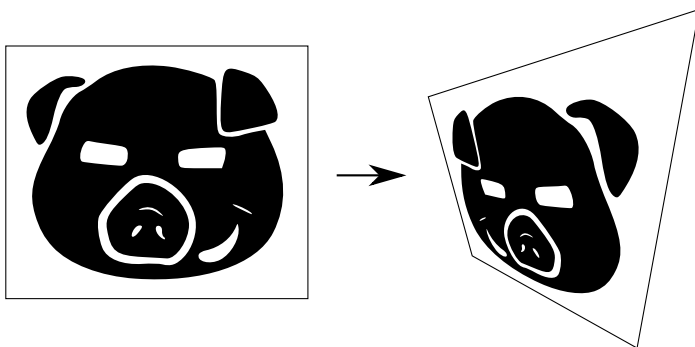


Projektivní geometrie I – Pravý úhel pohledu

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává první díl letošního seriálu, který se bude zabývat projektivní geometrií. Na geometrii se můžeme dívat jako na takové obrázky – různé přímky, kružnice, trojúhelníky nakreslené na papíře. Pod projektivní geometrií si můžeš prozatím představit dívání se na takové obrázky „z různých stran“. Ukážeme si, že zapeklitý problém je často těžký právě tím, že se na něj koukáme ze špatného úhlu pohledu. Pokud obrázek obejdeme, nakloníme hlavu nebo si vedle něj lehneme do trávy, pokaždé vypadá trochu jinak. A když se umíme na obrázky koukat z toho správného úhlu, rázem se z obecných trojúhelníků stávají rovnostranné, z čtyřúhelníků obdélníky, z obecných přímek rovnoběžky a podobně. Dokazovat tvrzení pro tyto objekty je pak často mnohem lehčí, než jak tomu bylo v původním zadání.



V seriálu si budeme kreslit spoustu obrázků, proto se neděs jeho délky. Z praktických důvodů nebudeme všechno dokazovat úplně do detailů a formálně, a tak něco necháme jen pro zájemce. Pokud Ti formální detaily neprijdou tak důležité, tak se s nimi nemusíš moc trápit :-). Seriál doplňují spíše lehčí *cvičení*, která by měla doprovázet nové věci představené v dané kapitole. Cvičení doporučujeme ře-

šit chronologicky při čtení. Na konci každé kapitoly najdeš úlohy. Ty můžou mít různé obtížnosti, od lehkých až po velmi těžké. Vůbec nevádí, pokud jich vyřešíš jen pár nebo některé přeskočíš, na konci textu jsou k dispozici nápovědy. Ke konci seriálu můžeš také najít bonusovou kapitolu Zobecňování dvojpoměrů. Ta je pouze doplňující a její pochopení není důležité ke zbytku seriálu ani k řešení soutěžních úloh.

Seriál pro tebe letos píše Radek Olšák a Lenka Kopfová. Kdybys měl(a) nějaké nejasnosti či otázky, neváhej se na nás obrátit. Můžeš nám například napsat mail na radek@olsak.net nebo na lenka.kopfova@gmail.com.

Zobrazení

Co to je zobrazení?

Pro účely seriálu budeme zobrazení brát jako funkci, která každému bodu roviny přiřadí nějaký jiný bod roviny. Zobrazovaný bod, např. P , nazveme *vzorem* a bod, na který se vzor zobrazí, nazveme *obrazem*. Pokud nestanovíme jinak, obraz budeme značit stejně jako vzor, akorát s čárkou, tedy P' . Bod, pro nějž vzor splývá s obrazem ($P = P'$), se nazývá *pevným bodem* zobrazení.

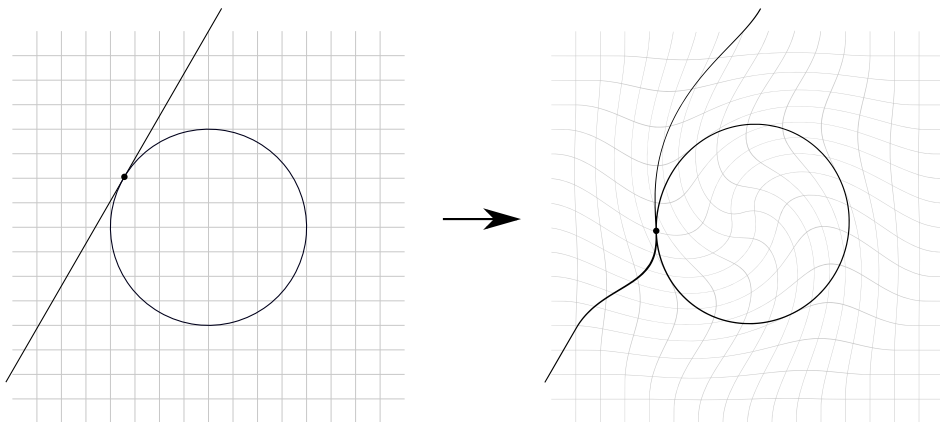
Asi nejznámějšími geometrickými zobrazeními jsou tzv. shodná a podobná zobrazení. Mezi shodná zobrazení patří např. osová a středová souměrnost, otočení či posunutí. Příkladem podobného zobrazení pak může být třeba stejnolehlost či spirální podobnost¹. Tato zobrazení nejsou předmětem našeho seriálu, ale jejich znalost se bude hodit. Proto pokud se o nich chceš dozvědět více nebo si je jen chceš připomenout, doporučujeme první díl seriálu na geometrická zobrazení.²

Prosté zobrazení

Pro seriál bude důležité vědět, co je to prosté zobrazení. Prostým nazveme každé zobrazení, které žádné dva body nezobrazí na tentýž obraz. Prostá se zdají být všechna „rozumná“ zobrazení. Příkladem zobrazení, které není prosté, by například mohla být projekce na přímku. V seriálu se zabýváme různými prostými zobrazeními roviny, nejprve tedy odvodíme, jaké vlastnosti získáme jen z prostoty daného zobrazení. Důležitou vlastností prostých zobrazení je, že „zachovávají tečny“. Mějme v rovině kružnici ω a přímku p , která je její tečnou a dotýká se jí v bodě X . Na tuto rovinu aplikujme nějaké prosté zobrazení. Pak ať už p' a ω' vypadají jakkoli, mají právě jeden společný bod, a to bod X' (viz obrázek). Žádný další vzniknout nemohl (díky tomu, že zobrazení je prosté) a X' na obou leží. I když to může znít jednoduše, je důležité na to nezapomenout, až někdy zmíníme, že zobrazení zachovává *tečnost*.

¹Pokud nevíš, co je spirální podobnost, vůbec to nevádí. Pro pochopení seriálu to není potřeba.

²Nalezneš ho na stránce <http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf>.



Afinní zobrazení

Afinní zobrazení pro nás budou všechna prostá³ zobrazení splňující:

- Každá přímka se zobrazí na přímku.
- Na každé přímce zachová poměry vzdáleností. Takže kdykoli A, B, C leží v přímce, tak $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$.
- Rovnoběžné přímky zobrazí na rovnoběžné přímky.

Třetí bod ve skutečnosti nepotřebujeme. Rovnoběžnost přímek p a q totiž umíme vyjádřit pomocí poměrů. Mějme libovolný bod X a libovolnou přímku r procházející bodem X , průsečíky r s přímkami p a q označme po řadě P, Q . Rozmysli si, že rovnoběžnost přímek p, q je ekvivalentní s podmínkou, že $\frac{|XP|}{|XQ|}$ je konstantní nezávisle na volbě přímky r .

Cvičení 1.

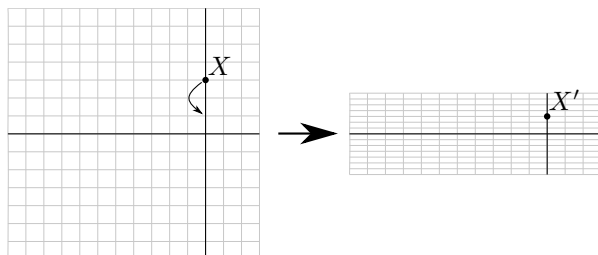
- Rozmysli si, že složení dvou afinních zobrazení je afinní.
- Rozmysli si, že inverzní zobrazení k afinnímu zobrazení je afinní.⁴

Nyní se podíváme na příklady afinních zobrazení. Všechna podobná zobrazení jsou afinní. Existují ale i afinní zobrazení, která nejsou podobná. Dvě taková si vytvoříme. U obou začneme s nějakou obecnou přímkou p , která zůstane zachována neboli všechny její body jsou pevné.

³V seriálu se budeme zabývat pouze prostými zobrazeními, obecně však afinní zobrazení prosté být nemusí.

⁴Zobrazení jsme si definovali jako funkci, která vzoru přiřadí jeho obraz. Pak na inverzní zobrazení se můžeme dívat jako na funkci, která naopak obrazu přiřadí jeho vzor. Takže například platí, že složení zobrazení a jeho inverzu je identita. Inverzní zobrazení existuje, protože uvažujeme pouze prostá zobrazení.

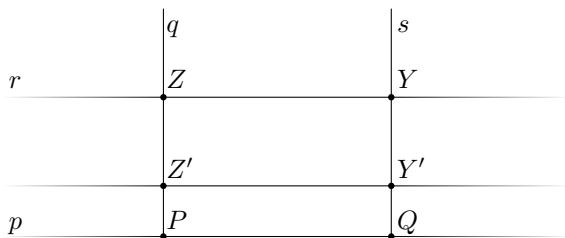
- **Zmáčknutí:** Vybereme si bod X mimo přímku p . Na **kolmici** na p procházející bodem X zvolíme obraz X' takový, že neleží na p . Pomocí vlastností, které se musí zachovat, zkonstruujeme obrazy všech bodů v rovině.



Uvažujme kolmici q na přímku p procházející bodem X . Označme P průsečík přímek p a q . Zvolme si libovolný bod Y na q . Zajímá nás, kde bude ležet Y' .

Pro přímku q' musí platit, že prochází X' a P' . Bod P se z definice zobrazí sám na sebe a X' leží na q . Tudíž body přímky q se opět zobrazí někam na q , speciálně na ní leží také Y' . Protože P se z definice zachová, bude shodné s P' . Chceme tedy, aby platilo $\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|P'X'|}{|P'Y'|} = \frac{|PX'|}{|PY'|}$. Na přímce q tedy zmáčknutí funguje stejně jako stejnoolehlost se středem v P a koeficientem $\lambda = \frac{|PX|}{|PX'|}$.

Vezměme libovolný bod Y , který neleží na přímce q . Dále uvažujme přímky s a r procházející bodem Y , kde $s \parallel q$ a $r \parallel p$. Označme Q průsečík přímek p , s a Z průsečík přímek r , q . Analogicky k předchozímu už víme, že bod Y' musí ležet na s . Rovnoběžnost se zachovává, tudíž obrazy přímek p a r musí být také rovnoběžné. Protože ale p' je totožná s p , r' musí být také rovnoběžná s p . Obraz bodu Z známe, je to bod na přímce q s tím „správným“ poměrem. Vedeme-li rovnoběžku s p bodem Z' , její průsečík s s tak musí být právě Y' . Z rovnoběžnosti tedy platí $\frac{|PZ|}{|PZ'|} = \frac{|QY|}{|QY'|} = \lambda$.

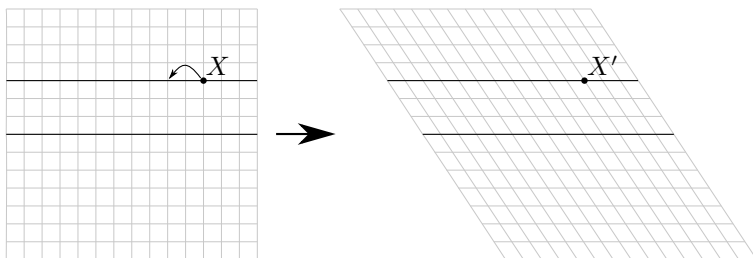


Z obou případů plyne, že pokud pro libovolný bod Y označíme P patu kolmice z Y na p , pak zmáčknutí zobrazí bod Y na jeho obraz v stejnoolehlosti se středem v P a koeficientem λ . Dalo by se tedy říct, že zmáčknutí je taková „stejnoolehlost podle přímky“.

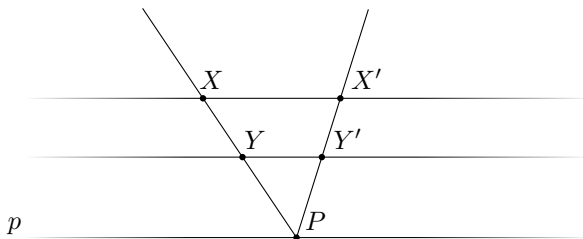
Už víme, kam se v zmáčknutí zobrazí všechny body roviny. Musíme ale ještě ověřit, že se skutečně jedná o afinní zobrazení, tedy ověřit dané dvě (respektive

tří) podmínky. Mějme libovolnou přímku q , která není rovnoběžná s p , a označme S průsečík přímek p , q . Nyní označme A , B libovolné body přímky q . Z výše uvedeného víme, že přímky AA' a BB' jsou rovnoběžné (obě jsou kolmé na p). To je ekvivalentní podmínce $\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SA'|}{|SB'|}$. Rozmysli si, že z toho plyne, že se už nutně všechny poměry na přímce q zachovávají a že to samé platí pro přímky rovnoběžné s p . Třetí podmínku jsme již dříve převedli na první, tedy stačí dokázat, že přímky se zobrazují na přímky. Toto tvrzení není zajímavé, a tak ho dokazovat nebudeme.

- **Zkosení:** Vybereme si bod X mimo přímku p . Na **rovnoběžce** s p procházející bodem X zvolíme X' . Opět se pokusíme zkonstruovat obrazy všech ostatních bodů roviny.



Zvolme libovolný bod Y a zkusme zjistit, kam se zobrazí Y' . Označme P průsečík přímek p a XY . Víme, že poměry se zachovávají, tedy $\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|PX'|}{|PY'|}$. Pokud tedy označíme $\lambda = \frac{|PX|}{|PY|}$, pak Y' se zobrazí na přímku r tak, aby $\frac{|PY|}{|PY'|} = \lambda$. Můžeme si to tedy představit tak, jako bychom přímku PX otočili podle bodu P na přímku PX' . Pokud jsme tedy zmáčknutí nazvali stejnolehlostí podle přímky, pak by vhodný název pro zkosení nejspíš byl otočení podle přímky.^{5,6} Ještě je potřeba podobně jako při zmáčknutí dokázat, že se při takovéto konstrukci obrazu libovolného bodu Y zachovávají rovnoběžky a poměry na přímkách. Rozmysli si, že tomu tak opravdu je. Důkaz je podobný jako při zmáčknutí.



⁵A složení zmáčknutí a zkosení by pak byla spirálka podle přímky. :D (Je to jen hloupý vtíp, nic hlubšího v tom nehledej.)

⁶Každopádně se rozhodně nejedná o nějakou oficiální terminologii.

Pojďme si shrnout, jak se afinní zobrazení chová k útvarům v rovině. Obecně afinní zobrazení zachovává:

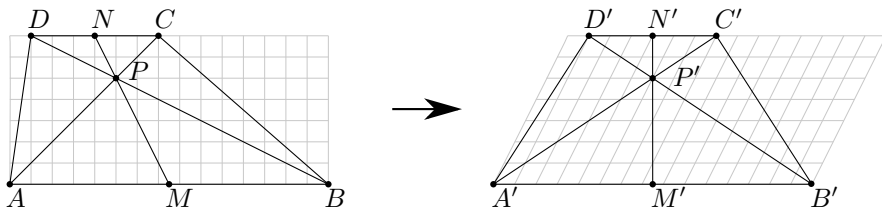
- přímky,
- rovnoběžnost,
- poměry na přímkách,
- poměry obsahů,
- elipsy. Dokonce existuje pro každou elipsu afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.

A nezachovává:

- kružnice,
- vzdálenosti,
- úhly.

Úloha 2. Mějme lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$. Označme P průsečík jeho úhlopříček. Dále M, N jsou postupně středy stran AB a CD . Dokaž, že M, N, P leží na jedné přímce.

Řešení. Označme jako q přímku spojující M a N . Uvážíme zkosení, které zachová přímku AB a zobrazí N na bod přímo nad M . To způsobí, že q' bude kolmá na $A'B'$ (a tedy i $C'D'$). Protože středy úseček se zachovávají, bude q' osou $A'B'$ i $C'D'$, takže celý obrázek bude symetrický podle q' . Speciálně to znamená, že P' musí ležet na q' , tedy i P leží na q . $\square$



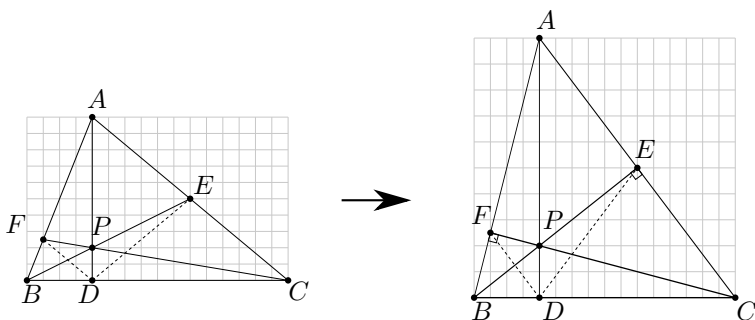
Poznámka. V mnoha úlohách aplikujeme zobrazení na celý obrázek, propříštíme nebudeme popisovat obrazy bodů čárkami.

Tvrzení 3. (Blanchet⁷) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A . Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD . Dokaž, že $|\angle EDA| = |\angle FDA|$.

