnitř úsečky AM zvolíme bod P. Označíme Q průsečík přímek AC a NP, dále R průsečík QM a NB a nakonec S průsečík AB a RC. Dokaž $|PM| = |SM|$.

Úloha 19. Mějme trojúhelník ABC. Označme A' bod dotyku vepsané u strany BC. Druhý průsečík přímky AA' s vepsanou označme P. Průsečíky BP a CP s vepsanou označme postupně M, N. Dokaž, že BN, MC, AA' prochází jedním bodem.

Úloha 20. V trojúhelníku ABC označme M střed BC. Přímka AM protíná kružnici vepsanou v bodech P, Q. Rovnoběžky s BC procházející body P, resp. Q protínají znovu kružnici vepsanou v X, resp. Y. Přímky AX, AY protínají BC v K, L. Dokaž, že $|BK| = |CL|$.

Úloha 21. Mějme pevnou úsečku AC a na ní bod B. Skrz body AC vedeme kružnici ω. Tečny k ω v bodech A a C se protínají v P. Úsečka PB protne kružnici podruhé v Q (B leží na úsečce PQ), osa úhlu AQC protne AC v R. Dokaž, že poměr $\frac{|AR|}{|RC|}$ nezávisí na volbě kružnice ω. (IMO Shortlist 2003/G2)

Úloha 22. Mějme čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD| = 90°$. Bod P leží na BD tak, že $|\sphericalangle PAD| = 90°$ a obdobně Q leží na AC tak, že $|\sphericalangle QDA| = 90°$. AC a BD se protínají v bodě X a PC a BQ se protínají v Y. Ukaž, že XY je kolmá na AD.

Dvojpoměry[12] aneb měříme v projektivním světě

Dvojpoměry pro nás budou velmi důležitým nástrojem v celém seriálu. Potřebujeme si totiž zadefinovat vlastnost, kterou kolineace zachová, protože vzdálenosti a poměry se kolineací mění.

Definice 23. (orientovaný obsah) Symbolem $[ABC]$ budeme značit orientovaný obsah trojúhelníku ABC. V absolutní hodnotě bude $[ABC]$ mít velikost obsahu trojúhelníku ABC, může se ale lišit znaménkem. To znamená, že pokud jsou body v pořadí po směru hodinových ručiček, bude hodnota orientovaného obsahu záporná, jinak bude kladná.[13]

Tvrzení 24. (pomocné) *Pokud v trojúhelníku jeden bod posuneme po straně tak, že (orientovaná) délka příslušné strany se změní na k-násobek, potom se i orientovaný obsah trojúhelníku změní na k-násobek.*

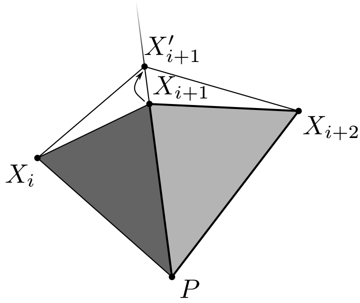
Pokusíme se vymyslet nějaký výraz, který každé n-tici přímek přiřadí nějaké reálné číslo. Mějme rovinu a v ní libovolný bod P. Dále v ní leží n bodů různých od P, kde n je sudé číslo. Označíme je $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Podíváme se na obsahy trojúhelníků $X_iX_{i+1}P$, přičemž za X_{n+1} uvažujeme X_1 a za X_{n+2} bod X_2. Těch je sudý počet. Obarvíme každý se sudým i červeně a každý s lichým i modře. Pak každý z bodů X_i náleží právě jednomu červenému a právě jednomu modrému trojúhelníku. Pokud nahradíme bod X_i jakýmkoli jiným bodem různým od P na přímce PX_i, tak se právě jednomu modrému trojúhelníku změní obsah k-krát (pro vhodné reálné k) a právě jednomu červenému trojúhelníku se změní obsah k-krát. Takže když nějaký výraz V obsahuje

$$\frac{[X_{i-1}PX_i]}{[X_iPX_{i+1}]},$$

[12] Bývají v literatuře občas zaměňovány s pojmem čtyřpoměry. Pro nás ale čtyřpoměry budou znamenat něco jiného.

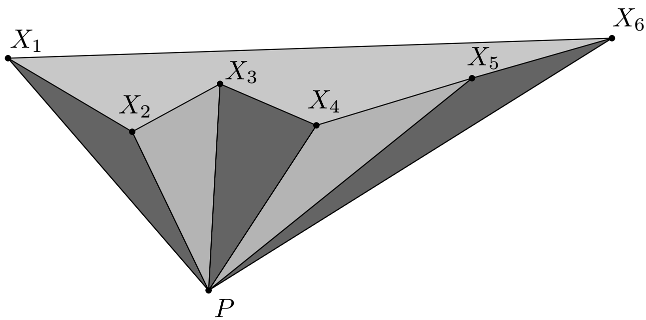
[13] Opravdu se standardně značí směr proti směru hodinových ručiček jako kladný.

tak se jeho hodnota nezmění, i když zaměníme bod X_i jiným bodem přímky X_iP.



Uvažme tedy výraz, kde v čitateli budou všechny červené trojúhelníky a ve jmenovateli všechny modré:

$$V = \frac{[X_1PX_2] \cdot [X_3PX_4] \cdots [X_{n-1}PX_n]}{[X_2PX_3] \cdot [X_4PX_5] \cdots [X_nPX_1]}.$$



Hodnota V se nezmění, pokud jakýkoliv X_i nahradíme jiným bodem na X_iP. Tuto hodnotu můžeme vnímat jako hodnotu přímek $X_1P, X_2P, \ldots, X_nP$. Neděs se téhle obludy, představuj si ji jako modré a červené trojúhelníky, jejichž obsahy střídavě násobíme a dělíme.