Důkaz. Na první pohled to vypadá, že máme problém, protože úloha chce dokázat rovnost úhlů a afinní zobrazení úhly nezachovává. Tvrzení, které máme dokázat, si tedy přeformulujeme na: „přímky ED a FD jsou osově symetrické podle AD “. Jestliže zachováme přímku BC , můžeme uvážit jakékoli zmáčknutí a dostaneme

⁷Čti [Blančet].

ekvivalentní úlohu. Uvážíme tedy takové, že $|\angle BEC| = 90^\circ$. Ukážeme si, že takové zmáčknutí určitě existuje. Sestrojíme si Thaletovu kružnici nad průměrem BC . Označme Y její průsečík s výškou z bodu E v trojúhelníku EBC . Pak uvažujeme takové zmáčknutí, které zachovává přímku BC a bod E zobrazí na Y . Z Thaletovy věty máme zaručeno, že $|\angle BEC| = 90^\circ$. Nyní protože AD i BE jsou výšky, tak i CF je výška. Stačí nám tedy dokázat toto tvrzení pro výšky. To už se lehce doúhlí. Čtyřúhelník $AEDB$ je díky pravým úhlům tětíkový, tedy $|\angle EDA| = |\angle ABE| = 90^\circ - |\angle BAC|$. (Nebo $|\angle BAC| - 90^\circ$, pokud je u A tupý úhel.) Obdobně také čtyřúhelník $AFDC$ je tětíkový, takže $|\angle FDA| = |\angle ACF| = 90^\circ - |\angle BAC|$. (Nebo se rovná $|\angle BAC| - 90^\circ$, pokud je u A tupý úhel.) Z čehož plyne $|\angle EDA| = |\angle FDA|$ a důkaz je hotov. $\square$



Cvičení 4.

- Rozmysli si, že pro každý trojúhelník existuje afinní zobrazení, které z něj vytvoří rovnostranný, a jak z toho plyne, že pro každý trojúhelník existuje afinní zobrazení, které ho zobrazí na jakýkoli jiný vybraný trojúhelník.
- Dokaž pomocí afinních zobrazení, že se těžnice protínají v jednom bodě.
- Je dána elipsa e se středem S . Na ní leží bod X . Označme t tečnu k elipse v bodě X . Rovnoběžka s t vedená bodem S protne elipsu v bodech A, B . Dokaž, že tečna k e v bodě A je rovnoběžná s XS .

Úloha 5. Elipsa vepsaná obdélníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA postupně v bodech X, V, W, Y . Dokaž, že $|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|$.

Úloha 6. Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD s pravým úhlem u ramena BC splňující $|AB| > |CD| > \frac{|AB|}{3}$. Středů úhlopříček AC, BD označíme postupně E, F . Nakonec průsečíky AF a BE, CF a DE označíme postupně X, Y . Který z čtyřúhelníků $ADXY, BCXY$ má větší obsah?

Definice. (obecná poloha) Body A, B, C jsou v *obecné poloze*, pokud žádné tři z nich neleží na přímce.

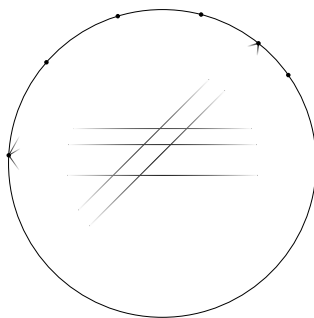
Poznámka. Všimni si, že z první části cvičení 4 plyne, že každé afinní zobrazení můžeme jednoznačně definovat pomocí tří bodů v obecné poloze a jejich obrazů.

Shrnutí

Zavedli jsme si afinní zobrazení. Afinními zobrazeními jsou pro nás všechna shodná a podobná zobrazení, mačkání, kosení a všechna složení těchto zobrazení.

Rozšíření roviny

V klasické rovině skoro platí, že každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě. Existuje však trochu hloupý, degenerovaný případ, kterým jsou rovnoběžky. Ty by se protly až někde v nekonečnu. Pro každý směr přímek proto dodáme k naší rovině *nevlastní bod*.⁸ Když uvažíme a, b, c rovnoběžné přímky, tak všechny tři prochází stejným nevlastním bodem. I přesto, že přímky „jdou do nekonečna ve dvou směrech“, nevlastní bod protínají jen jeden. Tím jsme přidali „kolem“ roviny nekonečno nevlastních bodů. Řekneme, že všechny nevlastní body leží na jedné *nevlastní přímce*. Rozmysli si, že nyní se opravdu každé dvě přímky protínají v právě jednom bodě, a dokonce každými dvěma body prochází právě jedna přímka. Takto rozšířenou rovinu nazýváme *projektivní rovinou*. Všimni si, že afinní zobrazení fungují i v projektivní rovině.



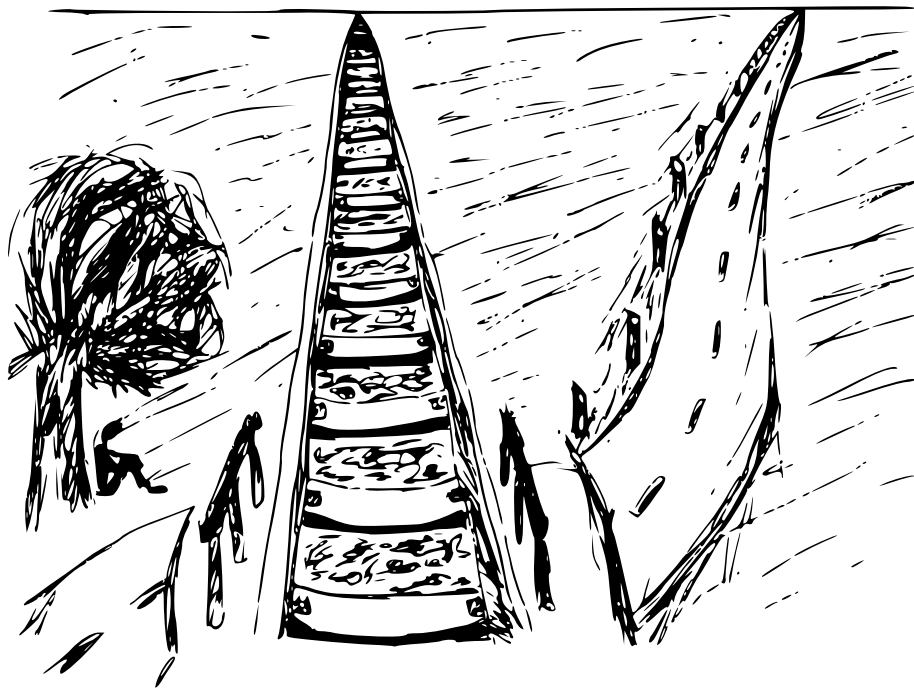
Obrázek naznačuje nevlastní přímku kolem celé roviny.

Cvičení 7. (body v nekonečnu) Cílem tohoto cvičení si je jen rozmyslet, jak fungují body na nevlastní přímce. Úkolem je tedy si jen tak nějak kreslit. Nebuď proto zmatený/zmatená, že se nejedná o úlohu v pravém slova smyslu. Zkonstruuj si v rovině čtverec $ABCD$. Označ X průsečík AB a CD . Na straně BC zvol bod P . Přímka PX protíná DA v Q . Označ R průsečík AC s nevlastní přímkou.

⁸ Nevlastní znamená, že neleží v rovině, na kterou jsme zvyklí.

Perspektiva

Zatím jsme papír, na kterém máme nakreslenou konstrukci, jen různě mačkali. V této kapitole vyzkoušíme, jak se chová, když se na něj podíváme z různých bodů v prostoru. Znáš to, stojíš na dlouhé rovné cestě na rozlehlé planině. Její okraje tvoří dvě rovnoběžné přímky, ale když se podíváš do dále, cesta mizí kdesi na horizontu, kde se její okraje „protínají“. Okraje jiné cesty, vedoucí trochu jiným směrem, se protínají na stejném horizontu, ale v jiném bodě.



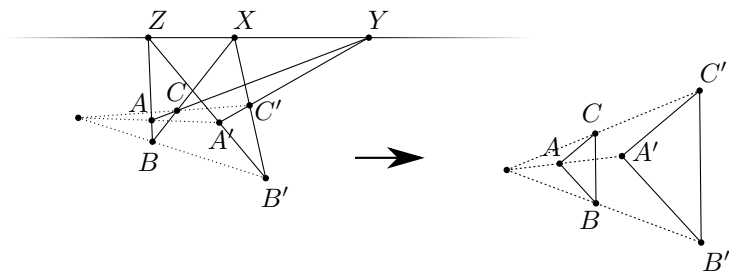
Pokusíme se tento fenomén využít v řešení úlohy. Vezmeme obrázek a zkusíme říct, že je to vlastně mnohem hezčí obrázek, na který se akorát někdo podíval „z boku“.

Věta 8. (Desargues⁹) Mějme dva trojúhelníky v rovině – ABC a $A'B'C'$. Označme průsečíky $X = BC \cap B'C'$, $Y = CA \cap C'A'$ a $Z = AB \cap A'B'$. Pak pokud X , Y , Z leží na jedné přímce, tak přímky AA' , BB' , CC' prochází jedním bodem.

⁹Čti [Dezark].



Důkaz. (náhledem) Představme si, že obrázek máme nakreslený na zemi a přímka procházející body X, Y, Z je horizontem. Pak to, co je nakreslené na zemi, jsou dva trojúhelníky, ve kterých $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. Každou tuto dvojici si můžeme představit znovu jako cesty a body X, Y, Z jsou jejich body na horizontu. Na zemi tedy mají trojúhelníky rovnoběžné odpovídající strany neboli jsou stejnohlé. Přímký AA', BB', CC' prochází středem stejnohllosti. (Ještě se může stát, že nepůjde o stejnohllost, ale o posunutí. V tom případě se dané tři přímky protnou v jednom bodě až na nevlastní přímce.) $\square$



Může se zdát, že jsme úlohu nevyřešili pro všechny případy. Co když přímka XYZ prochází „středem“ obrázku? Přece běžně nad horizontem země není. Tedy

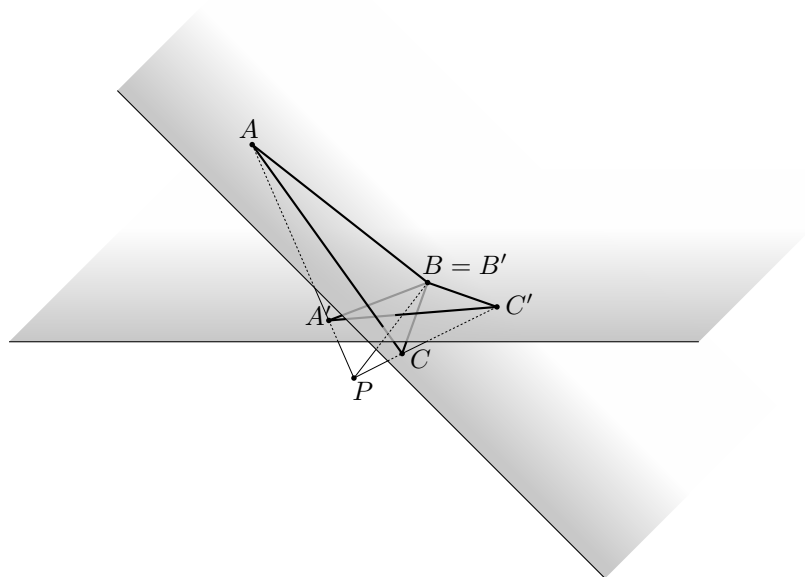
podíváme-li se na rovinu „z boku“, nevidíme ji celou, protože nějaká její část je za námi.

Proto si zadefinujeme zobrazení, které tyto problémy vyřeší a přitom se bude velmi blížit právě onomu „podívání z boku“.

Perspektiva formálně

Využijeme ještě jedné představy ze života. Představ si, že před tebou je okno. Svůj pohled, jakým vidíš zem, můžeš nakreslit na okno tak, že na každý bod X na okně nakreslíš to, co je z tvého pohledu za ním. Tuto projekci z jedné roviny do druhé si definujeme pořádně.

Jak matematicky říct, co znamená dívat se na věc z jiného pohledu? Budeme používat klasickou souřadnicovou soustavu s osami x, y, z . Umístíme rozšířenou rovinu do rozšířeného trojrozměrného prostoru s počátkem P (to bude náš pozorovatel), a to tak, že obsahuje všechny body, pro které $z = 1$. Tuto rovinu v prostoru otočíme podle P . Následně promítneme zpět do roviny $z = 1$ skrz počátek (promítneme na okno). *Promítnutí* tady znamená, že bod X v prostoru se zobrazí na X' takový, že P, X, X' leží na přímce a z souřadnice bodu X' je rovna 1. Z konstrukce perspektivy si můžeme uvědomit, že perspektiva je zobrazením, které zachovává přímky a průsečíky.



Promítnutí trojúhelníka ABC z jedné roviny do druhé skrz bod P .

Všimněme si, že pro body prostoru, pro které $z = 0$, neexistuje v obyčejné rovině projekce do roviny $z = 1$. Proto se takové body zobrazí na nevlastní body v daném směru. Otočená rovina se protíná s rovinou $z = 0$ v jedné přímce. Tato přímka se v tomto zobrazení zobrazí na nevlastní. To je právě ta přímka, kterou jsme brali jako „horizont“.

Rozmysli si, že ta část obrázku, kterou nyní vidíme „nad horizontem“, je ta část roviny, kterou jsme vůbec neviděli, protože byla za námi. (v představě s oknem a zemí atd.)

Zformulujeme ještě jednou důkaz Desarguesovy věty, jak by měl být správně formálně sepsaný.

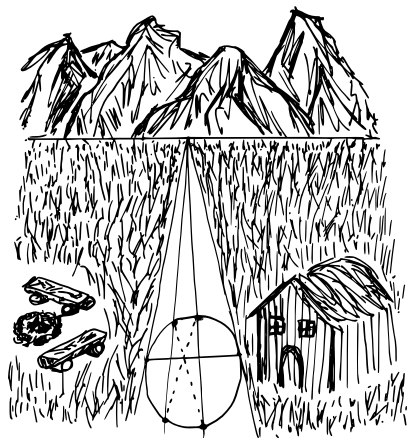
Důkaz. (Desargues podruhé – formální) Existuje perspektiva zobrazující přímku XYZ na nevlastní. Ta zachová všechny vlastnosti úlohy, protože se úloha zabývá pouze průsečíky přímek. Můžeme tedy říct, BÚNO¹⁰ jsou body X, Y, Z nevlastní. Trojúhelníky potom mají po dvou rovnoběžné strany $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$ a $CA \parallel C'A'$. Z toho plyne, že jsou stejnohlé. Přímký AA', BB' a CC' prochází tedy jedním bodem, a to středem stejnohlosti. (Nebo stejně jako v neformálním důkazu půjde o posunutí, tedy o stejnohlost se středem v nevlastním bodě.) $\square$

Perspektiva a kružnice

Představ si kružnici ω a přímku p mimo ni. Pak perspektiva, která zobrazuje přímku p na nevlastní, naši kružnici roztáhne do elipsy. Tuto elipsu pak můžeme pomocí afinního zobrazení „srovnat“ zpět do kružnice. Složením těchto zobrazení jsme získali nové zobrazení, které zobrazilo p na nevlastní a zachovalo jednu, námi vybranou, kružnici. Zachovali znamená, že jejím obrazem je znovu kružnice, ale nemusí platit, že body kružnice jsou pevnými body tohoto zobrazení. Ukážeme si sílu tohoto zobrazení na příkladu:

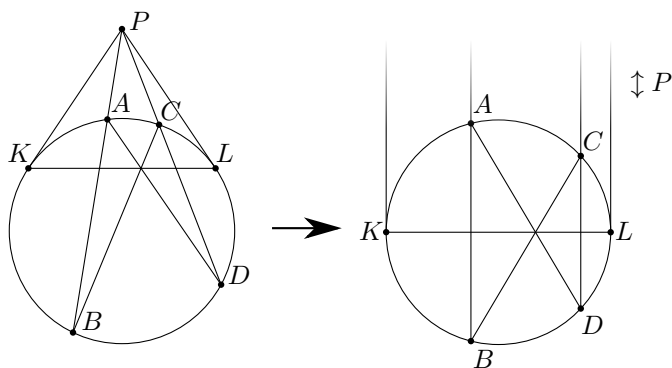
Příklad 9. (Radečkovovo lemma) Mějme kružnici ω a bod P mimo ni. Body K, L leží na ω tak, že PK a PL jsou tečny k ω . Body A, B leží na ω tak, že A, B, P leží na jedné přímce a body C, D na ω tak, že P leží na přímce CD . Dokaž, že přímky AC, BD a KL prochází jedním bodem.

¹⁰Zkratka pro „bez újmy na obecnosti“.



Řešení. Uvažme rovnoběžku p s KL procházející bodem P . Použijme složení perspektivy a afinity takové, které zachová ω a přímku p zobrazí na nevlastní. Transformovaný obrázek pak bude vypadat následovně. Máme kružnici ω a v nekonečnu bod P . Body K, L leží na ω tak, že tečny k ω v K a L prochází bodem P , tudíž jsou rovnoběžné. KL je tedy průměrem kružnice ω . Přímka AB je také rovnoběžná s PK neboli musí být kolmá na KL . Takže body A a B jsou podle KL symetrické. Obdobně body C a D jsou podle KL symetrické, takže i přímky AC a BD jsou podle KL symetrické neboli se protínají na KL . $\square$

V obrázku máme u nevlastního bodu P šipku nahoru i dolů. Je to tím, že body v nekonečnu jsou definované neorientovanými rovnoběžkami, takže ten bod „nahore“ je ten samý jako ten bod „dole“.



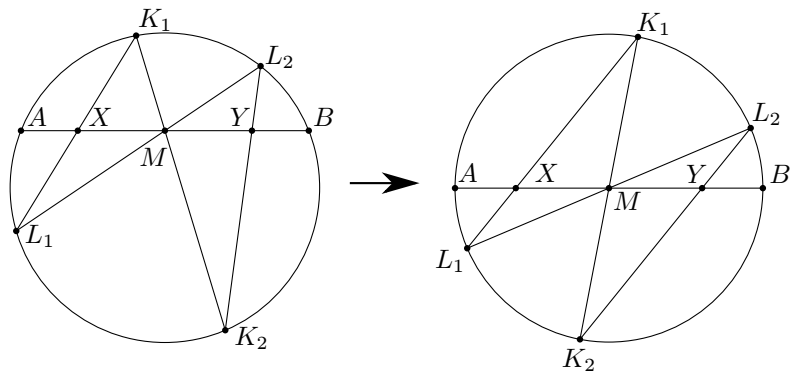
Zachováváme toho víc

Mějme kružnici ω a přímku p mimo ni.

- Označme q kolmici na p procházející středem ω . Pak tato konfigurace je podle q symetrická. Pokud zobrazíme p do nekonečna a ω zachováme, výsledek bude podle q' také symetrický. Pro důkaz si rozlož perspektivu na otočení v prostoru a projekci a uvědom si, že symetrie podle q je zachována.
- Na obecné rovnoběžce s p různé od p mějme dané body A, B, C . Pak perspektiva, která zobrazí p do nekonečna, zachová poměr $\frac{|AB|}{|BC|}$. Pro důkaz znovu rozlož na rotaci v prostoru a projekci a uvědom si, že na rovnoběžkách s p se projekce chová jako stejnohlkost neboli zachovává poměry.

Pojďme si nyní dokázat další úlohu:

Tvrzení 10. (butterfly) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB se středem M . Na ω zvolme body K_1, L_1 . Označme K_2 průsečík K_1M s ω různý od K_1 . Obdobně definujme bod L_2 . Necht' $X = K_1L_1 \cap AB$ a $Y = K_2L_2 \cap AB$. Pak $|XM| = |YM|$.



Důkaz. Označme R průsečík tečen k ω v bodech A, B . Uvažme přímku $p \parallel AB$ procházející bodem R , ta určitě neprotíná ω . Přímku p zobrazíme na nevlastní a ω zachováme. Pak se z AB stane průměr kružnice ω , protože tečny v A a B budou rovnoběžné. Poměry $\frac{|AM|}{|MB|}$ a $\frac{|XM|}{|YM|}$ jsme zachovali, protože $p \parallel AB$. Takže jsme získali ekvivalentní úlohu. Takto upravená úloha je již velmi snadná. $\square$

Poznámka. Pojďme si uvědomit, co nám říká trik využitý v této úloze. Máme kružnici ω a na ní body A, B . Pak můžeme zobrazit AB na průměr ω a ω zachovat. Takové zobrazení zachovává poměry na rovnoběžkách s AB . I když to zní jako trochu podvod, můžeme říct, BÚNO je AB průměr.¹¹

¹¹Dokud si tedy dáváme pozor na to, že v úloze zachováme vše potřebné.

Těžko na cvičišti...

A nyní si můžeš nabyté znalosti vyzkoušet na následujících úlohách.

Úloha 11. Mějme body P, A, B na přímce v tomto pořadí. Označme p kolmicí na tuto přímku vedenou bodem A . Dále mějme tečnu PX ke kružnici nad průměrem AB , kde X je bod dotyku (tečny jsou dvě, uvažujeme libovolnou z nich). Označíme Y jako průsečík BX a p . Dokaž, že PX pólí AY .

Úloha 12. Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC ($|AB| = |AC|$). Na jeho rameni AB zvolíme bod X . Rovnoběžka s BC vedená bodem X protne AC v Y . Označíme S střed XY a M střed BC . Nechť P je průsečík MX a CS . Dokaž, že trojúhelník PMC má poloviční obsah než ABC .

Úloha 13. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označíme si body dotyku kružnice vepsané po řadě K, L, M, N . Dokaž, že přímky KM, LN, AC, BD se protínají v jednom bodě.

Úloha 14. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označme body dotyku kružnice vepsané ke stranám AB, BC, CD, DA postupně W, X, Y, Z . Dokaž, že přímky AC, WX, YZ prochází jedním bodem.

Úloha 15. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω . Označme D bod dotyku kružnice připsané ke straně BC . Na přímce AD zvolme bod X tak, aby úsečka XD neobsahovala žádný bod ω . Tečny z X k ω protnou stranu BC v bodech K, L . Dokaž, že $|BK| = |CL|$. (Iksko 2018/19)

Úloha 16. Máme danou půlkružnici nad průměrem UV . Na této půlkružnici zvolíme body P, Q . Průsečík tečen z P a Q označíme R . Průsečík UP a VQ označíme S . Dokaž, že $SR \perp UV$.

Úloha 17. V trojúhelníku ABC označme body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB postupně D, E, F . Na úsečce AD uvnitř kružnice vepsané zvolme bod L . Úsečky BL a CL protnou kružnici vepsanou postupně v bodech X, Y . Dokaž, že přímky EF, BC, XY prochází jedním bodem.

Úloha 18. Bod M je středem strany AB trojúhelníka ABC . Na polopřímce opačné k MC zvolíme bod N a uvnitř úsečky AM zvolíme bod P . Označíme Q průsečík přímk AC a NP , dále R průsečík QM a NB a nakonec S průsečík AB a RC . Dokaž $|PM| = |SM|$.

Úloha 19. Mějme trojúhelník ABC . Označme A' bod dotyku vepsané u strany BC . Druhý průsečík přímky AA' s vepsanou označme P . Průsečíky BP a CP s vepsanou označme postupně M, N . Dokaž, že BN, MC, AA' prochází jedním bodem.

Úloha 20. V trojúhelníku ABC označme M střed BC . Přímka AM protíná kružnici vepsanou v bodech P, Q . Rovnoběžky s BC procházející body P , resp. Q pro-

tínají znovu kružnici vepsanou v X , resp. Y . Přímký AX , AY protínají BC v K , L . Dokaž, že $|BK| = |CL|$.

Úloha 21. Mějme pevnou úsečku AC a na ní bod B . Skrz body AC vedeme kružnici ω . Tečny k ω v bodech A a C se protínají v P . Úsečka PB protne kružnici podruhé v Q (B leží na úsečce PQ), osa úhlu AQC protne AC v R . Dokaž, že poměr $\frac{|AR|}{|RC|}$ nezávisí na volbě kružnice ω . (IMO Shortlist 2003/G2)

Úloha 22. Mějme čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|\angle ABD| = |\angle ACD| = 90^\circ$. Bod P leží na BD tak, že $|\angle PAD| = 90^\circ$ a obdobně Q leží na AC tak, že $|\angle QDA| = 90^\circ$. AC a BD se protínají v bodě X a PC a BQ se protínají v Y . Ukaž, že XY je kolmá na AD .

Dvojpoměry¹² aneb měříme v projektivním světě

Dvojpoměry pro nás budou velmi důležitým nástrojem v celém seriálu. Potřebujeme si totiž zadefinovat vlastnost, kterou kolineace zachová, protože vzdálenosti a poměry se kolineací mění.

Definice 23. (orientovaný obsah) Symbolem $[ABC]$ budeme značit orientovaný obsah trojúhelníku ABC . V absolutní hodnotě bude $[ABC]$ mít velikost obsahu trojúhelníku ABC , může se ale lišit znaménkem. To znamená, že pokud jsou body v pořadí po směru hodinových ručiček, bude hodnota orientovaného obsahu záporná, jinak bude kladná.¹³

Tvrzení 24. (pomocné) *Pokud v trojúhelníku jeden bod posuneme po straně tak, že (orientovaná) délka příslušné strany se změní na k -násobek, potom se i orientovaný obsah trojúhelníku změní na k -násobek.*

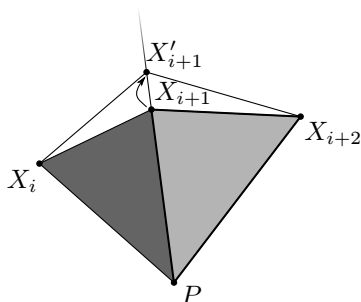
Pokusíme se vymyslet nějaký výraz, který každé n -tici přímek přiřadí nějaké reálné číslo. Mějme rovinu a v ní libovolný bod P . Dále v ní leží n bodů různých od P , kde n je sudé číslo. Označíme je $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Podíváme se na obsahy trojúhelníků $X_i X_{i+1} P$, přičemž za X_{n+1} uvažujeme X_1 a za X_{n+2} bod X_2 . Těch je sudý počet. Obarvíme každý se sudým i červeně a každý s lichým i modře. Pak každý z bodů X_i náleží právě jednomu červenému a právě jednomu modrému trojúhelníku. Pokud nahradíme bod X_i jakýmkoli jiným bodem různým od P na přímce PX_i , tak se právě jednomu modrému trojúhelníku změní obsah k -krát (pro vhodné reálné k) a právě jednomu červenému trojúhelníku se změní obsah k -krát. Takže když nějaký výraz V obsahuje

$$\frac{[X_{i-1} P X_i]}{[X_i P X_{i+1}]},$$

¹²Bývají v literatuře občas zaměňovány s pojmem čtyřpoměry. Pro nás ale čtyřpoměry budou znamenat něco jiného.

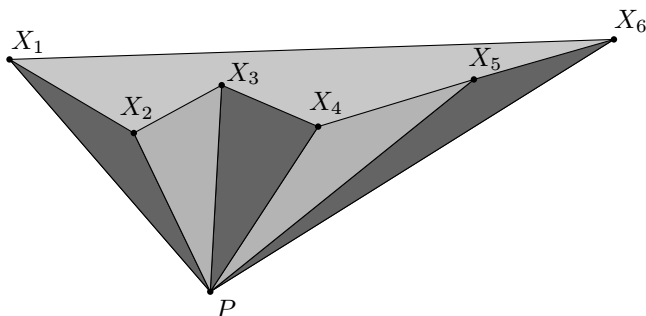
¹³Opravdu se standardně značí směr proti směru hodinových ručiček jako kladný.

tak se jeho hodnota nezmění, i když zaměníme bod X_i jiným bodem přímky X_iP .



Uvažme tedy výraz, kde v čitateli budou všechny červené trojúhelníky a ve jmenovateli všechny modré:

$$V = \frac{[X_1PX_2] \cdot [X_3PX_4] \cdots [X_{n-1}PX_n]}{[X_2PX_3] \cdot [X_4PX_5] \cdots [X_nPX_1]}.$$



Hodnota V se nezmění, pokud jakýkoliv X_i nahradíme jiným bodem na X_iP . Tuto hodnotu můžeme vnímat jako hodnotu přímek $X_1P, X_2P, \dots, X_nP$. Neděs se téhle obludy, představuj si ji jako modré a červené trojúhelníky, jejichž obsahy střídavě násobíme a dělíme.

Zkusíme nyní najít dobrou hodnotu n , pro kterou bude tento výraz užitečný. Jako první se nabízí $n = 2$. Ale po dosazení dostáváme:

$$V = \frac{[X_1PX_2]}{[X_2PX_1]} = -1.$$

Takže hodnota V jakýchkoli dvou přímek by byla rovna -1 . To nezní jako moc užitečný výraz. Zkusme tedy dalšího kandidáta, $n = 4$. Ta už takový problém nemá, a proto se jako nejmenší užitečná využívá. Tato hodnota se označuje *dvojpoměrem*

daných čtyř přímk. Pro body A, B, C, D, P budeme dvojpoměr čtyř bodů v obecné poloze vzhledem k bodu P značit takto:

$$(A, B, C, D)_P = [APB] \cdot \frac{1}{[BPC]} \cdot [CPD] \cdot \frac{1}{[DPA]}.$$

Přímky PA, PB, PC, PD označíme a, b, c, d . Protože už víme, že tuto hodnotu můžeme vnímat jako hodnotu přímk procházejících jedním bodem, budeme také značit

$$(a, b, c, d) = (AP, BP, CP, DP) = (A, B, C, D)_P.$$

Hodnota dvojpoměru je závislá na pořadí, ale občas se permutace dají přepočítat.

Cvičení 25. Rozmysli si, že platí:

- $(a, b, c, d) = \frac{1}{(b, c, d, a)} = (c, d, a, b) = \frac{1}{(d, a, b, c)},$
- $(a, b, c, d) = \frac{1}{(a, d, c, b)}.$

Pojďme si ukázat, proč takhle obludně definovaná hodnota je právě ta užitečná:

Uvažujme v rovině bod P . Dále v ní leží čtyři body A, B, C, D , které leží na jedné přímce neprocházející bodem P . Pak

$$(A, B, C, D)_P = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|}.$$

Délky potřebujeme uvažovat orientovaně, abychom dostali správné znaménko. Můžete si všimnout, že tenhle výraz vůbec nevyužívá bod P , budeme tedy symbolem (A, B, C, D) značit dvojpoměr čtyř bodů na jedné přímce.

Tvrzení 26. (promítací) *Mějme čtyři body na přímce A, B, C, D a čtyři body na jiné přímce X, Y, Z, W takovým způsobem, že přímky AX, BY, CZ, DW prochází jedním bodem P . Pak platí $(A, B, C, D) = (X, Y, Z, W)$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= (A, B, C, D)_P = (AX, BY, CZ, DW) = \\ &= (X, Y, Z, W)_P = (X, Y, Z, W). \end{aligned} \quad \square$$

Abychom nemuseli vždy psát tuto promítací myšlenku, vysloužila si vlastní značení. Když platí $(A, B, C, D) = (X, Y, Z, W)$ při promítnutí skrz bod P , tak značíme

$$(A, B, C, D) \stackrel{P}{\underset{\wedge}{=}} (X, Y, Z, W).$$

Cvičení 27. Mějme trojúhelník ABC a pevně dané body K, L na straně BC . Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímk AK, AL, AC s osou vnitřního úhlu u vrcholu B . Dokaž, že $(B, K, L, C) = (B, X, Y, Z)$.

Perspektiva zachovává dvojpoměry

Promítací tvrzení pro nás znamená, že jsme našli hodnotu, která se zachovává v perspektivě. Zopakujme si, jak jsme si perspektivu definovali. Nejdříve jsme rovinu otočili v prostoru, to dvojpoměry zachovává, a následně jsme ji promítli skrz počátek zpět do roviny $z = 1$. Představme si body A, B, C, D na přímce. Po otočení se zobrazí na body A_1, B_1, C_1, D_1 v prostoru. Prohlédneme si rovinu danou počátkem P a přímkou $A_1B_1C_1D_1$. V ní leží i finální obrazy této perspektivy. Z promítacího tvrzení plyne $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_1, B_1, C_1, D_1)_P = (A', B', C', D')_P = (A', B', C', D')$. Neboli celá perspektiva zachovala dvojpoměr (A, B, C, D) .

Tvrzení 28. (zobecněný poměr?) *Pro A, B, C, D na přímce, kde D je nevlastní, platí:*

$$(A, B, C, D) = -\frac{|AB|}{|BC|}.$$

Důkaz. Zvolíme si mimo přímku $\overleftrightarrow{ABCD}$ bod P . Na přímce $p \parallel \overleftrightarrow{ABCD}$ procházející bodem P zvolíme vlastní bod D' . Pak

$$(A, B, C, D) = (A, B, C, D')_P = \frac{[APB]}{[BPC]} \cdot \frac{[CPD']}{[D'PA]}.$$

Trojúhelníky CPD' a $D'PA$ mají stejný obsah, protože mají stejnou základnu $D'P$ a stejnou výšku. Ale mají opačnou orientaci, takže $\frac{[CPD']}{[D'PA]} = -1$. Trojúhelníky APB a BPC mají stejnou výšku neboli hodnota celkového dvojpoměru je rovna

$$-\frac{[APB]}{[BPC]} = -\frac{|AB|}{|BC|}. \quad \square$$

Tvrzení 29. (dvojpoměry na kružnicích) *Mějme kružnici ω a na ní body A, B, C, D, P, Q . Pak $(A, B, C, D)_P = (A, B, C, D)_Q$.*

Důkaz. Hodnota $(A, B, C, D)_P$ je závislá jen na úhlech mezi přímkami PA, PB, PC, PD . Z obvodových úhlů jsou všechny tyto úhly stejné jako úhly mezi přímkami QA, QB, QC, QD , tedy hodnota $(A, B, C, D)_X$ je nezávislá na volbě X na ω . (Takto se nám můžou obvodové úhly změnit na doplňkové obvodové úhly. Rozmysli si, že to funguje i pro ně. Pokud $Q = A$, tak přímka QA degeneruje do tečny v bodě A , kde tak namísto obvodového úhlu dostaneme úhel úsekový.) Opět si rozmysli, že tvrzení pořád platí. Pro body A, B, C, D budeme pomocí (A, B, C, D) značit právě tuto hodnotu a z kontextu bude jasné, jestli se jedná o dvojpoměr na přímce nebo na kružnici. $\square$

Důležitou vlastností dvojpoměrů, kterou budeme v seriálu využívat, je následující tvrzení:

Tvrzení 30. (jednoznačnost dvojpoměrů) Pokud $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, tak platí $X = Y$.

Důkaz. Z definice víme, že $(A, B, C, X) = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|}$. A obdobně také platí $(A, B, C, Y) = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|}$. Tedy platí

$$(A, B, C, X) = (A, B, C, Y) \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \Leftrightarrow \frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|CY|}{|YA|}.$$

Rozmysli si, že na přímce $\overleftrightarrow{ABCD}$ existují právě dva body takové, že poslední poměr je nějaké pevně dané číslo. Délky v poměrech ale uvažujeme orientovaně, což už nám dá jednoznačně jen jeden bod. $\square$

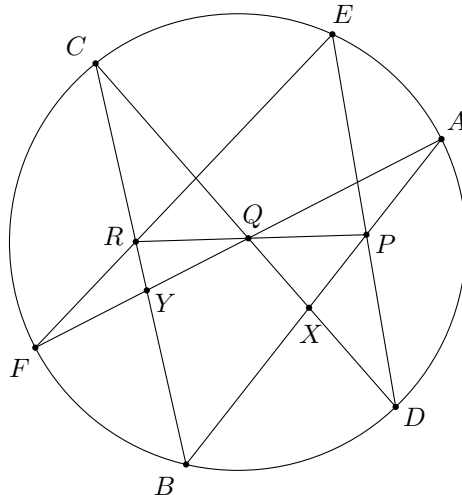
Pojďme si ukázat, jak dvojpoměry použít na pořádné úloze:

Věta 31. (Pascal) Na kružnici ω máme body A, B, C, D, E, F . Označme body $P = BA \cap DE$, $Q = DC \cap FA$, $R = EF \cap BC$. Pak P, Q, R leží na jedné přímce.

Důkaz. Označíme si $X = CD \cap AB$ a $Y = AF \cap BC$. Definujeme $R_1 = BC \cap PQ$. R_1 i R tedy leží na BC . Myšlenka důkazu bude taková, že zkusíme postupným promítáním ukázat, že $(B, Y, R_1, C) = (B, Y, R, C)$. Z jednoznačnosti dvojpoměrů to pak bude znamenat, že $R_1 = R$, tedy přímky BC, RE, PQ prochází jedním bodem, tudíž P, Q, R leží na přímce. Použijeme tato promítání:

$$(B, Y, R_1, C) \stackrel{Q}{\underset{\wedge}{=}} (B, A, P, X) \stackrel{D}{\underset{\wedge}{=}} (B, A, E, C) \stackrel{F}{\underset{\wedge}{=}} (B, Y, R, C),$$

čímž je důkaz dokončen. $\square$



Úloha 32. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω a libovolný bod M . Dále nechť přímka skrz M protíná CB , CA , AB postupně v bodech A_1 , B_1 , C_1 . Přímky AM , BM , CM protínají ω postupně v bodech A_2 , B_2 , C_2 . Dokaž, že přímky A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 se protínají na ω .