Zkusíme nyní najít dobrou hodnotu n, pro kterou bude tento výraz užitečný. Jako první se nabízí $n = 2$. Ale po dosazení dostáváme:

$$V = \frac{[X_1PX_2]}{[X_2PX_1]} = -1.$$

Takže hodnota V jakýchkoli dvou přímek by byla rovna -1. To není jako moc užitečný výraz. Zkusme tedy dalšího kandidáta, $n = 4$. Ta už takový problém nemá, a proto se jako nejmenší užitečná využívá. Tato hodnota se označuje *dvojpoměrem* daných čtyř přímek. Pro body A, B, C, D, P budeme dvojpoměr čtyř bodů v obecné poloze vzhledem k bodu P značit takto:

$$(A, B, C, D)_P = [APB] \cdot \frac{1}{[BPC]} \cdot [CPD] \cdot \frac{1}{[DPA]}.$$

Přímky PA, PB, PC, PD označíme a, b, c, d. Protože už víme, že tuto hodnotu můžeme vnímat jako hodnotu přímek procházejících jedním bodem, budeme také značit

$$(a, b, c, d) = (AP, BP, CP, DP) = (A, B, C, D)_P.$$

Hodnota dvojpoměru je závislá na pořadí, ale občas se permutace dají přepočítat.

Cvičení 25. Rozmysli si, že platí:

- $(a, b, c, d) = \dfrac{1}{(b, c, d, a)} = (c, d, a, b) = \dfrac{1}{(d, a, b, c)}$,
- $(a, b, c, d) = \dfrac{1}{(a, d, c, b)}$.

Pojďme si ukázat, proč takhle obludně definovaná hodnota je právě ta užitečná:

Uvažujme v rovině bod P. Dále v ní leží čtyři body A, B, C, D, které leží na jedné přímce neprocházející bodem P. Pak

$$(A, B, C, D)_P = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|}.$$

Délky potřebujeme uvažovat orientovaně, abychom dostali správné znaménko. Můžete si všimnout, že tenhle výraz vůbec nevyužívá bod P, budeme tedy symbolem (A, B, C, D) značit dvojpoměr čtyř bodů na jedné přímce.

Tvrzení 26. (promítací) *Mějme čtyři body na přímce A, B, C, D a čtyři body na jiné přímce X, Y, Z, W takovým způsobem, že přímky AX, BY, CZ, DW prochází jedním bodem P. Pak platí $(A, B, C, D) = (X, Y, Z, W)$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) = (A, B, C, D)_P = (AX, BY, CZ, DW) = \\ = (X, Y, Z, W)_P = (X, Y, Z, W).\end{aligned}$$ □

Abychom nemuseli vždy psát tuto promítací myšlenku, vysloužila si vlastní značení. Když platí $(A, B, C, D) = (X, Y, Z, W)$ při promítnutí skrz bod P, tak značíme

$$(A, B, C, D) \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} (X, Y, Z, W).$$

Cvičení 27. Mějme trojúhelník ABC a pevně dané body K, L na straně BC. Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímek AK, AL, AC s osou vnitřního úhlu u vrcholu B. Dokaž, že $(B, K, L, C) = (B, X, Y, Z)$.

Perspektiva zachovává dvojpoměry

Promítací tvrzení pro nás znamená, že jsme našli hodnotu, která se zachovává v perspektivě. Zopakujme si, jak jsme si perspektivu definovali. Nejdříve jsme rovinu otočili v prostoru, to dvojpoměry zachovává, a následně jsme ji promítli skrz počátek zpět do roviny $z = 1$. Představme si body A, B, C, D na přímce. Po otočení se zobrazí na body A_1, B_1, C_1, D_1 v prostoru. Prohlédneme si rovinu danou počátkem P a přímkou $A_1B_1C_1D_1$. V ní leží i finální obrazy této perspektivy. Z promítacího tvrzení plyne $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_1, B_1, C_1, D_1)_P = (A', B', C', D')_P = (A', B', C', D')$. Neboli celá perspektiva zachovala dvojpoměr (A, B, C, D).

Tvrzení 28. (zobecněný poměr?) *Pro A, B, C, D na přímce, kde D je nevlastní, platí:*

$$(A, B, C, D) = -\frac{|AB|}{|BC|}.$$

Důkaz. Zvolíme si mimo přímku $\overleftrightarrow{ABCD}$ bod P. Na přímce $p \parallel \overleftrightarrow{ABCD}$ procházející bodem P zvolíme vlastní bod D'. Pak

$$(A, B, C, D) = (A, B, C, D')_P = \frac{[APB]}{[BPC]} \cdot \frac{[CPD']}{[D'PA]}.$$

Trojúhelníky CPD' a $D'PA$ mají stejný obsah, protože mají stejnou základnu $D'P$ a stejnou výšku. Ale mají opačnou orientaci, takže $\frac{[CPD']}{[D'PA]} = -1$. Trojúhelníky ABP a BCP mají stejnou výšku neboli hodnota celkového dvojpoměru je rovna

$$-\frac{[APB]}{[BPC]} = -\frac{|AB|}{|BC|}.$$

□

Tvrzení 29. (dvojpoměry na kružnicích) *Mějme kružnici ω a na ní body A, B, C, D, P, Q. Pak $(A, B, C, D)_P = (A, B, C, D)_Q$.*

Důkaz. Hodnota $(A, B, C, D)_P$ je závislá jen na úhlech mezi přímkami PA, PB, PC, PD. Z obvodových úhlů jsou všechny tyto úhly stejné jako úhly mezi přímkami QA, QB, QC, QD, tedy hodnota $(A, B, C, D)_X$ je nezávislá na volbě X na ω. (Takto se nám můžou obvodové úhly změnit na doplňkové obvodové úhly. Rozmysli si, že to funguje i pro ně. Pokud $Q = A$, tak přímka QA degeneruje do tečny v bodě A, kde tak namísto obvodového úhlu dostaneme úhel úsekový.) Opět si rozmysli, že tvrzení pořád platí. Pro body A, B, C, D budeme pomocí (A, B, C, D) značit právě tuto hodnotu a z kontextu bude jasné, jestli se jedná o dvojpoměr na přímce nebo na kružnici. □

Důležitou vlastností dvojpoměrů, kterou budeme v seriálu využívat, je následující tvrzení:

Tvrzení 30. (jednoznačnost dvojpoměrů) *Pokud $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, tak platí $X = Y$.*

Důkaz. Z definice víme, že $(A, B, C, X) = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|}$. A obdobně také platí $(A, B, C, Y) = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|}$. Tedy platí

$$(A, B, C, X) = (A, B, C, Y) \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \Leftrightarrow \frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|CY|}{|YA|}.$$

Rozmysli si, že na přímce $\overleftrightarrow{ABCD}$ existují právě dva body takové, že poslední poměr je nějaké pevně dané číslo. Délky v poměrech ale uvažujeme orientovaně, což už nám dá jednoznačně jen jeden bod. □

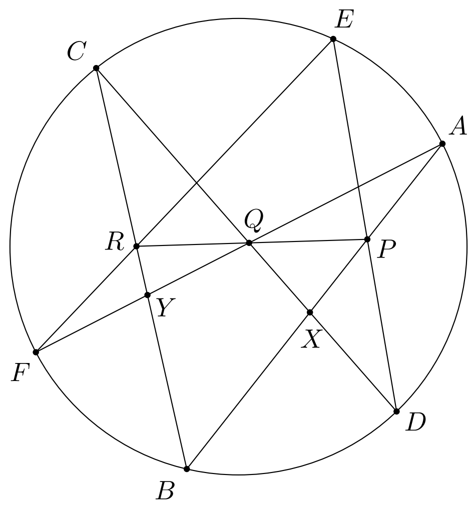
Pojďme si ukázat, jak dvojpoměry použít na pořádné úloze:

Věta 31. (Pascal) *Na kružnici ω máme body A, B, C, D, E, F. Označme body $P = BA \cap DE$, $Q = DC \cap FA$, $R = EF \cap BC$. Pak P, Q, R leží na jedné přímce.*

Důkaz. Označíme si $X = CD \cap AB$ a $Y = AF \cap BC$. Definujeme $R_1 = BC \cap PQ$. R_1 i R tedy leží na BC. Myšlenka důkazu bude taková, že zkusíme postupným promítáním ukázat, že $(B, Y, R_1, C) = (B, Y, R, C)$. Z jednoznačnosti dvojpoměrů to pak bude znamenat, že $R_1 = R$, tedy přímky BC, RE, PQ prochází jedním bodem, tudíž P, Q, R leží na přímce. Použijeme tato promítání:

$$(B, Y, R_1, C) \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} (B, A, P, X) \overset{D}{\underset{\wedge}{=}} (B, A, E, C) \overset{F}{\underset{\wedge}{=}} (B, Y, R, C),$$

čímž je důkaz dokončen. □



Úloha 32. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω a libovolný bod M. Dále nechť přímka skrz M protíná CB, CA, AB postupně v bodech A_1, B_1, C_1. Přímky AM, BM, CM protínají ω postupně v bodech A_2, B_2, C_2. Dokaž, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 se protínají na ω.

Úloha 33. (Pappus) Mějme dané přímky p a q. Na p jsou po řadě body A_1, B_1, C_1 a na q jsou po řadě body A_2, B_2, C_2. Dokaž, že průsečíky X, Y, Z postupně dvojic přímek A_1B_2 a B_1A_2, A_1C_2 a C_1A_2, B_1C_2 a C_1B_2, leží na jedné přímce.

Úloha 34. (těžká) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme M_1 bod na straně AB. Nechť M_2 je projekce bodu M_1 skrz D na přímku BC. Dále označme M_3 projekci M_2 skrz A na CD. M_4 projekci M_3 z B na DA. M_5 projekci M_4 z C na AB. Takto pokračujeme, až dostaneme M_{13}. Dokaž, že $M_{13} = M_1$.

Obecná kolineace

Často se hodí afinní zobrazení a perspektivu mezi sebou různě skládat. Abychom nemuseli vždycky psát, jaká všechna zobrazení skládáme, bude pro nás *kolineace* univerzálním zobrazením, do kterého spadají všechna složení perspektivních a afinních zobrazení.

Řekneme, že kolineace je jakékoli zobrazení projektivní roviny, které

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry.

Znovu se jedná o vlastnost některých zobrazení, tedy složení dvou takových zobrazení a jeho inverz zachovávají danou vlastnost. Takže složení dvou kolineací a inverzní zobrazení ke kolineaci je zase kolineací. Všechny perspektivy jsou kolineace i všechna afinní zobrazení jsou kolineace. Proto zobrazení, které jsme zmínili v tvrzení Perspektiva a kružnice, je také kolineace.

Tvrzení 35. (kolineace a dvojpoměrové svazky) *Mějme přímky a, b, c, d procházející jedním bodem P. Uvažme nějakou kolineaci zobrazující $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$, $d \to d'$. Pak*

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

Důkaz. Myšlenka v důkaze je definovat dvojpoměry svazků pomocí dvojpoměrů bodů, které se z definice zachovají. Uvažme přímku protínající a, b, c, d postupně v bodech A, B, C, D. Pak platí

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) = (A, B, C, D)_P = (A, B, C, D) = (A', B', C', D') =\\ = (A', B', C', D')_{P'} = (a', b', c', d').\end{aligned}$$

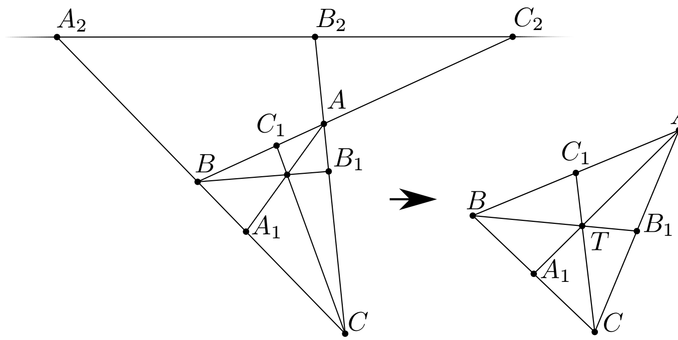
□

Tvrzení 36. (kolineace a dvojpoměry na kružnicích) *Mějme kružnici ω a na ní body A, B, C, D. Pak pokud kolineace zobrazí ω na kružnici, platí $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.*

Důkaz. Myšlenka důkazu je dvojpoměry na kružnicích definovat pomocí svazků, o kterých už víme, že se zachovají. Uvažme na ω bod P různý od A, B, C, D. Pak platí

$$(A,B,C,D) = (AP,BP,CP,DP) = (A'P',B'P',C'P',D'P') = \\ = (A',B',C',D'). \qquad \square$$

Úloha 37. Máme trojúhelník ABC. Na straně BC zvolíme body A_1 a A_2 tak, že $(B,A_1,C,A_2) = -1$. Obdobně zavedeme body B_1, B_2 a C_1, C_2. Předpokládejme, že A_2, B_2, C_2 leží na jedné přímce. Dokaž, že AA_1, BB_1, CC_1 prochází jedním bodem.