Úloha 33. (Pappus) Mějme dané přímky p a q . Na p jsou po řadě body A_1 , B_1 , C_1 a na q jsou po řadě body A_2 , B_2 , C_2 . Dokaž, že průsečíky X , Y , Z postupně dvojic přímek A_1B_2 a B_1A_2 , A_1C_2 a C_1A_2 , B_1C_2 a C_1B_2 , leží na jedné přímce.

Úloha 34. (těžká) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme M_1 bod na straně AB . Nechť M_2 je projekce bodu M_1 skrz D na přímku BC . Dále označme M_3 projekci M_2 skrz A na CD . M_4 projekci M_3 z B na DA . M_5 projekci M_4 z C na AB . Takto pokračujeme, až dostaneme M_{13} . Dokaž, že $M_{13} = M_1$.

Obecná kolineace

Často se hodí afinní zobrazení a perspektivu mezi sebou různě skládat. Abychom nemuseli vždycky psát, jaká všechna zobrazení skládáme, bude pro nás *kolineace* univerzálním zobrazením, do kterého spadají všechna složení perspektivních a afinních zobrazení.

Řekneme, že kolineace je jakékoli zobrazení projektivní roviny, které

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry.

Znovu se jedná o vlastnost některých zobrazení, tedy složení dvou takových zobrazení a jeho inverz zachovávají danou vlastnost. Takže složení dvou kolineací a inverzní zobrazení ke kolineaci je zase kolineací. Všechny perspektivy jsou kolineace i všechna afinní zobrazení jsou kolineace. Proto zobrazení, které jsme zmínili v tvrzení Perspektiva a kružnice, je také kolineace.

Tvrzení 35. (kolineace a dvojpoměrové svazky) Mějme přímky a , b , c , d procházející jedním bodem P . Uvažme nějakou kolineaci zobrazující $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c'$, $d \rightarrow d'$. Pak

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

Důkaz. Myšlenka v důkaze je definovat dvojpoměry svazků pomocí dvojpoměrů bodů, které se z definice zachovávají. Uvažme přímku protínající a , b , c , d postupně v bodech A , B , C , D . Pak platí

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (A, B, C, D)_P = (A, B, C, D) = (A', B', C', D') = \\ &= (A', B', C', D')_{P'} = (a', b', c', d'). \end{aligned} \quad \square$$

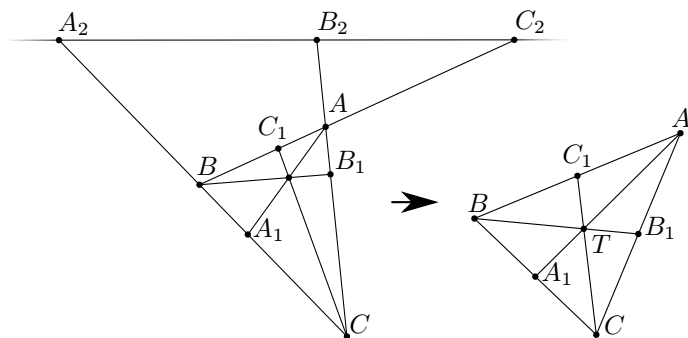
Tvrzení 36. (kolineace a dvojpoměry na kružnicích) Mějme kružnici ω a na ní body A, B, C, D . Pak pokud kolineace zobrazí ω na kružnici, platí $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

Důkaz. Myšlenka důkazu je dvojpoměry na kružnicích definovat pomocí svazků, o kterých už víme, že se zachovávají. Uvažme na ω bod P různý od A, B, C, D . Pak platí

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) &= (AP, BP, CP, DP) = (A'P', B'P', C'P', D'P') = \\ &= (A', B', C', D').\end{aligned}$$

□

Úloha 37. Máme trojúhelník ABC . Na straně BC zvolíme body A_1 a A_2 tak, že $(B, A_1, C, A_2) = -1$. Obdobně zavedeme body B_1, B_2 a C_1, C_2 . Předpokládejme, že A_2, B_2, C_2 leží na jedné přímce. Dokaž, že AA_1, BB_1, CC_1 prochází jedním bodem.



Řešení. V úloze se vyskytuje spousta podmínek s dvojpoměry, které působí na první pohled dost nepřístupně. Kdyby zmíněné dvojpoměry měly každý jeden bod v nekonečnu, úloha by se řešila lépe, přeci jen s poměry se lépe zachází. Pomocí kolineace si zobrazíme přímku $A_2B_2C_2$ na nevlastní. Nyní můžeme úlohu trochu přeformulovat: Máme trojúhelník ABC . Na straně BC zvolíme bod A_1 tak, že $(B, A_1, C, \infty) = -1$ neboli $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1$. To ale znamená, že A_1 je středem BC . Analogicky je B_1 střed AC a C_1 střed AB . Přímký AA_1, BB_1, CC_1 jsou těžnice v ABC , tudíž prochází jedním bodem. □

Harmonické dvojpoměry

V předchozí úloze se vyskytovala hodnota dvojpoměru -1 . Po srovnání jsme zjistili, že úzce souvisí se středem úsečky. Čtveřice bodů na přímce s hodnotou dvojpoměru rovnou -1 se v geometrii objevuje tak často, že si vysloužila speciální název. Říká se jí *harmonická* a v literatuře se vztah $(A, B, C, D) = -1$ často označuje $\mathcal{H}(A, B, C, D)$. Jak už ale víme, dvojpoměr je také vlastnost čtyř přímek. Obdobně tak čtyři přímky a, b, c a d procházející jedním bodem, pro které $(a, b, c, d) = -1$, budeme nazývat *harmonickým svazkem*. Vzpomeň si, jak jsme přepočítávali hodnoty dvojpoměrů podle pořadí bodů. Harmonické dvojpoměry mají tu vlastnost, že jsou harmonické nezávisle na protočení bodů:

$$-1 = (A, B, C, D) = (B, C, D, A).$$

Také nezávisí na směru čtení:

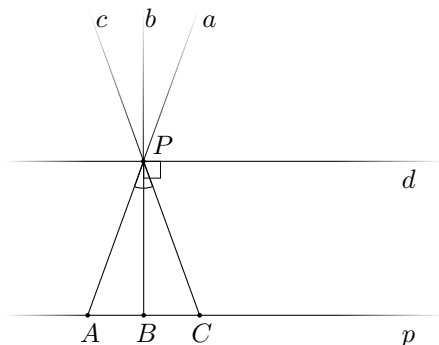
$$-1 = (A, B, C, D) = (D, C, B, A).$$

Harmonické čtveřice a svazky mají i spoustu dalších užitečných vlastností.

Tvrzení 38. (dvě ze tří) *Mějme čtyři přímky a, b, c a d procházející jedním bodem. Pak z libovolných dvou následujících tvrzení plyne tvrzení třetí:*

- (i) *Přímka b je osou úhlu, který svírají přímky a a c .*
- (ii) *Přímky b a d jsou na sebe kolmé.*
- (iii) *Přímky a, b, c a d tvoří harmonický svazek.*

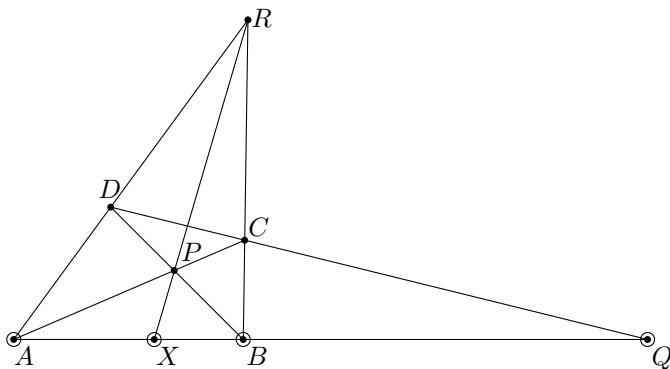
Důkaz. Dokážeme pouze, že z (i) a (ii) plyne (iii). Označme P průsečík všech čtyř přímek. Uvažujme přímku p rovnoběžnou s d , ta protne přímky a, b a c postupně v bodech A, B a C . Přímka b je v trojúhelníku PAC výškou i osou úhlu, tedy trojúhelník PAC je rovnoramenný. Bod B je tudíž středem strany AC . A nyní už ze známé konfigurace $(A, B, C, \infty) = -1$, takže přímky a, b, c a d tvoří harmonický svazek. $\square$



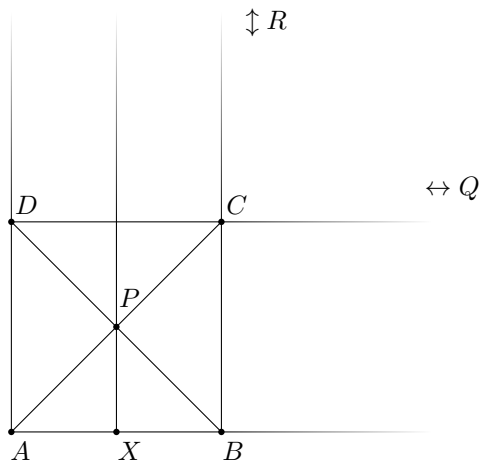
Cvičení 39. Dokaž zbývající dvě implikace tvrzení *dvě ze tří*.

Tvrzení 40. (Ceva¹⁴–Menelaus) *Mějme čtyřúhelník $ABCD$ a označme v něm $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$, $P = AC \cap BD$. Průsečík RP a AB označíme X . Potom platí $(A, X, B, Q) = -1$.*

¹⁴Čti [Čeva].



Důkaz. Uvažme kolineaci takovou, která zobrazí QR do nekonečna. BÚNO jsme tím dostali R, Q nevlastní. V takovém případě je $ABCD$ rovnoběžník. Uvážíme afinní zobrazení, které z něj vytvoří čtverec. Bod X pak ze symetrie leží ve středu AB . Takže $\mathcal{H}(A, X, B, Q)$. $\square$



Úloha 41. V trojúhelníku ABC leží na stranách BC, CA, AB postupně body A', B', C' tak, že AA', BB', CC' prochází jedním bodem. Nechť p je rovnoběžka k BC vedená bodem A . Přímka $A'B'$ protíná p v X . Přímka $A'C'$ protíná p v Y . Dokaž, že $|AX| = |AY|$.

Úloha 42. Dokaž tvrzení 3. (Blanchet) pomocí kolineace a dvojpoměrů.

Úloha 43. Nechť AD je výška v ostroúhlém trojúhelníku ABC . Dále P je libovolný bod na AD . Přímky BP a CP protínají AC a AB postupně v M, N . Přímka MN protíná AD v Q . Dále nechť F je libovolný bod na AC . Přímka FQ protíná CN v E . Dokaž, že $|\sphericalangle FDA| = |\sphericalangle EDA|$.

Úloha 44. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokaž, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC , leží na pevné kružnici (tzv. *Apoloniově kružnici*).

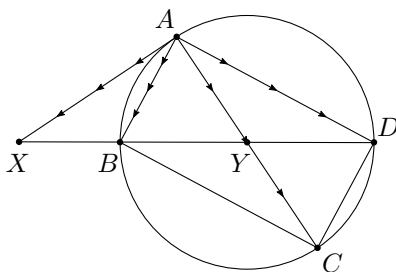
Úloha 45. Úhlopříčky AC, BD tětívového čtyřúhelníka $ABCD$, vepsaného do kružnice k se středem O , se protínají v $P \neq O$. Polopřímka OP protne k v X . Ukaž, že obraz přímky CA podle CX , obraz přímky DB podle DX a přímka OX procházejí jedním bodem.

Úloha 46. V trojúhelníku ABC jsou dány ceviany¹⁵ AD, BE, CF , které se protínají v bodě K . Označme X průsečík FD a BK . Označme P střed AK . A nakonec Y průsečík EP a AB . Dokaž, že $XY \parallel AD$.

Harmonické čtyřúhelníky

Obdobně jako je dvojpoměr na přímce harmonický, pokud $(A, B, C, D) = -1$, budeme říkat, že je dvojpoměr na kružnici harmonický, pokud $(A, B, C, D) = -1$. Tím získáváme definici velmi zajímavého geometrického objektu, harmonických čtyřúhelníků. Pojďme si rozmyslet vlastnosti, které mají.

Tvrzení 47. (o obdélnících) *Jediným harmonickým obdélníkem¹⁶ je čtverec.*



Důkaz. Mějme obdélník $ABCD$ s kružnicí opsanou ω . Označme p přímku BD a X průsečík tečny k ω v bodě A s přímkou p . Dále necht Y je průsečík AC a BD . Pak

$$(A, B, C, D) \underset{\wedge}{=} (X, B, Y, D).$$

Ale Y je středem BD , takže (X, B, Y, D) je harmonická právě tehdy, když X je nevlastní. To platí právě tehdy, když tečna k ω v bodě A je rovnoběžná s BD , což je právě tehdy, když je $ABCD$ čtverec. $\square$

Tvrzení 48. (o deltoidech¹⁷) *Všechny tětívové deltoidy jsou harmonické.*

¹⁵Ceviany v trojúhelníku jsou tři přímky, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníka a protínají se v jednom bodě.

¹⁶Čtverec bereme jako speciální případ obdélníka.

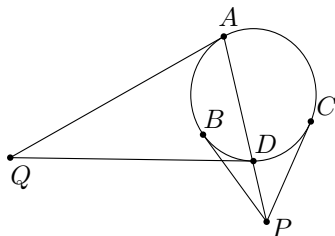
¹⁷Deltoid je konvexní čtyřúhelník osově souměrný podle jedné z úhlopříček.

Důkaz. (kolineací) Vzpomeň si, že kolineace zachovávala dvojpoměry na kružnicích. Mějme tětivotý deltoid $ABCD$, ve kterém AC je průměr kružnice opsané. Označme P průsečík tečen ke kružnici opsané v bodech B, D . Ze symetrie P leží na AC . Kolmici na AC procházející P označme p . Uvažme kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici opsanou. Ta z BD vytvoří průměr kružnice opsané, který je kolmý na AC . Z $ABCD$ tím vznikl čtverec, o kterém víme, že je harmonický. $\square$

Důkaz. (promítáním) Mějme tětivotý deltoid $ABCD$, ve kterém AC je průměr kružnice opsané. Ten promítneme skrz bod A na přímkou BD . Označme X střed BD a Y nevlastní bod přímky BD . Pak

$$(A, B, C, D) \stackrel{A}{\underset{\wedge}{=}} (Y, B, X, C) = -1. \quad \square$$

Příklad 49. Máme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω . Tečny k ω v bodech B a C se protínají v bodě P . Druhý průsečík AP s ω označme D . Pak (A, B, C, D) je harmonický.

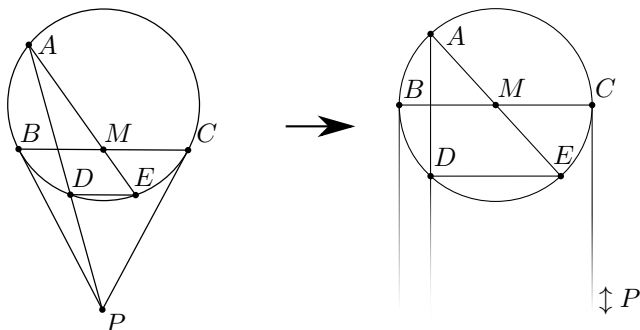


Řešení. Označme Q průsečík tečen k ω v bodech A a D . Uvažme kolineaci, která zobrazí PQ na nevlastní a ω na kružnici. Tím dostaneme nějakou kružnici ω , na ní v bodech B a C rovnoběžné tečny a v bodech A a D rovnoběžné tečny neboli BC i AD jsou průměry ω . Ale zároveň AD je rovnoběžné s PB , tudíž kolmé na BC . Takže $PB \perp QD$. Z toho plyne, že $ABCD$ musí být čtverec, tedy je harmonický. $\square$

Poznámka. Nezvykej si moc, že vždycky můžeš takovou kolineaci uvážit. Dobře si proto rozmysli, že daná přímka nikdy neprotíná kružnici, kterou chceš zachovat. Když Ti to není jasné, zkus kolineovat pomalu. Nejdřív jeden bod a až pak i ten druhý. Často to může zjednodušit argumentaci, proč se opravdu nikdy neprotínají.

Poznámka. Přímka AD , která se v předchozí úloze objevila, má v geometrii dokonce vlastní název. Říká se jí *symediána* bodu A vzhledem k ABC .

Tvrzení 50. (překlopená těžnice) *Symediána bodu A v trojúhelníku ABC je osově překlopená těžnice podle osy úhlu.*



Důkaz. Označme M střed BC , D průsečík A -symediány s kružnicí opsanou, P průsečík tečen z B a C ke kružnici opsané a nakonec E průsečík AM s kružnicí opsanou.

Tvrzení je ekvivalentní s $|\angle MAB| = |\angle DAC|$. Z obvodového úhlu to znamená, že je úloha ekvivalentní s tvrzením, že oblouky BE a CD mají stejnou velikost neboli $BC \parallel ED$.

Mějme rovnoběžku p s BC procházející bodem P . Uvážíme kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici opsanou. Ta zachová poměr $\frac{|BM|}{|MC|}$, tedy M bude stále středem BC . Z BC se stane průměr kružnice, takže z M se stane střed kružnice opsané. Příмка AP je teď kolmá na BC . Z Thaletovy věty je ED kolmé na AD neboli $BC \parallel ED$. $\square$

Úloha 51. Úhlopříčky tětívového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P . Dokaž, že pokud je BP symediána v ABC , pak AP je symediána v ABD .

(Rumunsko TST 2006)

Úloha 52. Je dána kružnice ω a bod A mimo ni. Označme body dotyku tečen z A k ω postupně X, Y . Mějme na kružnici tětivu BC takovou, že A leží na přímce BC . Označme M střed BC . Dokaž, že $|\angle XMA| = |\angle YMA|$.

Úloha 53. Mějme kružnici k a bod P vně této kružnice. Z bodu P vedeme tečny PX a PY ke k . Na kratším oblouku XY zvolíme bod A . Příмка PA protne kružnici podruhé v bodě B . Označme M střed AB . Dokaž, že trojúhelníky BXM a YBM jsou podobné.

Co ještě umí kolineace

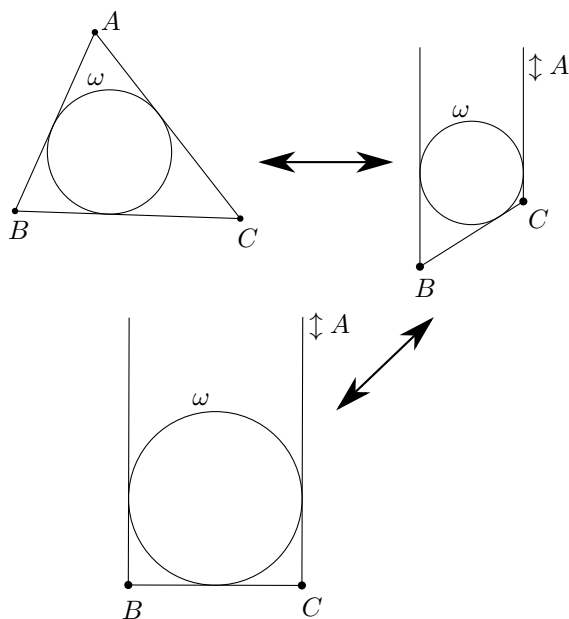
Tvrzení 54. (kolineace a čtyřúhelníky) Ukážeme si, že pro body A, B, C, D v obecné poloze a body A', B', C', D' v obecné poloze existuje kolineace, která zobrazuje $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C', D \rightarrow D'$.

Důkaz. Označme $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap DA$. Uvažme kolineaci, která zobrazí PQ na nevlastní přímku. Takhle kolineace zobrazí $ABCD$ na rovnoběžník. Pro každý rovnoběžník umíme najít afinní zobrazení, které z něj vytvoří čtverec. Neboli

pro $ABCD$ existuje kolineace, která jej zobrazí na čtverec. Obdobně pro $A'B'C'D'$ existuje kolineace, která ho zobrazí na stejný čtverec. Inverzní kolineace k této je také kolineací, takže existuje kolineace, která čtverec zobrazí na $A'B'C'D'$. Takže složením kolineace, která zobrazí $ABCD$ na čtverec, a té, co zobrazí čtverec na $A'B'C'D'$, dostaneme hledané zobrazení. $\square$

Poznámka. Taková kolineace existuje právě jedna. Důkaz, který známe, je spíše pracný a nezajímavý, tak jej neuvádíme.

Tvrzení 55. (trojúhelník s kružnicí vepsanou) *Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a trojúhelník $A'B'C'$ s kružnicí vepsanou ω' . Pak existuje kolineace, která zobrazuje $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ a $\omega \rightarrow \omega'$.*



Důkaz. Uvažme kolineaci, která zobrazí A do nekonečna a kružnici ω zobrazí na kružnici. Dostaneme tím přímky AB a AC rovnoběžné, mezi nimi vepsaná kružnice ω . Chtěli bychom, aby BC bylo kolmé na AB , ale to zatím nemusí. Uvažme body dotyku ω s AB a AC postupně D , E . Označme P průsečík DE a BC . Nakonec mějme přímku p rovnoběžnou s AB procházející bodem P . Uvážíme kolineaci, která p zobrazí na nevlastní a ω zobrazí na kružnici. Pak ze symetrie je BC kolmé na AB . Tím jsme našli kolineaci, která z obecného trojúhelníka ABC s kružnicí vepsanou vytvoří „trojúhelník“ s jedním nevlastním bodem a pravými úhly u zbylých vrcholů a ω zobrazí na kružnici. Neboli existuje i kolineace, která tenhle „trojúhelník“ převádí na obecný trojúhelník s kružnicí vepsanou. Složením těchto kolineací dostáváme kolineaci, která zobrazuje $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ a $\omega \rightarrow \omega'$. $\square$

Poznámka. Pokud chceme zobrazit trojúhelník na rovnostranný a zachovat kružnici vepsanou, existuje jedna přímka, kterou můžeme zobrazit na nevlastní, a tím se z obecného trojúhelníka stane rovnostranný. Můžeš si zkusit rozmyslet, která to je.

Úloha 56. Máme trojúhelník ABC . Označme body dotyku kružnice vepsané ke stranám BC , AC , AB postupně X , Y , Z . Označme K , L , M průsečíky postupně AB a XZ , BC a ZY , CA a XY . Dokaž, že body K , L , M leží na jedné přímce.

Zobecňování dvojpoměrů

Tahle kapitolka je pouze doplňující, její pochopení není nutné k pochopení zbytku seriálu, ani k řešení soutěžních úloh.

V kapitole o dvojpoměrech jsme si mohli vybrat jakýkoli sudý počet bodů a na nich definovat nějaký n -poměr. Zastavili jsme se u čtyř, ale co když pokračujeme dál. I vícepoměry se občas dají použít v důkazu. Ukážeme si, jak využít trojpoměr neboli vlastnost šesti bodů k nahlédnutí Cevovy věty.

Věta 57. (Ceva) Mějme trojúhelník ABC . Na stranách BC , CA a AB zvolíme postupně body X , Y , Z tak, že přímky AX , BY , CZ prochází jedním bodem X . Pak

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

Důkaz. Všimni si, že obdobně jako u dvojpoměru jsme se mohli zbavit pomocného bodu, pokud všechny ležely na přímce, tak u trojpoměru se můžeme pomocného bodu zbavit, když leží po třech na přímce. Neboli hodnota zmíněná v Cevově větě je vlastně trojpoměrem šesti bodů (A, Z, B, X, C, Y) . Trojpoměr se podobně jako dvojpoměr zachovává při promítání, takže můžeme na rovinu aplikovat jakoukoli perspektivu nebo afinní zobrazení a hodnotu trojpoměru nezměníme.

Vzpomeň si na tvrzení *kolíneace a čtyřúhelníky*. Takové kolíneace se dá dosáhnout využitím pouze perspektivy a afinních zobrazení, takže tahle kolíneace zachovává trojpoměry¹⁸. Uvažme čtyřúhelník A, B, C, X . Podle tvrzení *kolíneace a čtyřúhelníky* ho zobrazíme na rovnostranný trojúhelník ABC , kde X je jeho středem. V takovém případě Cevova věta zřejmě platí, takže platí vždycky. $\square$

¹⁸Dokonce každá kolíneace zachovává jakékoli n -poměry.

Shrnutí

Shrneme, co jsme si v prvním díle seriálu ukázali.

Afinní zobrazení:

- (1) Zachovává přímky.
- (2) Zachovává poměry na přímkách.
- (3) Zachovává rovnoběžky.
- (4) Elipsy zobrazuje na elipsy.
- (5) Zachovává poměry obsahů.
- (6) Pro každou elipsu existuje afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.
- (7) Pro každé dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ existuje afinní zobrazení, které je na sebe převádí. (Existuje dokonce právě jedno.)
- (8) Složení afinních zobrazení je afinní.
- (9) Inverzní zobrazení k afinnímu je afinní.
- (10) Příklady afinních zobrazení jsou: podobná zobrazení, zkosení, zmáčknutí.

Dvojpoměry

- (1) Hodnotu čtyř bodů na přímce značíme (A, B, C, D) , čtyř bodů vzhledem k pátému $(A, B, C, D)_P$, čtyř přímk procházejících jedním bodem (a, b, c, d) nebo čtyř bodů na kružnici (A, B, C, D) .
- (2) Dvojpoměry jsou měřícím nástrojem v projektivním světě, protože všechna projektivní zobrazení ho zachovají.
- (3) Hodnotu $(A, B, C, D)_P$ spočítáme postupným násobením a dělením obsahů trojúhelníků.
- (4) *Promítací tvrzení*.
- (5) S jedním bodem nevlastním degeneruje do obyčejného poměru.
- (6) Skrz bod na kružnici se dají promítat na kružnici.
- (7) Jsou jednoznačné, neboli pokud $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, tak $X = Y$.

Kolineace

- (1) Zachovává přímky.
- (2) Zachovává dvojpoměry na přímce, dvojpoměrové svazky i dvojpoměry na kružnici.
- (3) Kuželosečky zobrazuje na kuželosečky. Kuželosečky, které neprotínají nevlastní přímku, jsou elipsy. Kuželosečka, co se jí dotýká, jsou paraboly, a ty, co ji protínají ve dvou bodech, jsou hyperboly.
- (4) Pro každou přímku existuje kolineace, která ji zobrazí na nevlastní. (Je to perspektiva.)
- (5) Pro každou kružnici a přímku, která ji neprotíná, existuje kolineace, která danou přímku zobrazí na nevlastní a kružnici zachová.

- (6) Pro každý tečnový čtyřúhelník s kružnicí vepsanou existuje kolineace, která z něj vytvoří **kosočtverec** a zachová kružnici vepsanou.
- (7) Pro každý tětiový čtyřúhelník s kružnicí opsanou existuje kolineace, která z něj vytvoří **obdélník** a zachová kružnici opsanou.
- (8) Pro každé dva čtyřúhelníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ existuje kolineace, která je na sebe převádí.
- (9) Pro každé dva trojúhelníky s kružnicí vepsanou ABC a $A'B'C'$ existuje kolineace, která je na sebe převádí a zachová kružnici vepsanou. Obdobně i s kružnicí opsanou.

Harmonické dvojpoměry

- (1) Hodnota dvojpoměru je pro ně rovna -1 .
- (2) Čtveřice A, M, B, ∞ je harmonická, právě když M je střed AB .
- (3) Tvrzení *Ceva-Menelaus* je známou harmonickou čtveřicí.
- (4) Pro harmonické svazky platí tvrzení *dvě ze tří*.
- (5) $\mathcal{H}(A, B, C, D) = \mathcal{H}(A, D, C, B) = \mathcal{H}(D, C, B, A)$.

Harmonické čtyřúhelníky

- (1) Čtyři body na kružnici, jejichž dvojpoměr je roven -1 .
- (2) Z obdélníků je harmonický právě čtverec.
- (3) Všechny deltoidy jsou harmonické.
- (4) Označme X průsečík tečen ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodech B a C . Pak A -symediána v trojúhelníku ABC je přímka AX .
- (5) Čtyřúhelník $ABCD$ je harmonický právě tehdy, když AD je symediána v ABC .

Pár slov závěrem

Gratuluje, dočetl(a) jsi se až sem! V seriálu jsme si ukázali, jak matematicky popsat koukání se na obrázky z jiných úhlů a jak nám to může pomoci při řešení úloh. Začali jsme s afinními zobrazeními, která nás provázela po zbytek seriálu. Naučili jsme se perspektivu, kolineaci, dvojpoměry, a co to znamená, když jsou harmonické.

V dalším díle budeme pokračovat v naší cestě projektivní geometrií. Dozvíš se například, co znamená podivně znějící věta: „Polára bodu na poláře prochází pólem původní poláry.“, jak tyhle věci souvisí s komplexními čísly, a hlavně, co je to dualita. Dualita pro nás bude dokazovací nástroj podobně jako v tomto díle perspektiva či kolineace. Na rozdíl od nich se ale nebude na obrázek koukat jen z jiného úhlu pohledu, ale celkově nám obrázek úplně překreslí. Z přímek nám udělá body a z bodů

zase přímky. Ale nemůžeme přece prozradit všechno, na víc se můžeš těšit v druhém díle.

Návody

6. Mají stejný. Rozmysli si, že afinní zobrazení zachovává poměry obsahů a zobraz na rovnoramenný.
11. Zobraz P na nevlastní tak, aby se zachoval poměr na přímce AY a kružnice.
12. Dokaž, že $PA \parallel BC$. Zobraz rovnoběžku s BC procházející bodem A na nevlastní a ukaž, že pak je P také nevlastní.
13. Zobraz $ABCD$ na kosočtverec a zachovej kružnici vepsanou.
14. Zobraz tak, aby se zachovala kružnice a získal jsi z $ABCD$ kosočtverec.
15. Nechť I je středem ω a E je bod dotyku ω se stranou BC . Zobraz EI a KL na rovnoběžky a zachovej poměry a kružnici.
16. Zobraz PQ a UV na rovnoběžné a zachovej kružnici. Rozmysli si, že pravý úhel mezi RS a UV se zachová, protože se zachovává symetrie podle UV .
17. Označ K průsečík $CB \cap EF$. Zobraz AK na nevlastní.
18. Zobraz C na nevlastní a zachovej poměry. Následně srovnej afinním zobrazením.
19. Pošli A na nevlastní.
20. Zachovej kružnici a zobraz A na nevlastní.
21. Ukaž, že umíš všechny povolené konstrukce na sebe převést nějakou kolineací.
22. Dokresli Thaletovu kružnici nad AD . Zobraz BC a AD na rovnoběžky a zachovej tuhle kružnici.
32. Označ A_3 průsečík AA_2 s BC . Obdobně B_3 a C_3 . Dokaž, že $(A_1, B, A_3, C) = (B_1, A, B_3, C)$. Promítni oba tyto dvojpoměry na čtyřúhelník $ABCX$, kde X je hledaným bodem na kružnici.
33. Označ $K = A_1C_2 \cap B_1A_2$ a $L = C_1A_2 \cap B_1C_2$. Zkus ukázat, že $(A_2, X, K, B_1) = (L, Z, C_2, B_1)$.
34. Označ X průsečík AB a CD . Dokaž, že $(X, A, M_1, B) = (X, A, M_1, B)$. Promítni (X, A, M_1, B) na BC skrz bod D . Následně na CD skrz bod A . Obdobně promítni dvanáctkrát.
41. Zobraz BC na nevlastní. Poměr $\frac{|AX|}{|AY|}$ se zachová.
42. Převeď pomocí tvrzení *dvě ze tří* na úlohu, co chce dokázat, že je nějaký svazek harmonický. Jakoukoli přímku zobraz na nevlastní a všiměj si symetrií.
43. Převeď na podmínku, že je svazek harmonický. Zobraz BC na nevlastní a neboj se, že je nevlastní přímka součástí harmonického svazku. Pokud čtyři přímky tvoří harmonický svazek, tak každou další přímku protnou v harmonickém svazku.
44. Dokresli čtvrtého do party k B, D, C a využij tvrzení „dvě ze tří“.

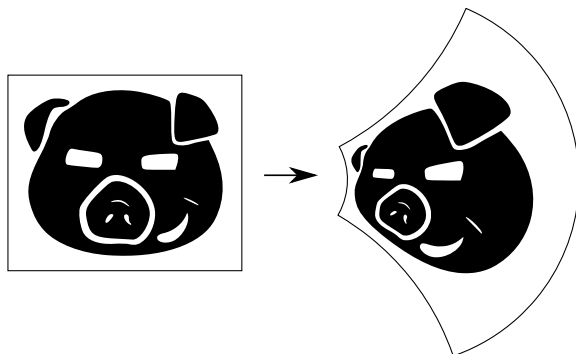
- 45.** Protáhni polopřímku i na druhou stranu a použij „dvě ze tří“.
- 46.** Využij promítací tvrzení z bodu Y . S jeho pomocí je úloha ekvivalentní s $\mathcal{H}(B, X, K, E)$. Teď už je úloha lehkou kořistí pro kolineaci.
- 51.** Převed' na harmonický a využij symetrií harmonických čtveřic.
- 52.** Promítni úhel na kružnici a převed' úlohu na tvrzení o rovnoběžnosti. Zobrať A na nevlastní.
- 53.** Vyber si dvojici úhlů, o které chceš dokázat, že jsou stejné. Zobrať je na kružnici a převed' tím úhlovou podmínku na rovnoběžnost. Pak už můžeš použít kolineaci.
- 56.** Zobrať pomocí tvrzení trojúhelník s kružnicí vepsanou ABC na rovnostranný.
- 56.** Pomocí tvrzení trojúhelník s kružnicí vepsanou zobrať trojúhelník na rovnostranný.

Projektivní geometrie II – Naprosto nesouvisející diagramy

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává druhý díl seriálu o projektivní geometrii. V prvním díle jsme se seznámili s afinními zobrazeními, dvojpoměry a s tím, jaké to je, když se na obrázek koukáme z jiného úhlu pohledu – pomocí perspektivy a kolineace. V tomto díle si ukážeme, že se nemusíme omezovat jen na koukání se na obrázek jinak, ale že někdy jej můžeme úplně celý překreslit. Začneme trochu komplexněji, poté si ukážeme, že inverzí možno mínit je i něco jiného než slov pořadí ve větě špatné. Dále se vydáme na výpravu až k pólům a následně zavedeme dualitu. Zjistíme, že ve správném slova smyslu přímky a kružnice můžeme považovat za ten samý objekt. A že zase v jiném kontextu můžeme zaměňovat přímky za body a naopak.



Také bychom rádi upozornili na fakt, že druhý a třetí díl se budou zabývat dosti odlišnými tématy, a tedy k pochopení třetího dílu nebude potřeba pochopit díl druhý a naopak. Ale samozřejmě nic Ti nebrání pochopit díly oba :).

Úvod do komplexních čísel

Komplexní čísla si zavedeme trochu netradičně, a to pomocí jejich geometrické představy.¹ Komplexní čísla jsou rozšířením čísel reálných a ty si můžeme představit na číselné ose. Každý bod na této ose pak představuje jedno reálné číslo. Pokud reálná čísla leží na přímce, přirozeným rozšířením se zdá být tedy rovina. Libovolný bod v této rovině pak představuje komplexní číslo, přičemž počátek bude odpovídat číslu 0. S čísly bychom ale chtěli umět dělat i nějaké operace, například je sčítat, násobit a podobně. Je tedy trochu otázkou, jak tyto operace zavést pro body v rovině. Můžeme se inspirovat u reálných čísel.