Řešení. V úloze se vyskytuje spousta podmínek s dvojpoměry, které působí na první pohled dost nepřístupně. Kdyby zmíněné dvojpoměry měly každý jeden bod v nekonečnu, úloha by se řešila lépe, přeci jen s poměry se lépe zachází. Pomocí kolineace si zobrazíme přímku $A_2B_2C_2$ na nevlastní. Nyní můžeme úlohu trochu přeformulovat: Máme trojúhelník ABC. Na straně BC zvolíme bod A_1 tak, že $(B,A_1,C,\infty) = -1$ neboli $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1$. To ale znamená, že A_1 je středem BC. Analogicky je B_1 střed AC a C_1 střed AB. Přímky AA_1, BB_1, CC_1 jsou těžnice v ABC, tudíž prochází jedním bodem. $\square$

Harmonické dvojpoměry

V předchozí úloze se vyskytovala hodnota dvojpoměru -1. Po srovnání jsme zjistili, že úzce souvisí se středem úsečky. Čtveřice bodů na přímce s hodnotou dvojpoměru rovnou -1 se v geometrii objevuje tak často, že si vysloužila speciální název. Říká se jí *harmonická* a v literatuře se vztah $(A,B,C,D) = -1$ často označuje $\mathcal{H}(A,B,C,D)$. Jak už ale víme, dvojpoměr je také vlastnost čtyř přímek. Obdobně tak čtyři přímky a, b, c a d procházející jedním bodem, pro které $(a,b,c,d) = -1$, budeme nazývat *harmonickým svazkem.* Vzpomeň si, jak jsme přepočítávali hodnoty dvojpoměrů podle pořadí bodů. Harmonické dvojpoměry mají tu vlastnost, že jsou harmonické nezávisle na protočení bodů:

$$-1 = (A, B, C, D) = (B, C, D, A).$$

Také nezávisí na směru čtení:

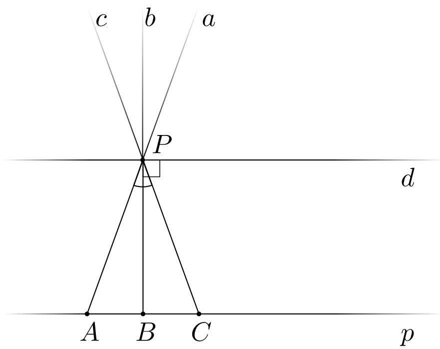
$$-1 = (A, B, C, D) = (D, C, B, A).$$

Harmonické čtveřice a svazky mají i spoustu dalších užitečných vlastností.

Tvrzení 38. (dvě ze tří) *Mějme čtyři přímky a, b, c a d procházející jedním bodem. Pak z libovolných dvou následujících tvrzení plyne tvrzení třetí:*

(i) *Přímka b je osou úhlu, který svírají přímky a a c.*
(ii) *Přímky b a d jsou na sebe kolmé.*
(iii) *Přímky a, b, c a d tvoří harmonický svazek.*

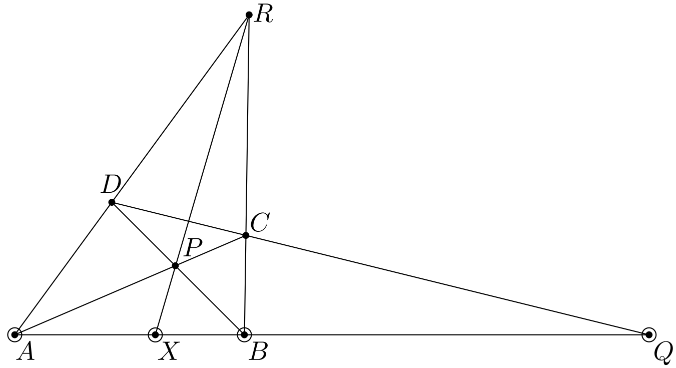
Důkaz. Dokážeme pouze, že z (i) a (ii) plyne (iii). Označme P průsečík všech čtyř přímek. Uvažujme přímku p rovnoběžnou s d, ta protne přímky a, b a c postupně v bodech A, B a C. Přímka b je v trojúhelníku PAC výškou i osou úhlu, tedy trojúhelník PAC je rovnoramenný. Bod B je tudíž středem strany AC. A nyní už ze známé konfigurace $(A, B, C, \infty) = -1$, takže přímky a, b, c a d tvoří harmonický svazek. □



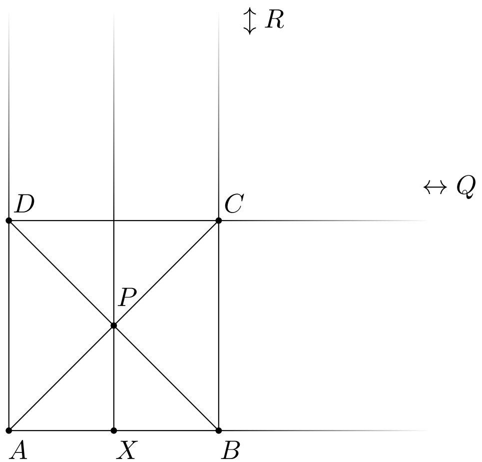
Cvičení 39. Dokaž zbývající dvě implikace tvrzení *dvě ze tří.*

Tvrzení 40. (Ceva[14]–Menelaus) *Mějme čtyřúhelník $ABCD$ a označme v něm $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$, $P = AC \cap BD$. Průsečík RP a AB označíme X. Potom platí $(A, X, B, Q) = -1$.*

[14]Čti [Čeva].