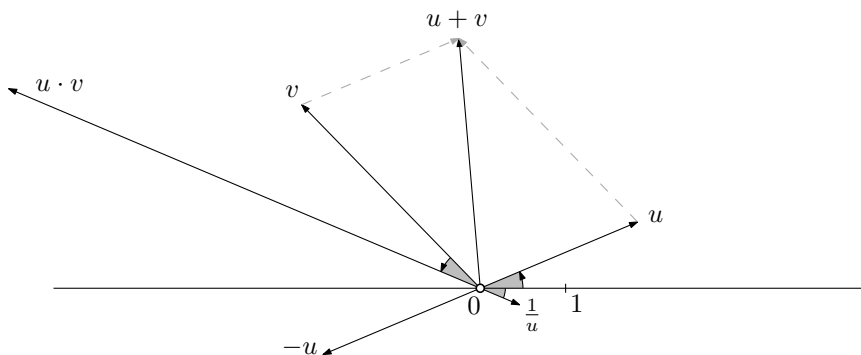
Sčítání komplexních čísel

Zamysleme se nad tím, jak se sčítají reálná čísla. Jak jsme si už řekli, reálná čísla si můžeme představit jako body na číselné ose. Na to, abychom je sečetli, si můžeme představit, že z počátku vede do každého z nich šipka². Součet pak získáme jednoduše tak, že dané šipky přiložíme za sebe a výsledný bod, na kterém druhá šipka skončí, pak nazveme součtem. Naprosto obdobně si můžeme definovat sčítání na komplexních číslech. Představíme si šipky vedoucí z počátku do daných dvou bodů v rovině a za jejich součet budeme považovat bod, který dostaneme, pokud položíme dané dvě šipky za sebe. Když už umíme komplexní čísla sčítat, naprosto obdobně se můžeme podívat na odčítání. V reálných číslech si můžeme všimnout, že rozdíl dvou reálných čísel získáme, když druhou šipku připojíme za první ale tentokrát jejím „koncem se šipkou“. A stejně tak to bude platit i v komplexních číslech.

Poznámka 1. Vidíme, že šipky a body v komplexní rovině spolu souvisí. Každý bod jednoznačně určuje šipku od počátku do tohoto bodu. Analogicky každá šipka od počátku určuje svůj koncový bod. Dále uvedené vlastnosti tak platí i pro vektory i pro body, záleží jen, jak se na to zrovna koukáme. Pro rozlišení těchto dvou pohledů se vektory běžně značí malými písmeny a body písmeny velkými.

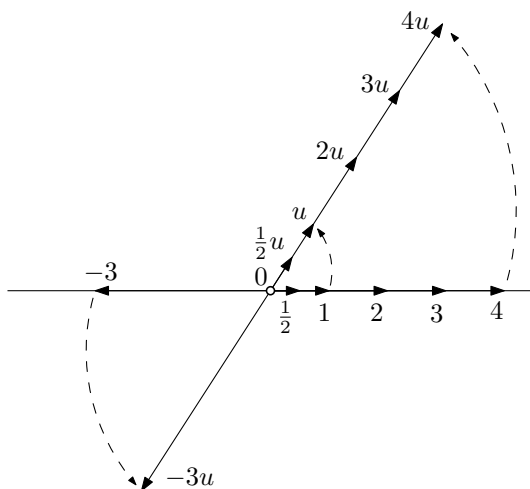
¹Doporučujeme se podívat na video *Mírka Olšáka* (již vysloužilého organizátora MKS) na toto téma. Najdeš ho na odkaze youtube.com/watch?v=Ip69mJyF-8s.

²Odborně pak můžeme potkat tuto šipku pod krycím názvem *vektor*.



Násobení komplexních čísel

Násobení je už trochu zajímavější. Rozmysleme si nejprve, jak by mělo fungovat násobení komplexního čísla reálným. Mějme nějaké komplexní číslo u . Z naší definice sčítání komplexních čísel už umíme říct, jak by tento součin měl vypadat. Například $2u = u + u$, tedy $2u$, vznikne „natáhnutím“ šipky odpovídající u dvakrát. Obdobně $3u$, $4u$, $\frac{1}{2}u$, $-3u$ by bylo natáhnutím šipky u tolikrát, kde natáhnutí -3 krát si můžeme představit jako překlacení šipky podle počátku a pak „natažení“ příslušnou již kladnou reálnou konstantou – v tomto případě 3.



Už tedy víme, jak se násobí komplexní číslo reálným. Díky komutativitě se na to můžeme podívat z druhé strany. Místo toho, abychom se na dané násobení dívali jako násobení komplexního čísla s reálným, podívejme se, co se děje, když vynásobíme reálné číslo komplexním? No nejprve se šipka určující dané reálné číslo otočí kolem počátku o úhel, který komplexní číslo u svírá s reálnou osou, a poté se vynásobí

velikostí u . Z toho už můžeme odvodit, jak bude fungovat obecné násobení dvou komplexních čísel. Mějme komplexní číslo v a chceme ho vynásobit číslem u . Pak toto násobení bude s šipkou v dělat to samé jako předtím násobení reálného čísla číslem u . Tedy nejprve šipku do v otočí o úhel mezi u a kladnou reálnou poloosou a poté šipku velikosti v vynásobí velikostí u . Obecně tedy pro násobení dvou komplexních čísel platí, že násobení sčítá úhly, které dané dvě šipky svírají s reálnou osou, a násobí velikosti. Obdobně dělení bude odčítat úhly a dělit velikosti.

Definice 2. Mějme komplexní číslo x , pak symbolem $\bar{x}$ značíme *komplexně sdružené číslo* k x a jde o komplexní číslo, které dostaneme překlopením x v osové souměrnosti podle reálné osy.

Poznámka 3. Můžeš si rozmyslet, že komplexní sdružování je distributivní prakticky na všem. Například pro komplexní čísla u a v platí, že $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$ nebo $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$.

Cvičení 4. Rozmysli si, že reálná čísla jsou právě ta, pro která platí $x = \bar{x}$. A že součin $x\bar{x}$ je vždy kladný reálný.

Definice 5. (velikost komplexního čísla) *Velikostí* komplexního čísla z nazveme³ $\sqrt{z\bar{z}}$ a budeme ji značit $|z|$ (z předchozího cvičení víme, že odmocňovaná hodnota je vždy kladné reálné číslo).

Poznámka 6. Pokud jsi se už dříve setkal(a) s komplexními čísly, tato geometrická definice Ti může přijít trochu matoucí. Běžněji (například na středních školách) se komplexní čísla zavádějí pomocí imaginární jednotky i , která je definována jako řešení rovnice $x^2 = -1$. Přestože toto zavedení k pochopení seriálu potřeba nebude a vystačíme si pouze s geometrickou představou komplexních čísel, nastíníme alespoň, jak spolu dané dva pohledy souvisejí a že se vlastně jedná o tutéž věc. Pokud bychom si v naší komplexní rovině definovali souřadnicový systém, pak imaginární jednotka i by se nacházela na souřadnicích $[0, 1]$. Ve škole se zavádí komplexní čísla jako všechna čísla ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla. Čísla a, b tak odpovídají souřadnicím komplexního čísla v dané komplexní rovině. Dále se typicky definují algebraické vlastnosti komplexních čísel – například platí, že $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ nebo $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$. Tyto vlastnosti si již dokazovat nebudeme, protože pro nás nebudou potřebné. Ale můžeš si rozmyslet, že z geometrické definice komplexních čísel plynou i tyto vlastnosti.

Komplexní dvojpoměr

V prvním díle seriálu jsme si definovali dvojpoměr na různých objektech. Zkusme dvojpoměr bodů na přímce zapsat v řeči komplexních čísel. Mějme čtyři různá kom-

³Můžeš si všimnout, že velikost komplexního čísla tak odpovídá velikosti vektoru, který dané komplexní číslo určuje.

plexní čísla A, B, C, D na přímce, pak dvojpoměr (A, B, C, D) je roven

$$\frac{(B - A)(D - C)}{(C - B)(A - D)}.$$

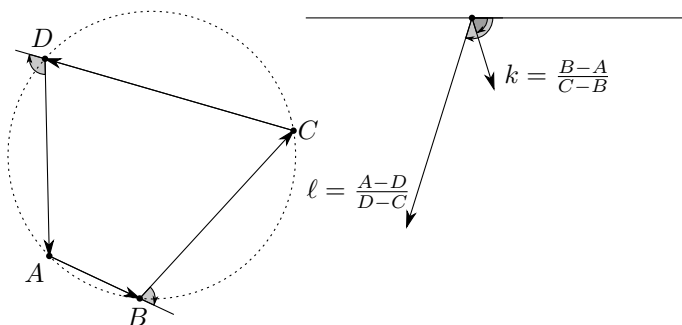
Pokud A, B, C, D leží na přímce, pak velikost výsledného komplexního čísla bude rovna standardnímu dvojpoměru. Zároveň všechna čísla $B - A, D - C, C - B, A - D$ svírají s reálnou osou stejný úhel α . Výsledné komplexní číslo bude tedy s reálnou osou svírat úhel $2\alpha - 2\alpha = 0$, takže bude reálné. Orientace rozdílů je stejná jako orientace úseček v definici z prvního dílu, takže znaménko se také shoduje. Na přímce se tedy komplexní dvojpoměr úplně shoduje se standardním.

Tím, že využíváme komplexní čísla, se už nebudeme omezovat na body na přímce. Tímto výrazem tedy značíme *komplexní dvojpoměr* obecné čtveřice komplexních čísel. Zkus si rozmyslet, že tyto dvojpoměry jsou i v komplexním tvaru jednoznačné, takže $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, právě když $X = Y$.

Pro body, co neleží na přímce, bude hodnota jejich dvojpoměru rovna nějakému komplexnímu číslu. Nás ale bude víc zajímat, kdy může hodnota dvojpoměru vyjít reálné číslo. Už víme, že to platí pro čtyři body na přímce. Pojdme se podívat kdy jindy.

Tvrzení 7. Reálnou hodnotu dvojpoměru mají čtyři komplexní čísla, právě když leží všechny na jedné přímce nebo kružnici.

Důkaz. Všimni si, že komplexní číslo $X - Y$ určuje směr přímky XY . Označme podíly $k = \frac{B-A}{C-B}$ a $\ell = \frac{D-C}{A-D}$. Pokud vynásobíme číslo $C - B$ číslem k , dostaneme komplexní číslo $B - A$. Takže z násobení komplexních čísel svírá k s reálnou přímkou stejný úhel, jako je úhel mezi přímkami BC a AB . Aby výsledný dvojpoměr byl reálný, musí svírat k a ℓ s reálnou přímkou úhly α , respektive β takové, že $\alpha + \beta = 0$ modulo 180° . Takže tato podmínka je ekvivalentní s tím, že v čtyřúhelníku $ABCD$ je součet protilehlých úhlů 180° , tedy $ABCD$ z obvodového úhlu leží na kružnici nebo na přímce. $\square$



Poznámka 8. Zbylé případy pořadí bodů se dají vyřešit analogicky, nebo celý problém úhlit orientovaně.

V další části seriálu se nám právě z tohoto důvodu bude hodit vnímat kružnice a přímky dohromady jako ten samý objekt.

Různá rozšíření rovin

V prvním díle jsme si zadefinovali rozšíření roviny $\mathbb{R}^2$. V tomto díle se budeme zabývat podobným rozšířením komplexní roviny. K této rovině přidáme jeden *nevlastní bod* v nekonečnu, budeme ho značit ∞ . Všechny přímky pak budou tímto bodem procházet. Rovnoběžné přímky se tedy „dotýkají“ v tomto nevlastním bodě. Toto rozšíření nazveme *projektivní komplexní čísla*⁴.

Přímky tak můžeme vnímat jako kružnice se středem v nekonečnu. Může se Ti zdát divné, že střed takové kružnice pak na ní leží. To je tím, že v projektivním světě střed kružnice není bodem, který by byl pro kružnici zajímavý.

Dodefinujeme si jak se komplexní sdružení chová s nevlastním bodem $\overline{\infty} = \infty$.

Poznámka 9. Existuje důvod, proč jsme teď přidali jen jeden bod, ale v prvním díle celou přímku. Obecně k prostoru dimenze d potřebujeme přidat prostor dimenze $d - 1$, aby se z něj stal projektivní. V prvním díle jsme měli rovinu, kde je každý bod dán dvojicí reálných čísel neboli má dimenzi dva. Tady si sice kreslíme komplexní čísla zase do roviny, ale každý bod nám určuje jedno komplexní číslo, má tedy dimenzi jedna.

Poznámka 10. Doplníme si, jak se chová komplexní dvojpoměr s nevlastním bodem. Analogicky jako v prvním díle zdegeneruje do poměru

$$(A, B, C, \infty) = -\frac{B - A}{C - B} = \frac{A - B}{C - B}.$$

Dávej pozor, že opravdu využíváme jiné rozšíření než v prvním díle. Taky se může stát, že budeme rozšíření kombinovat. Nejdříve si třeba přidáme jeden nevlastní bod, pak chvíli budeme pracovat s tímhle rozšířením, následně ho smažeme a přidáme nevlastní přímku. Takové přidávání a odebírání bodů je většinou v pořádku, jen je občas potřeba si dát pozor, že tím opravdu neztrácíme žádné informace. Třeba když by úloha tvrdila, že nějaké čtyři nevlastní body tvoří harmonickou čtveřici, tak si ji musíme nejdříve někam promítnout, než na ty body zapomeneme.

Přímky a kružnice v tomto novém světě budou tak moc podobné, že si zavedeme pojem pro objekt, který je přímkou nebo kružnicí. Takové objekty budeme nazývat *kružímky*⁵. Všimni si, že kdykoli máme trojici bodů, tak existuje právě jedna kružímka, která jimi prochází. Z předchozího tvrzení ještě navíc víme, že čtyři body mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru, právě když leží na kružímce. Z toho plyne následující tvrzení.

⁴Také se občas nazývá *invertivní rovina* či *komplexní projektivní přímka*.

⁵Anglicky se nazývají *clines*.

Tvrzení 11. Mějme zobrazení f projektivních komplexních čísel takové, že čtyři body mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru, právě tehdy, když jejich obrazy mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru. Pak toto zobrazení zobrazuje kružímky na kružímky. Speciálně pokud nějaké zobrazení zachovává dvojpoměry, tak zobrazuje kružímky na kružímky.

Důkaz. Označme A, B, C tři body v komplexní rovině. Pak body X , pro které (A, B, C, X) je reálné, jsou právě ty body, které leží na kružímce procházející body A, B, C . Pro každé takové X tedy platí, že $(f(A), f(B), f(C), f(X))$ je reálné. Z toho ale plyne, že $f(X)$ leží na kružímce určené body $f(A), f(B), f(C)$. Takže obrazy všech bodů na původní kružímce leží na nové kružímce. Ale protože jsme chtěli, aby byl reálný právě tehdy, tak můžeme tento argument aplikovat i obráceně. Začneme cílovou kružímkou a zobrazíme ji zpět. Tím dostaneme, že výsledkem tohoto zobrazení je opravdu celá kružímka, a ne jen její část. $\square$

Möbiiovská zobrazení

Některá standardní zobrazení v rovině se dají snadno popsat pomocí komplexních čísel.

- (i) **Posunutí** je jen přičtení nějakého komplexního čísla. Takže $f(x) = x + c$, kde c je komplexní.
- (ii) **Stejnolehlost** se středem v počátku je vynásobení reálným číslem. Takže $f(x) = rx$, kde r je reálné.
- (iii) **Rotace** se středem v počátku je vynásobení nějakým komplexním číslem, které má velikost jedna. Takže $f(x) = kx$, kde $|k| = 1$.
- (iv) **Spirální podobnost** se středem v počátku je vynásobení obecným komplexním číslem. Takže $f(x) = cx$ pro c komplexní.

Rozmysli si, že všechna zatím zmíněná zobrazení zachovávají komplexní dvojpoměry. Zaměříme se ještě na jednu funkci v komplexních číslech. Konkrétně na *komplexní inverz*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Toto zobrazení není definované pro x rovné počátku nebo nevlastnímu bodu, takže si ho rozšíříme tak, že $f(0) = \infty$ a $f(\infty) = 0$.

Tvrzení 12. Komplexní inverz zachovává dvojpoměry.

Důkaz. Do vzorce pro výpočet komplexního dvojpoměru dosadíme čtveřici $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$:

$$\frac{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D}\right)} = \frac{\left(\frac{A-B}{A \cdot B}\right) \left(\frac{C-D}{C \cdot D}\right)}{\left(\frac{B-C}{B \cdot C}\right) \left(\frac{D-A}{D \cdot A}\right)} = \frac{(A-B)(C-D)}{(B-C)(D-A)} = \frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}.$$

Takže pro každé čtyři body A, B, C, D platí $(A, B, C, D) = (\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D})$. Pro úplné dokončení důkazu je potřeba si rozmyslet, že tuto vlastnost splňuje, i když jeden z bodů je nevlastní. $\square$

Z tohoto tvrzení, jak už víme, plyne, že komplexní inverz zobrazuje kružímky na kružímky. To nám dává lepší geometrickou představu, jak se komplexní inverz chová.

Prohlédněme si nyní náš arzenál komplexních funkcí, které zachovávají dvojpoměry, a tedy i kružímky:

- (i) $f_1(x) = x + c$,
- (ii) $f_2(x) = cx$,
- (iii) $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

Komplexní číslo c zde může být libovolné. Všechny funkce, které vzniknou jejich složením, pak také zachovávají dvojpoměry i kružímky. Těmto funkcím se říká *Möbiovská zobrazení*⁶.

Tvrzení 13. Všechna Möbiovská zobrazení se dají zapsat ve tvaru lineární lomené funkce $\frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou komplexní čísla. A všechna zobrazení tohoto tvaru, která jsou bijektivní, určují Möbiovská zobrazení.

Tvrzení 14. Mějme komplexní čísla A, B, C, A', B', C' . Pak existuje právě jedno Möbiovské zobrazení, které zobrazuje $A \rightarrow A', B \rightarrow B'$ a $C \rightarrow C'$.

Důkaz. Takové zobrazení musí zachovávat dvojpoměry neboli pro všechna X platí, že $(A, B, C, X) = (A', B', C', X')$. Z jednoznačnosti dvojpoměrů existuje nanejvýš jedno zobrazení, které tuto podmínku splňuje. Vyjádříme X' ze vztahů

$$(A, B, C, X) = (A', B', C', X'),$$

$$\frac{(B - A)(X - C)}{(C - B)(A - X)} = \frac{(B' - A')(X' - C')}{(C' - B')(A' - X')}.$$

Komplexní čísla A, B, C, A', B', C' jsou pro nás nějaké konstanty. Převvedeme oba zlomky na stejnou stranu. Po roznásobení výrazu jmenovateli a roznásobení závorek tedy dostaneme výraz ve tvaru:

$$u_1 X X' + u_2 X + u_3 X' + u_4 = 0,$$

kde u_1, u_2, u_3 a u_4 jsou nějaké konstanty v komplexních číslech, protože vznikly násobením a sčítáním konstant. To ale umíme upravit do tvaru

$$v_1(X + v_2)(X' + v_3) - v_4 = 0$$

pro nějaká konstantní v_1, v_2, v_3, v_4 . Z toho už umíme vyjádřit X' :

$$(X' + v_3) = \frac{v_4}{v_1(X + v_2)},$$

$$X' = \frac{v_4}{v_1 X - v_1} - v_3,$$

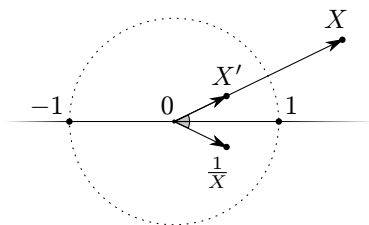
⁶Pro geometrickou představu doporučujeme video [youtube.com/watch?v=0z1flsUNhO4](https://www.youtube.com/watch?v=0z1flsUNhO4).

což je tvar nějaké lineární lomené funkce, takže se jedná o Möbiovské zobrazení. $\square$

Dokonce všechna prostá zobrazení zachovávající dvojpoměry v komplexních číslech jsou Möbiovská. Rozmysli si, že z tvrzení 14 plyne, že pokud se dvě Möbiovská zobrazení shodují na obrazu tří různých bodů, tak už se shodují na všech bodech.

Inverze

Podívejme se znovu na zobrazení $\frac{1}{x}$. To každému komplexnímu číslu přiřadí jiné komplexní číslo, které svírá s reálnou přímkou opačný úhel. Takže pokud toto zobrazení složíme s překlopením podle reálné přímky, bude navíc splňovat, že přímka vedená body x a $f(x)$ vždy prochází počátkem. Toto zobrazení si ještě obohatíme o stejnoolehlost se středem v počátku, výsledným zobrazením se stane *inverze*. Protože vznikne složením s komplexním sdružením, nejedná se již o Möbiovské zobrazení.



Definice 15. *Inverzí* nazveme zobrazení projektivních komplexních čísel ve tvaru

$$f(x) = \overline{\left(\frac{k}{x}\right)} = k/\bar{x},$$

kde k je reálné číslo, kterému říkáme *koefficient inverze*. Protože si můžeme počátek vždy umístit v rovině, kam chceme, zadefinujeme si *střed inverze* jako bod, který budeme považovat za počátek.

Všimni si, že pokud je koeficient ve tvaru $a \cdot b$, pak inverze zobrazí komplexní číslo o velikosti a na komplexní číslo o velikosti b a obráceně.

Tvrzení 16. *Mějme inverzi s kladným koeficientem k , pak množina pevných bodů je kružnice.*

Důkaz. Hledáme všechna X taková, že $k/\bar{X} = \overline{\left(\frac{k}{X}\right)} = X$ neboli $X\bar{X} = k$. Číslo $X\bar{X}$ je rovno $|X|^2$, takže $|X| = \sqrt{k}$. Množina všech takových X tedy leží na kružnici se středem 0 a poloměrem $\sqrt{k}$. Rozmysleme si, že pro každý bod této kružnice už pak platí, že se zobrazí sám na sebe a množinou všech takovýchto bodů je skutečně celá kružnice. $\square$

Z tohoto důvodu se inverzi často říká *kruhová inverze*. A často se nedefinuje svým středem, ale právě touto kružnicí. Oba pohledy na inverzy mají různá využití. Všimni si, že kruhová inverze se omezuje jen na kladné koeficienty. Na druhou stranu se dá rozšířit kruhová inverze o inverzi podle přímky. Chceme nějaké Möbiovské zobrazení

s komplexním sdružením, které bude mít jako množinu pevných bodů přímku. Tím je překlopení podle dané přímky. Pokud tedy budeme mluvit o inverzi podle kružímky, může daná kružímka být i přímkou a pak se jedná o překlopení.

Všimni si, že teď pod pojmem inverze myslíme dvě zobrazení. Jedno je inverze daná středem a koeficientem. Ta neumí inverzi podle přímky. Druhá je inverze podle kružímky. Ta pro změnu nepovoluje inverze se záporným koeficientem.

Tvrzení 17. *Inverze zobrazuje kružímky na kružímky.*

Důkaz. Stačí si všimnout, že k/x zobrazuje kružímky na kružímky a překlopení také.

Zkusme si ale rozmyslet, co se děje s dvojpoměry po inverzi. Zobrazení $\frac{k}{x}$ je zachová. Zbývá aplikovat komplexní sdružení. Tím se akorát na výsledný dvojpoměr aplikuje komplexní sdružení. To znamená, že inverze zachovává reálné hodnoty komplexních dvojpoměrů a komplexní hodnoty komplexně sdruží. $\square$

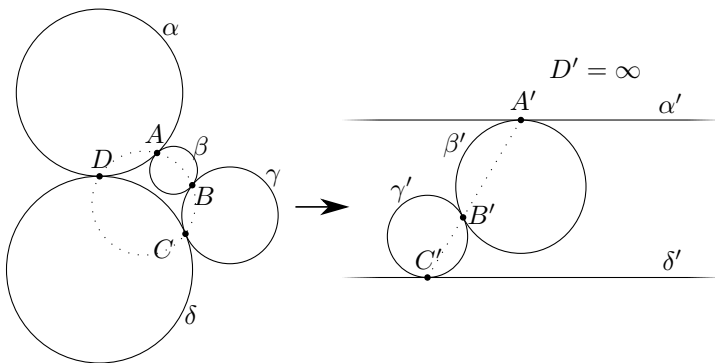
Pozorování 18. *V inverzi je obrazem kružnice procházející počátkem přímka, protože se zobrazí na kružímku procházející nevlastním bodem.*

Tohle pozorování je jeden ze základů, k čemu se inverze běžně v geometrii dá použít. Pokud úloha obsahuje příliš mnoho kružnic procházejících jedním bodem, tak je inverzí můžeme se středem v daném bodě změnit na přímky. Pojďme si to ukázat!

Příklad 19. Mějme čtyři kružnice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takové, že žádné dvě se neprotínají a α se dotýká β v A . Obdobně se β dotýká γ v B , kružnice γ se dotýká δ v C a konečně δ se dotýká α v D . Dokaž, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Řešení. Úlohu zinvertujeme se středem v D . Z kružnic α a δ se stanou přímky. Protože se dotýkají, stanou se z nich rovnoběžné přímky α' a δ' . Kružnice β se zobrazí na kružnici, co se dotýká α' v A' . Kružnice γ se zobrazí na kružnici, která se dotýká δ' v C' a β' v B' . Chceme ukázat, že A', B', C', D' leží na jedné kružímce, ale D' je nevlastní, takže chceme, aby A', B', C' ležely na přímce.

Uvážíme stejnoolehlost se středem v B' zobrazující β' na γ' . Stejnoolehlost zachovává rovnoběžky, takže zobrazí α' na δ' . Takže zobrazí i A' na C' . To ale znamená, že B' leží na přímce $A'C'$, což jsme chtěli dokázat.



Úloha 20. Mějme dvě kolmé přímky p, q s průsečíkem O . Kružnice ω_1 a ω_3 mají střed na p a prochází O . Kružnice ω_2 a ω_4 mají střed na q a prochází O . Označme průsečíky různé od O kružnic $A = \omega_1 \cap \omega_2$, $B = \omega_2 \cap \omega_3$, $C = \omega_3 \cap \omega_4$ a $D = \omega_4 \cap \omega_1$. Dokaž, že A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Úloha 21. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

- (i) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2 , kružnice ω_2 body A_2 a A_3 , kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2 ,
- (ii) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Dokaž, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají.

Tvrzení 22. Pokud je P středem inverze a čárkami značíme obrazy bodů, pak platí $|\angle ABP| = |\angle B'A'P|$.⁷

Důkaz. Zapišeme úhel pomocí dvojpoměru s nevlastním bodem. Komplexní číslo $(A, B, P, \infty) = \frac{A-B}{P-B}$ svírá s reálnou přímkou úhel $\angle ABP$. Po inverzi se dvojpoměr komplexně sdruží, takže

$$(A, B, P, \infty) = \overline{(A', B', \infty, P)}.$$

Následně využijeme permutování dvojpoměrů z prvního dílu a nakonec upravíme znovu pomocí dvojpoměru s nevlastním bodem

$$\overline{(A', B', \infty, P)} = \overline{\left(\frac{1}{(P, A', B', \infty)} \right)} = \overline{\left(\frac{B' - A'}{P - A'} \right)}.$$

Komplexní sdružení nemění velikost svíraného úhlu. Výsledné komplexní číslo tak svírá s reálnou osou úhel $\angle B'A'P$. Takže $|\angle ABP| = |\angle B'A'P|$. $\square$

Poznámka 23. Všimni si, že z toho plyne, že body A, B, A', B' leží na kružnici pro všechna A, B .

⁷Standardní důkaz tohoto tvrzení je přímočaré využití mocnosti, protože ji ale v seriálu moc nevyužíváme, ukážeme si méně tradiční důkaz.

Poznámka 24. Všimni si, že z předchozího důkazu se dá zjistit vlastnosti nějakých poměrů po inverzi. Protože k dokázání úhlu využíváme silnější podmínku.

Toto tvrzení o inverzi z ní dělá ještě silnější nástroj, protože umožňuje přenášet úhly. Občas se už může dokonce vyplatit využít inverzi, i když v zadání žádná kružnice není. Při invertování se hodí si rozmyslet, kolik tak kružnic navíc nám z přímek vznikne a jestli spíš pomůžou, nebo uškodí. Přímky, na kterých leží jen dva body, jako třeba strany trojúhelníka invertovat nemusíme, protože nám nedávají žádnou informaci navíc.

Úloha 25. Mějme kružnice ω_1 a ω_2 , které se protínají v bodech A, B . Na přímce AB leží bod O . Kružnici se středem O a poloměrem $|OA|$ označme Ω . Dále nechť Ω protíná ω_1 v bodech A, X_0 . Přímka X_0A protne ω_2 v X_1 . Analogicky, Ω protne ω_2 v A, Y_0 . Přímka Y_0A protne ω_1 v Y_1 . Průsečík Ω s přímkou AB různý od A označme Z . Dokaž, že $|\angle ZX_1A| = |\angle ZY_1A|$.

Úloha 26. (Shooting lemma) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB . střed oblouku AB označme $\check{S}$. Uvažme dvě přímky p, q procházející $\check{S}$. Přímka p protne ω podruhé v X_0 a BC v X_1 . Obdobně q protne ω podruhé v Y_0 a BC v Y_1 . Dokaž, že X_0, X_1, Y_0 a Y_1 leží na kružnici.

Úloha 27. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a uvnitř jeho stran AC, BC po řadě body D, E . Dokaž, že paty výšek z bodu C na přímky AB, AE, BD, DE leží na jedné kružnici.

Úloha 28. Nechť se kružnice k, l se středy S, T protínají ve dvou různých bodech A, B . Nechť přímka AS protíná l v bodě $C \neq A$. Nechť přímka AT protíná k v bodě $D \neq A$. Dokaž, že přímka AB prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ACD

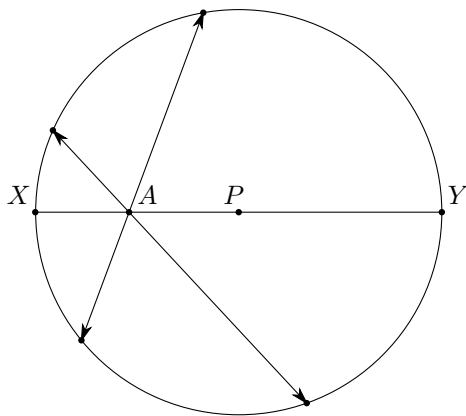
Úloha 29. (IMO 1996) Nechť P je bod uvnitř ABC takový, že

$$|\angle APB| - |\angle ACB| = |\angle APC| - |\angle ABC|.$$

Dokaž, že osy úhlů $\angle ABP$ a $\angle ACP$ protínají přímku AP v jednom bodě.

Tvrzení 30. Mějme v rovině kružnici ω a bod A , který na ni neleží. Pak existuje inverze se středem v A taková, že obraz ω je znovu ω . Neboli že existuje inverze, která kružnici ω „překlápí“ skrz bod A .

Důkaz. Označme P střed ω . Uvažme přímku procházející skrz body PA . Ta protne ω v bodech X, Y . Pak existuje inverze, se středem A a koeficientem $|AX| \cdot |AY|$ zobrazující $X \rightarrow Y$. Kružnice ω je symetrická podle přímky AP . Protože P na téhle přímce leží, bude i výsledná kružnice ω' symetrická podle AP . Takže i výsledná kružnice je kružnice nad průměrem XY . $\square$



Poznámka 31. Koeficientu takové inverze se středem v A , která ω „překlápí“, se také říká *mocnost* bodu A ke kružnici ω .

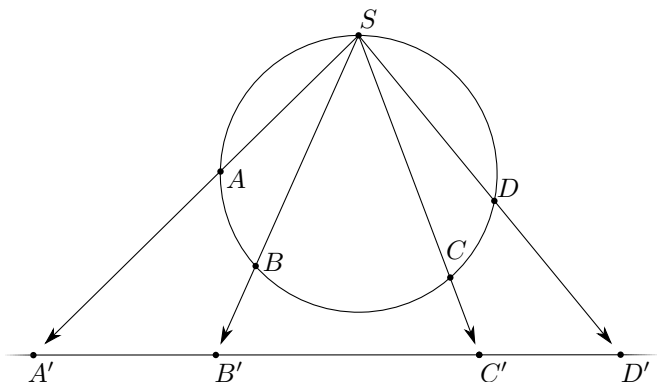
Dvojpoměry na kružnicích

Komplexní dvojpoměr jsme navrhli tak, aby se shodoval se standardním dvojpoměrem na přímce. Jenže v prvním díle jsme si definovali dvojpoměr i na kružnici. Komplexní dvojpoměr na kružnici nám vyšel reálný, ale chovají se obě definice na kružnici opravdu stejně? Jen pro rozlišení v této části budeme značit na chvíli definici dvojpoměru z prvního dílu pomocí hranatých závorek $[A, B, C, D]$.

Uvažme čtyři komplexní čísla A, B, C, D ležící na kružnici. Pak libovolná inverze se středem S na ω zobrazí ω na nějakou přímku. Na této přímce víme, že se naše dvě definice chovají stejně. Označíme-li tedy čárkami obrazy v této inverzi, pak $(A', B', C', D') = [A', B', C', D']$. Protože inverze zachovává reálné hodnoty komplexních dvojpoměrů, tak platí $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$. Z prvního dílu víme, že dvojpoměr na kružnici získáme pomocí projekce nějakého dvojpoměru na přímce skrz bod na kružnici. Neboli

$$[A', B', C', D'] = [SA', SB', SC', SD'] = [A, B, C, D].$$

Poslední rovnost plyne z toho, že v inverzi platí, že S, X a X' leží na přímce. Takže $[A, B, C, D] = (A, B, C, D)$. $\square$



Takže už můžeme v klidu používat dvojpoměry na kružnicích a nemusíme se odkazovat na to které, protože se obě definice chovají stejně. Pojďme se s tímto novým vzhledem znovu podívat na harmonické čtyřúhelníky.

Jak už z prvního dílu víme, harmonické čtyřúhelníky jsou ty, které mají hodnotu dvojpoměru rovnou -1 . Pojďme se podívat, co nového o nich víme, když využijeme komplexní dvojpoměr.

Tvrzení 32. Pro harmonický čtyřúhelník platí $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$.

Důkaz. To, že je daný čtyřúhelník harmonický, znamená, že hodnota komplexního dvojpoměru je rovna -1 neboli

$$\frac{(B - A) \cdot (D - C)}{(C - B) \cdot (A - D)} = -1.$$

Takže

$$\frac{|B - A| \cdot |D - C|}{|C - B| \cdot |A - D|} = 1,$$

což po pronásobení $|C - B| \cdot |A - D|$ dává přesně rovnost, kterou jsme chtěli ukázat. $\square$

Skládáme inverze

Tvrzení 33. Složení dvou inverzí, které mohou mít různé středy, je Möbiovské zobrazení.

Důkaz. Inverzi se středem v P můžeme zapsat v rovině s počátkem 0 jako

$$\overline{\left(\frac{k}{x - P} \right)} + P.$$

Když složíme dvě taková zobrazení, tak se dvě komplexní sdružení vyruší a zbyde nějaká lineární lomená funkce neboli Möbiovské zobrazení. $\square$

Lemma 34. (Kouzelné inverzní lemma – KIL) Řekneme, že konfigurace je hezká, pokud obsahuje kružímku k a body A, B , které jsou svoje inverzy podle k . Pak pokud zobrazíme hezkou konfiguraci pomocí jakékoli inverze f , dostaneme znovu hezkou konfiguraci.

Důkaz. Čárkou značíme obrazy v inverzi f .

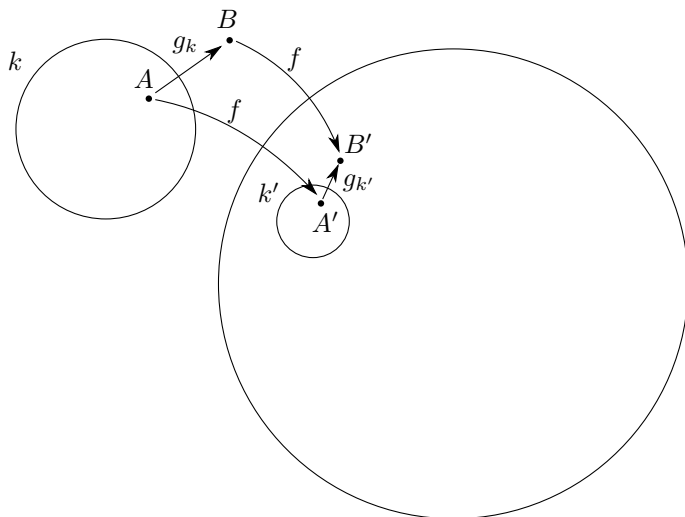
Označme g_k inverzi podle k a $g_{k'}$ inverzi podle k zobrazeného pomocí f . Dále označme $A' = f(A)$ a $B' = f(B)$. Zobrazení $f(g_k(X))$ je Möbiovské, protože se jedná o složení dvou inverzí. Obdobně zobrazení $g_{k'}(f(X))$ je Möbiovské. Podíváme se na obraz nějakého bodu M ležícího na k .