Důkaz. Uvažme kolineaci takovou, která zobrazí QR do nekonečna. BÚNO jsme tím dostali R, Q nevlastní. V takovém případě je $ABCD$ rovnoběžník. Uvážíme afinní zobrazení, které z něj vytvoří čtverec. Bod X pak ze symetrie leží ve středu AB. Takže $\mathcal{H}(A, X, B, Q)$. $\square$



Úloha 41. V trojúhelníku ABC leží na stranách BC, CA, AB postupně body A', B', C' tak, že AA', BB', CC' prochází jedním bodem. Nechť p je rovnoběžka k BC vedená bodem A. Přímka $A'B'$ protíná p v X. Přímka $A'C'$ protíná p v Y . Dokaž, že $|AX| = |AY|$.

Úloha 42. Dokaž tvrzení 3. (Blanchet) pomocí kolineace a dvojpoměrů.

Úloha 43. Nechť AD je výška v ostroúhlém trojúhelníku ABC. Dále P je libovolný bod na AD. Přímky BP a CP protínají AC a AB postupně v M, N. Přímka MN protíná AD v Q. Dále nechť F je libovolný bod na AC. Přímka FQ protíná CN v E. Dokaž, že $|\sphericalangle FDA| = |\sphericalangle EDA|$.

Úloha 44. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokaž, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC, leží na pevné kružnici (tzv. *Apoloniově kružnici*).

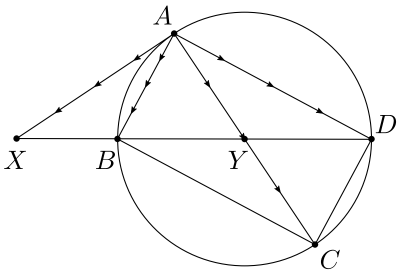
Úloha 45. Úhlopříčky AC, BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$, vepsaného do kružnice k se středem O, se protínají v $P \neq O$. Polopřímka OP protne k v X. Ukaž, že obraz přímky CA podle CX, obraz přímky DB podle DX a přímka OX procházejí jedním bodem.

Úloha 46. V trojúhelníku ABC jsou dány ceviány[15] AD, BE, CF, které se protínají v bodě K. Označme X průsečík FD a BK. Označíme P střed AK. A nakonec Y průsečík EP a AB. Dokaž, že $XY \parallel AD$.

Harmonické čtyřúhelníky

Obdobně jako je dvojpoměr na přímce harmonický, pokud $(A, B, C, D) = -1$, budeme říkat, že je dvojpoměr na kružnici harmonický, pokud $(A, B, C, D) = -1$. Tím získáváme definici velmi zajímavého geometrického objektu, harmonických čtyřúhelníků. Pojďme si rozmyslet vlastnosti, které mají.

Tvrzení 47. (o obdélnících) *Jediným harmonickým obdélníkem*[16] *je čtverec.*



Důkaz. Mějme obdélník $ABCD$ s kružnicí opsanou ω. Označme p přímku BD a X průsečík tečny k ω v bodě A s přímkou p. Dále nechť Y je průsečík AC a BD. Pak

$$(A, B, C, D) \underset{\wedge}{\overset{A}{=}} (X, B, Y, D).$$

Ale Y je středem BD, takže (X, B, Y, D) je harmonická právě tehdy, když X je nevlastní. To platí právě tehdy, když tečna k ω v bodě A je rovnoběžná s BD, což je právě tehdy, když je $ABCD$ čtverec. □

Tvrzení 48. (o deltoidech[17]) *Všechny tětivové deltoidy jsou harmonické.*

[15]Ceviány v trojúhelníku jsou tři přímky, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníka a protínají se v jednom bodě.

[16]Čtverec bereme jako speciální případ obdélníka.

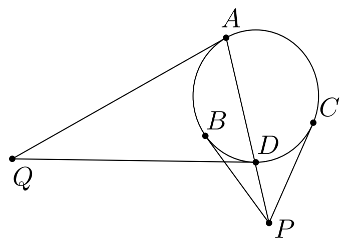
[17]Deltoid je konvexní čtyřúhelník osově souměrný podle jedné z úhlopříček.

Důkaz. (kolineací) Vzpomeň si, že kolineace zachovávala dvojpoměry na kružnicích. Mějme tětivový deltoid $ABCD$, ve kterém AC je průměr kružnice opsané. Označme P průsečík tečen ke kružnici opsané v bodech B, D. Ze symetrie P leží na AC. Kolmici na AC procházející P označíme p. Uvažme kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici opsanou. Ta z BD vytvoří průměr kružnice opsané, který je kolmý na AC. Z $ABCD$ tím vznikl čtverec, o kterém víme, že je harmonický. □

Důkaz. (promítáním) Mějme tětivový deltoid $ABCD$, ve kterém AC je průměr kružnice opsané. Ten promítneme skrz bod A na přimku BD. Označme X střed BD a Y nevlastní bod přímky BD. Pak

$$(A, B, C, D) \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} (Y, B, X, C) = -1.$$ □

Příklad 49. Máme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Tečny k ω v bodech B a C se protínají v bodě P. Druhý průsečík AP s ω označme D. Pak (A, B, C, D) je harmonický.

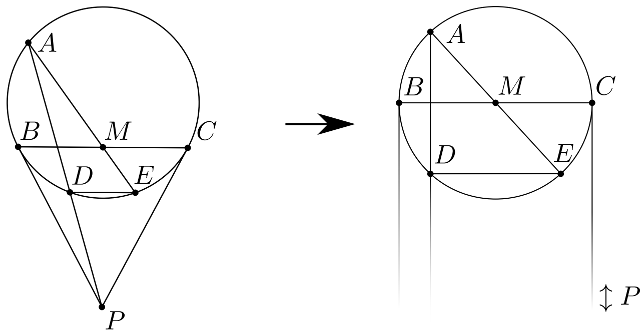


Řešení. Označme Q průsečík tečen k ω v bodech A a D. Uvažme kolineaci, která zobrazí PQ na nevlastní a ω na kružnici. Tím dostaneme nějakou kružnici ω, na ní v bodech B a C rovnoběžné tečny a v bodech A a D rovnoběžné tečny neboli BC i AD jsou průměry ω. Ale zároveň AD je rovnoběžné s PB, tudíž kolmé na BC. Takže $PB \perp QD$. Z toho plyne, že $ABCD$ musí být čtverec, tedy je harmonický. □

Poznámka. Nezvykej si moc, že vždycky můžeš takovou kolineaci uvážit. Dobře si proto rozmysli, že daná přímka nikdy neprotíná kružnici, kterou chceš zachovat. Když Ti to není jasné, zkus kolineovat pomalu. Nejdřív jeden bod a až pak i ten druhý. Často to může zjednodušit argumentaci, proč se opravdu nikdy neprotínají.

Poznámka. Přímka AD, která se v předchozí úloze objevila, má v geometrii dokonce vlastní název. Říká se jí *symediána* bodu A vzhledem k ABC.

Tvrzení 50. (překlopená těžnice) *Symediána bodu A v trojúhelníku ABC je osově překlopená těžnice podle osy úhlu.*



Důkaz. Označme M střed BC, D průsečík A-symediány s kružnicí opsanou, P průsečík tečen z B a C ke kružnici opsané a nakonec E průsečík AM s kružnicí opsanou.

Tvrzení je ekvivalentní s $|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle DAC|$. Z obvodového úhlu to znamená, že je úloha ekvivalentní s tvrzením, že oblouky BE a CD mají stejnou velikost neboli $BC \parallel ED$.

Mějme rovnoběžku p s BC procházející bodem P. Uvážíme kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici opsanou. Ta zachová poměr $\frac{|BM|}{|MC|}$, tedy M bude stále středem BC. Z BC se stane průměr kružnice, takže z M se stane střed kružnice opsané. Přímka AP je teď kolmá na BC. Z Thaletovy věty je ED kolmé na AD neboli $BC \parallel ED$. □

Úloha 51. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P. Dokaž, že pokud je BP symediána v ABC, pak AP je symediána v ABD.

(Rumunsko TST 2006)

Úloha 52. Je dána kružnice ω a bod A mimo ni. Označme body dotyku tečen z A k ω postupně X, Y. Mějme na kružnici tětivu BC takovou, že A leží na přímce BC. Označme M střed BC. Dokaž, že $|\sphericalangle XMA| = |\sphericalangle YMA|$.

Úloha 53. Mějme kružnici k a bod P vně této kružnice. Z bodu P vedeme tečny PX a PY ke k. Na kratším oblouku XY zvolíme bod A. Přímka PA protne kružnici podruhé v bodě B. Označme M střed AB. Dokaž, že trojúhelníky BXM a YBM jsou podobné.

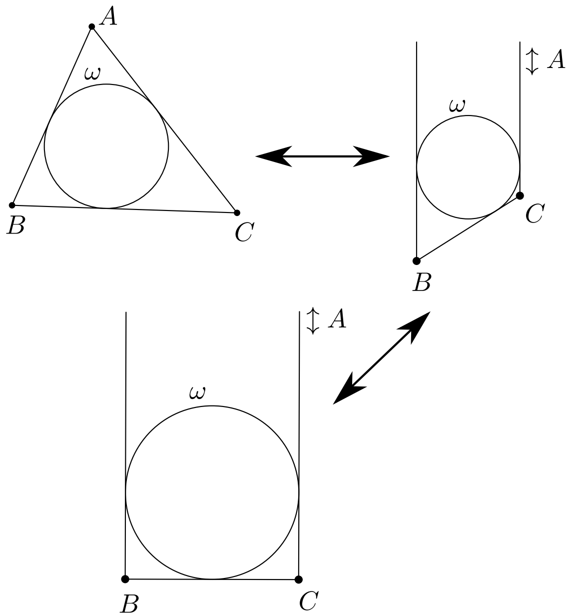
Co ještě umí kolineace

Tvrzení 54. (kolineace a čtyřúhelníky) *Ukážeme si, že pro body A, B, C, D v obecné poloze a body A', B', C', D' v obecné poloze existuje kolineace, která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $D \to D'$.*

Důkaz. Označme $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap DA$. Uvažme kolineaci, která zobrazí PQ na nevlastní přímku. Tahle kolineace zobrazí $ABCD$ na rovnoběžník. Pro každý rovnoběžník umíme najít afinní zobrazení, které z něj vytvoří čtverec. Neboli pro $ABCD$ existuje kolineace, která jej zobrazí na čtverec. Obdobně pro $A'B'C'D'$ existuje kolineace, která ho zobrazí na stejný čtverec. Inverzní kolineace k této je také kolineací, takže existuje kolineace, která čtverec zobrazí na $A'B'C'D'$. Takže složením kolineace, která zobrazí $ABCD$ na čtverec, a té, co zobrazí čtverec na $A'B'C'D'$, dostaneme hledané zobrazení. $\square$

Poznámka. Taková kolineace existuje právě jedna. Důkaz, který známe, je spíše pracný a nezajímavý, tak jej neuvádíme.

Tvrzení 55. (trojúhelník s kružnicí vepsanou) *Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a trojúhelník $A'B'C'$ s kružnicí vepsanou ω'. Pak existuje kolineace, která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ a $\omega \to \omega'$.*



Důkaz. Uvažme kolineaci, která zobrazí A do nekonečna a kružnici ω zobrazí na kružnici. Dostaneme tím přímky AB a AC rovnoběžné, mezi nimi vepsaná kružnice ω. Chtěli bychom, aby BC bylo kolmé na AB, ale to zatím nemusí. Uvažme body dotyku ω s AB a AC postupně D, E. Označme P průsečík DE a BC. Nakonec mějme přímku p rovnoběžnou s AB procházející bodem P. Uvážíme kolineaci, která p zobrazí na nevlastní a ω zobrazí na kružnici. Pak ze symetrie je BC kolmé na AB. Tím jsme nalezli kolineaci, která z obecného trojúhelníka ABC s kružnicí vepsanou vytvoří „trojúhelník“ s jedním nevlastním bodem a pravými úhly u zbylých vrcholů a ω zobrazí na kružnici. Neboli existuje i kolineace, která tenhle „trojúhelník“ převádí na obecný trojúhelník s kružnicí vepsanou. Složením těchto kolineací dostáváme kolineaci, která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ a $\omega \to \omega'$. $\square$

Poznámka. Pokud chceme zobrazit trojúhelník na rovnostranný a zachovat kružnici vepsanou, existuje jedna přímka, kterou můžeme zobrazit na nevlastní, a tím se z obecného trojúhelníka stane rovnostranný. Můžeš si zkusit rozmyslet, která to je.

Úloha 56. Máme trojúhelník ABC. Označme body dotyku kružnice vepsané ke stranám BC, AC, AB postupně X, Y, Z. Označme K, L, M průsečíky postupně AB a XZ, BC a ZY, CA a XY. Dokaž, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Zobecňování dvojpoměrů

Tahle kapitolka je pouze doplňující, její pochopení není nutné k pochopení zbytku seriálu, ani k řešení soutěžních úloh.

V kapitole o dvojpoměrech jsme si mohli vybrat jakýkoli sudý počet bodů a na nich definovat nějaký n-poměr. Zastavili jsme se u čtyř, ale co když pokračujeme dál. I vícepoměry se občas dají použít v důkazu. Ukážeme si, jak využít trojpoměr neboli vlastnost šesti bodů k nahlédnutí Cevovy věty.

Věta 57. (Ceva) *Mějme trojúhelník ABC. Na stranách BC, CA a AB zvolíme postupně body X, Y, Z tak, že přímky AX, BY, CZ prochází jedním bodem X. Pak*

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

Důkaz. Všimni si, že obdobně jako u dvojpoměru jsme se mohli zbavit pomocného bodu, pokud všechny ležely na přímce, tak u trojpoměru se můžeme pomocného bodu zbavit, když leží po třech na přímce. Neboli hodnota zmíněná v Cevově větě je vlastně trojpoměrem šesti bodů (A, Z, B, X, C, Y). Trojpoměr se podobně jako dvojpoměr zachovává pří promítání, takže můžeme na rovinu aplikovat jakoukoli perspektivu nebo afinní zobrazení a hodnotu trojpoměru nezměníme.

Vzpomeň si na tvrzení *kolineace a čtyřúhelníky.* Takové kolineace se dá dosáhnout využitím pouze perspektivy a afinních zobrazení, takže tahle kolineace zachovává trojpoměry[18]. Uvažme čtyřúhelník A, B, C, X. Podle tvrzení *kolineace a čtyřúhelníky* ho zobrazíme na rovnostranný trojúhelník ABC, kde X je jeho středem. V takovém případě Cevova věta zřejmě platí, takže platí vždycky. □

[18]Dokonce každá kolineace zachovává jakékoli n-poměry.

Shrnutí

Shrneme, co jsme si v prvním díle seriálu ukázali.

Afinní zobrazení:

(1) Zachovává přímky.
(2) Zachovává poměry na přímkách.
(3) Zachovává rovnoběžky.
(4) Elipsy zobrazuje na elipsy.
(5) Zachovává poměry obsahů.
(6) Pro každou elipsu existuje afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.
(7) Pro každé dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ existuje afinní zobrazení, které je na sebe převádí. (Existuje dokonce právě jedno.)
(8) Složení afinních zobrazení je afinní.
(9) Inverzní zobrazení k afinnímu je afinní.
(10) Příklady afinních zobrazení jsou: podobná zobrazení, zkosení, zmáčknutí.

Dvojpoměry

(1) Hodnotu čtyř bodů na přímce značíme (A, B, C, D), čtyř bodů vzhledem k pátému $(A, B, C, D)_P$, čtyř přímek procházejících jedním bodem (a, b, c, d) nebo čtyř bodů na kružnici (A, B, C, D).
(2) Dvojpoměry jsou měřícím nástrojem v projektivním světě, protože všechna projektivní zobrazení ho zachovají.
(3) Hodnotu $(A, B, C, D)_P$ spočítáme postupným násobením a dělením obsahů trojúhelníků.
(4) *Promítací tvrzení.*
(5) S jedním bodem nevlastním degeneruje do obyčejného poměru.
(6) Skrz bod na kružnici se dají promítat na kružnici.
(7) Jsou jednoznačné, neboli pokud $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, tak $X = Y$.

Kolineace

(1) Zachovává přímky.
(2) Zachovává dvojpoměry na přímce, dvojpoměrové svazky i dvojpoměry na kružnici.
(3) Kuželosečky zobrazuje na kuželosečky. Kuželosečky, které neprotínají nevlastní přímku, jsou elipsy. Kuželosečka, co se jí dotýkají, jsou paraboly, a ty, co ji protínají ve dvou bodech, jsou hyperboly.
(4) Pro každou přímku existuje kolineace, která ji zobrazí na nevlastní. (Je to perspektiva.)
(5) Pro každou kružnici a přímku, která ji neprotíná, existuje kolineace, která danou přímku zobrazí na nevlastní a kružnici zachová.

(6) Pro každý tečnový čtyřúhelník s kružnicí vepsanou existuje kolineace, která z něj vytvoří **kosočtverec** a zachová kružnici vepsanou.
(7) Pro každý tětivový čtyřúhelník s kružnicí opsanou existuje kolineace, která z něj vytvoří **obdélník** a zachová kružnici opsanou.
(8) Pro každé dva čtyřúhelníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ existuje kolineace, která je na sebe převádí.
(9) Pro každé dva trojúhelníky s kružnicí vepsanou ABC a $A'B'C'$ existuje kolineace, která je na sebe převádí a zachová kružnici vepsanou. Obdobně i s kružnicí opsanou.

Harmonické dvojpoměry

(1) Hodnota dvojpoměru je pro ně rovna -1.
(2) Čtveřice A, M, B, ∞ je harmonická, právě když M je střed AB.
(3) Tvrzení *Ceva-Menelaus* je známou harmonickou čtveřicí.
(4) Pro harmonické svazky platí tvrzení *dvě ze tří.*
(5) $\mathcal{H}(A, B, C, D) = \mathcal{H}(A, D, C, B) = \mathcal{H}(D, C, B, A)$.

Harmonické čtyřúhelníky

(1) Čtyři body na kružnici, jejichž dvojpoměr je roven -1.
(2) Z obdélníků je harmonický právě čtverec.
(3) Všechny deltoidy jsou harmonické.
(4) Označme X průsečík tečen ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodech B a C. Pak A-symediána v trojúhelníku ABC je přímka AX.
(5) Čtyřúhelník $ABCD$ je harmonický právě tehdy, když AD je symediána v ABC.

Pár slov závěrem

Gratulujeme, dočetl(a) jsi se až sem! V seriálu jsme si ukázali, jak matematicky popsat koukání se na obrázky z jiných úhlů a jak nám to může pomoct při řešení úloh. Začali jsme s afinními zobrazeními, která nás provázela po zbytek seriálu. Naučili jsme se perspektivu, kolineaci, dvojpoměry, a co to znamená, když jsou harmonické.

V dalším díle budeme pokračovat v naší cestě projektivní geometrií. Dozvíš se například, co znamená podivně znějící věta: „Polára bodu na poláře prochází pólem původní poláry.“, jak tyhle věci souvisí s komplexními čísly, a hlavně, co je to dualita. Dualita pro nás bude dokazovací nástroj podobně jako v tomto díle perspektiva či kolineace. Na rozdíl od nich se ale nebude na obrázek koukat jen z jiného úhlu pohledu, ale celkově nám obrázek úplně překreslí. Z přímek nám udělá body a z bodů zase přímky. Ale nemůžeme přece prozradit všechno, na víc se můžeš těšit v druhém díle.

Návody

6. Mají stejný. Rozmysli si, že afinní zobrazení zachovává poměry obsahů a zobraz na rovnoramenný.

11. Zobraz P na nevlastní tak, aby se zachoval poměr na přímce AY a kružnice.

12. Dokaž, že $PA \parallel BC$. Zobraz rovnoběžku s BC procházející bodem A na nevlastní a ukaž, že pak je P také nevlastní.

13. Zobraz $ABCD$ na kosočtverec a zachovej kružnici vepsanou.

14. Zobraz tak, aby se zachovala kružnice a získal jsi z $ABCD$ kosočtverec.

15. Nechť I je středem ω a E je bod dotyku ω se stranou BC. Zobraz EI a KL na rovnoběžky a zachovej poměry a kružnici.

16. Zobraz PQ a UV na rovnoběžné a zachovej kružnici. Rozmysli si, že pravý úhel mezi RS a UV se zachová, protože se zachovává symetrie podle UV.

17. Označ K průsečík $CB \cap EF$. Zobraz AK na nevlastní.

18. Zobraz C na nevlastní a zachovej poměry. Následně srovnej afinním zobrazením.

19. Pošli A na nevlastní.

20. Zachovej kružnici a zobraz A na nevlastní.

21. Ukaž, že umíš všechny povolené konstrukce na sebe převést nějakou kolineaci.

22. Dokresli Thaletovu kružnici nad AD. Zobraz BC a AD na rovnoběžky a zachovej tuhle kružnici.

32. Označ A_3 průsečík AA_2 s BC. Obdobně B_3 a C_3. Dokaž, že $(A_1, B, A_3, C) = (B_1, A, B_3, C)$. Promítni oba tyto dvojpoměry na čtyřúhelník $ABCX$, kde X je hledaným bodem na kružnici.

33. Označ $K = A_1C_2 \cap B_1A_2$ a $L = C_1A_2 \cap B_1C_2$. Zkus ukázat, že $(A_2, X, K, B_1) = (L, Z, C_2, B_1)$.

34. Označ X průsečík AB a CD. Dokaž, že $(X, A, M_1, B) = (X, A, M_13, B)$. Promítni (X, A, M_1, B) na BC skrz bod D. Následně na CD skrz bod A. Obdobně promítni dvanáctkrát.

41. Zobraz BC na nevlastní. Poměr $\frac{|AX|}{|AY|}$ se zachová.

42. Převeď pomocí tvrzení *dvě ze tří* na úlohu, co chce dokázat, že je nějaký svazek harmonický. Jakoukoli přímku zobraz na nevlastní a všímej si symetrií.

43. Převeď na podmínku, že je svazek harmonický. Zobraz BC na nevlastní a neboj se, že je nevlastní přímka součást harmonického svazku. Pokud čtyři přímky tvoří harmonický svazek, tak každou další přímku protnou v harmonickém svazku.

44. Dokresli čtvrtého do party k B, D, C a využij tvrzení „dvě ze tří“.

45. Protáhni polopřímku i na druhou stranu a použij „dvě ze tří“.

46. Využij promítací tvrzení z bodu Y. S jeho pomocí je úloha ekvivalentní s $\mathcal{H}(B, X, K, E)$. Teď už je úloha lehkou kořistí pro kolineaci.

51. Převeď na harmonický a využij symetrií harmonických čtveřic.

52. Promítni úhel na kružnici a převeď úlohu na tvrzení o rovnoběžnosti. Zobraz A na nevlastní.

53. Vyber si dvojici úhlů, o které chceš dokázat, že jsou stejné. Zobraz je na kružnici a převeď tím úhlovou podmínku na rovnoběžnost. Pak už můžeš použít kolineaci.

56. Zobraz pomocí tvrzení trojúhelník s kružnicí vepsanou ABC na rovnostranný.

56. Pomocí tvrzení trojúhelník s kružnicí vepsanou zobraz trojúhelník na rovnostranný.