- (i) Nejprve se podívejme na zobrazení $f(g_k(X))$. Protože M leží na k , tak se zobrazí pomocí $g_k(X)$ sám na sebe. Takže v tomto zobrazení $M' = f(M)$.
- (ii) Podle $g_{k'}(f(X))$ nejdříve zobrazíme M pomocí f . Tím dostaneme $M' = f(M)$. Pak zobrazíme M' podle $g_{k'}$. Ale protože M' leží na k' , tak se zobrazí sám na sebe.

Obě zobrazení se shodují na obrazech alespoň tří bodů na k a jsou Möbiovská, takže už se shodují na všech bodech. Tedy

$$\begin{aligned} f(g_k(A)) &= g_{k'}(f(A)), \\ f(B) &= g_{k'}(A'), \\ B' &= g_{k'}(A'). \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že B' je opravdu obraz A' podle k' . Neboli tvoří hezkou konfiguraci. □



Příklad 35. Mějme kružnici ω se středem O a bod A vně této kružnice. Kružnice δ se středem A a poloměrem $|AO|$ protne ω v bodech P, Q . Označme A' invertované A podle kružnice ω . Dokažte, že PQ je osa úsečky $A'O$.

Řešení. Konstrukce tvořená kružnicí δ , bodem A a bodem v nekonečnu ∞ tvoří hezkou konfiguraci. Tu zinvertujeme podle ω . Z δ se stane přímka, protože prochází středem ω , konkrétně přímka PQ . Z bodu A se stane A' a z ∞ se stane O . Takže z tvrzení *KIL* je O obraz A' podle PQ . To ale už víme, že je překlopení. Takže PQ je osa $A'O$.

Poznámka 36. Z tvrzení *KIL* obecně plyne, že pokud se úloha zabývá jen otázkou inverzů, můžeme ji jakkoli zinvertovat a dostaneme ekvivalentní úlohu.

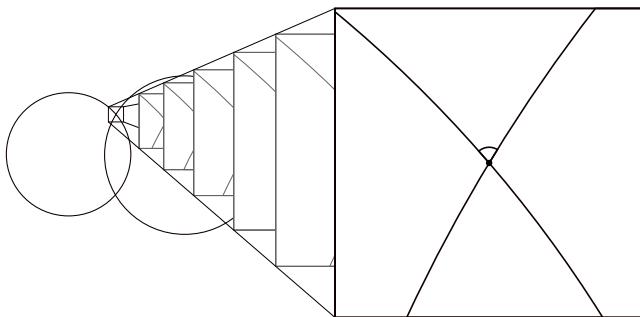
Úloha 37. V trojúhelníku ABC označme ω kružnici se středem A a poloměrem $|AB|$. Dále necht' je D inverzí bodu C podle ω . Jako X označme překlopené A podle přímky DB . Nakonec budiž O inverzí X podle ω . Dokaž, že O je středem kružnice opsané ABC .

Úloha 38. Mějme harmonický čtyřúhelník $ABPC$. Označme ω kružnici procházející A a dotýkající se BC v B . Analogicky Ω je kružnice procházející A a dotýkající se BC v C . Druhý průsečík ω a Ω označíme X . Dokaž, že X a P jsou osově souměrné podle BC .

Úhly mezi kružičkami

Zdefinujeme si úhel mezi dvěma kružnicemi, které se protínají, jako úhel svíraný jejich tečnami ze společného bodu. Představme si to tak, že se podíváme opravdu blízko jejich průsečíku. Při přiblížení vypadají skoro jako přímky, takže svírají nějaký úhel. Analogicky úhel mezi kružnicí a přímkou je úhel mezi tečnou v průsečíku s danou přímkou.

Všimni si, že pokud se dvě kružnice protínají ve dvou bodech, tak v obou mají mezi sebou stejný úhel.



Tvrzení 39. Möbiovská zobrazení zachovávají úhly mezi kružičkami.

Pozorování 40. *Z předchozího tvrzení plyne, že inverze úhly mezi kružinkami překlápí, takže také zachovává jejich velikost.*

Formální důkaz tohoto tvrzení je nad rámec seriálu. Ukážeme si ale náhled, proč by něco takového mělo platit. Velikost úhlu je lokální vlastnost neboli velikost úhlu umíme poznat, ať se na bod díváme jakkoli blízko, nezajímá nás vzdálené okolí v obrázku. Když se podíváme na Möbiovské zobrazení „hodně blízko“, chová se jako afinní. Okolí bodu nějak pootočí a zachová přímky. Ale zároveň, protože je Möbiovské, zachovává kružnice. Ale všechna afinní zobrazení, která zachovávají kružnice, jsou podobná zobrazení, takže zachovávají i úhly.

Kolmé kružnice

Toto tvrzení dává vzniknout kružnicím, které jsou na sebe kolmé. Ty se v mnoha ohledech chovají pěkně.

Tvrzení 41. *Kružnice ω a δ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když obraz δ v inverzi podle ω je zase δ .*

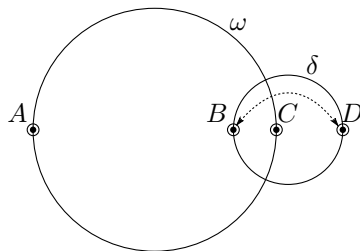
Důkaz. Protože se úloha zabývá jen otázkou inverzů, můžeme podle tvrzení KIL celou situaci jakkoli zinvertovat a dostaneme ekvivalentní úlohu. Zinvertujeme celou úlohu podle jednoho průsečíku ω a δ . Tím se z kružnic stanou přímky. Obraz δ' podle ω' je δ' , právě když jsou tyto přímky na sebe kolmé. Takže δ se zobrazí na δ podle ω , právě když jsou kolmé. $\square$

Tvrzení 42. *Mějme kružnice ω , δ , které se protínají. Přímka p prochází středy obou z nich a protíná ω v A , C a δ v B , D . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) *Kružnice ω a δ jsou na sebe kolmé.*
- (ii) *Čtveřice bodů (A, B, C, D) je harmonická.*

Důkaz. Označme B' obraz B v inverzi podle ω . Pak protože inverze zachovává dvojpoměry, víme, že $(A, B, C, B') = (A, B', C, B)$. Z přepočítávání dvojpoměrů z prvního dílu dostaneme $(A, B, C, B') = \frac{1}{(A, B', C, B)}$. Takže když označíme $x = (A, B, C, B')$, platí $x = \frac{1}{x}$. Tedy x je rovno 1 nebo -1 . Ale kdyby $x = 1$, tak A, B, C, B' nejsou různé body, z čehož plyne $x = -1$. Takže (A, B, C, B') je harmonická.

Tudíž (A, B, C, D) je harmonická, právě když $D = B'$, což nastane, právě když ω v inverzi zobrazí δ samu na sebe neboli právě když jsou na sebe kolmé. $\square$



Poznámka 43. Tento trik, ve kterém jsme projektivně zobrazili (A, B, C, D) na nějak zpermutovanou čtveřici A, B, C, D a tím ukázali, že je harmonická, může občas usnadnit dokazování harmonických čtveřic. Zkus si podobným způsobem dokázat větu *Ceva–Menelaus* z prvního dílu jen pomocí promítání dvojpoměrů.

Úloha 44. Mějme kružnici ω se středem O . Na ω leží bod S . Na polopřímce OS leží bod X . Dále X' je obraz bodu X v inverzi podle ω . Na ω leží bod A . Dokaž, že AS je osa úhlu XAX' .

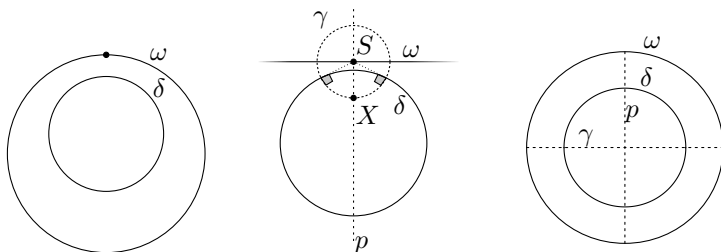
Úloha 45. Mějme dvě kolmé kružnice ω a δ se středy O a S . Přímka OS protíná ω v A tak, že O leží mezi S a A . Jeden průsečík ω a δ označíme X . Přímka AX protne podruhé v Y . Dokaž, že $YS \perp OS$.

Lemma 46. Pro dvě kružnice ω a δ , které se neprotínají, existuje Möbiovské zobrazení, které je zobrazí na soustředné kružnice.

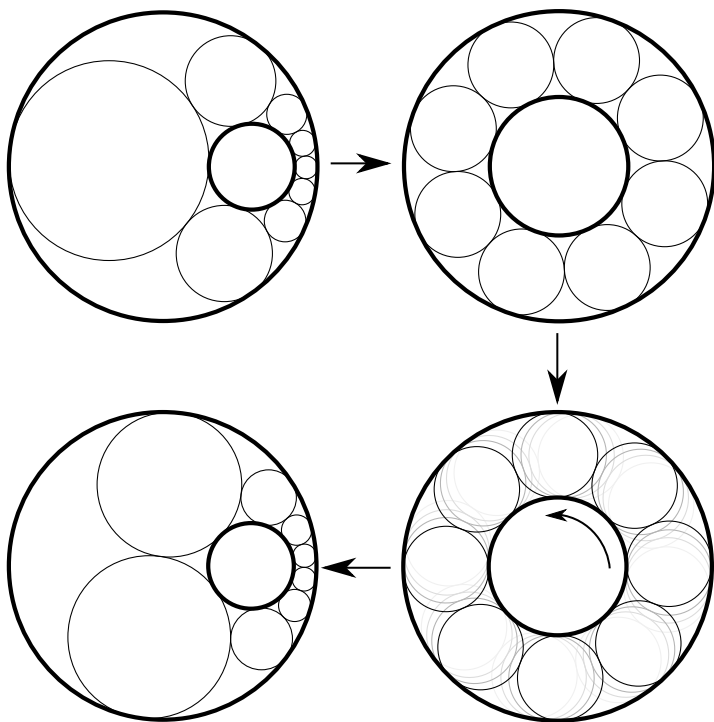
Důkaz. Všimni si, že pokud jsou dvě kružnice soustředné, tak mají více společných os symetrií. Pokusíme se tedy sestavit pomocí inverzí dvě přímky, které jsou obě kolmé na zadané kružnice. Po těchto zobrazeních už tyto kružnice musí být soustředné.

Začneme inverzí se středem v jakémkoli bodě na kružnici ω . Tím se z ω stane přímka a δ bude kružnice, která ω neprotíná. Označme S patu výšky ze středu kružnice δ na přímku ω . Sestrojíme kružnici γ kolmou na δ se středem v S . Tu sestrojíme tak, že z S vedeme tečny SK, SL k δ kružnice o poloměru $|SK|$ je pak kolmá na δ .

Označme p přímkou kolmou na ω procházející S . Pak platí tyto kolmosti: $p \perp \gamma$, $p \perp \omega$, $p \perp \delta$, $\gamma \perp \delta$, $\gamma \perp \omega$. Označme X jeden z průsečíků γ a p a invertujme se středem v X . Tím se z γ a p stanou kolmé přímky. Z ω a δ budou znovu kružnice. Přímky γ i p jsou na obě kružnice kolmé neboli ω a δ jsou soustředné. Toto zobrazení jsme dostali jako složení dvou inverzí, tedy je Möbiovské. $\square$



Věta 47. (Steinerovo porisma) Mějme dvě kružnice ω a Ω , které se neprotínají a mezi ně se dá vepsat pás kružnic, které se navzájem dotýkají. Pak ať nakreslíme první kružnici pásu kdekoli tak, aby se dotýkala ω i Ω , tak tato kružnice je součástí nějakého uzavřeného kružnicového pásu, který se dotýká ω i Ω .



Důkaz. Protože se úloha zabývá pouze kružnicemi a tím, jak se dotýkají, můžeme na ni aplikovat jakékoli inverze a Möbiovská zobrazení. Z předchozího lemmatu zobrazíme kružnice ω a Ω na soustředné. V takovém případě můžeme získat jakýkoli nový kružnicový pás pouhým otočením již známého pásu podle středu ω . Aplikováním inverzního Möbiovského zobrazení dostaneme zpět původní konfiguraci s novým pásem. $\square$

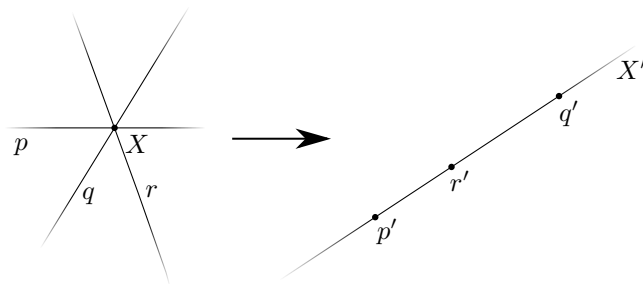
Dualita

Poznámka 48. V této části seriálu se vrátíme do rozšíření roviny z prvního dílu a nebudeme tedy používat komplexní čísla.

Obecný princip duality

Body a přímky v rovině se chovají do určité míry podobně, jenom „obráceně“. Jakékoli dva různé body jednoznačně určují přímku a naopak jakékoli dvě nerovnoběžné přímky mají jednoznačný průsečík. V následující definici si zavedeme „prohazování“ přímek a bodů.

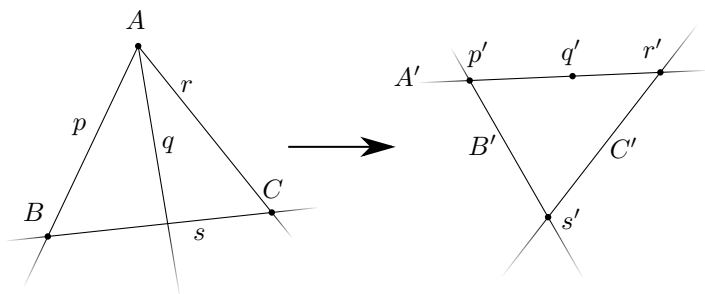
Definice 49. Diagramem⁸ $\mathcal{D}$ rozumíme nějakou množinu přímek a množinu bodů. Duální diagram $\mathcal{D}'$ pak je takový diagram, ve kterém každému bodu A v $\mathcal{D}$ odpovídá duální **přímka** A' v $\mathcal{D}'$, podobně každé přímce p v $\mathcal{D}$ odpovídá duální **bod** p' , a navíc kdykoli bod A leží na přímce p , tak bod p' leží na přímce A' .



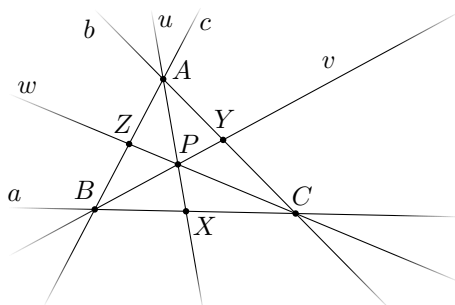
Příklad 50. Mějme tři přímky p, q, r procházející bodem A . Na p leží bod B a na r leží bod C . Přímku BC označme s . Zdualizuj diagram.

Řešení. Nakreslíme si přímku A' . Protože p, q, r procházejí bodem A , tak p', q', r' leží na A' . Tak si je dokreslíme. Na p leží B , což znamená, že B' prochází bodem p' . Analogicky C' prochází r' . Jako s je označena přímka BC , takže v duálním diagramu je s' průsečík B', C' .

⁸Víte, kolik váží jeden řecký bůh? – Jeden diagram :D.



Cvičení 51. Zkus si překreslit následující obrázek tak, že nahradíš přímky za body.



V dosavadních příkladech jsme dualizovali pouze konečné diagramy. V následující sekci si ukážeme, že toho ve skutečnosti můžeme dualizovat mnohem víc. Ukáže se, že celá projektivní rovina je sama k sobě duální.

Tento pohled na dualitu budeme v dalších kapitolách dost využívat, takže jestli se cítíš trochu nejistě, zkus si překreslit nějaké další obrázky. Teď si ukážeme, jak takoveto prohození bodů a přímek celé roviny udělat. Geometricky si popíšeme, jakou přesně přímku přiřadíme kterému bodu.

Definice 52. (skalární součin) Uvažme rovinu s počátkem P a v ní dva body A a B různé od počátku. Bod B kolmo promítneme na přímku PA a projekci označíme B_0 . Pak *skalární součin* $A \cdot B$ definujeme jako součin $PA \cdot PB_0$, kde vzdálenosti bereme orientovaně, tedy pokud P leží mezi A , B_0 , bude hodnota skalárního součinu záporná. Rozmysli si, že to můžeme zapsat jako $A \cdot B = |PA| \cdot |PB| \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi PA a PB . Z toho si všimni, že je skalární součin symetrický neboli $A \cdot B = B \cdot A$.

Poláry

Nyní už máme nástroj, který nám umožňuje splnit naši myšlenku obecné duality. Bodu A v rovině přiřadíme množinu A' všech bodů X splňujících $A \cdot X = 1$. Projekce všech takových bodů na polopřímku PA musí mít velikost $\frac{1}{|PA|}$. Označme B bod na

polopřímce PA takový, že $|PB| = \frac{1}{|PA|}$. Pak A' obsahuje všechny body na přímce kolmé na PA procházející bodem B . Takže jsme bodu A přiřadili přímku A' . Přímka A' se nazývá *polárou* A a bod A se nazývá *pólem* A' . Pro každou přímku, která neprochází počátkem, existuje pól.

Tvrzení 53. *Nechť $\mathcal{D}$ značí diagram obsahující všechny body v rovině kromě počátku, a všechny přímky v rovině neprocházející počátkem. Pak zobrazení, které zobrazí každý bod na jeho poláru a každou přímku na její pól, definuje dualitu diagramu $\mathcal{D}$ se sebou samotným.*

Důkaz. Uvažme bod A a přímku p diagramu $\mathcal{D}$ tak, že A leží na p . Potřebujeme dokázat, že p' leží na A' . Jelikož A leží na poláře bodu p' , tak $A \cdot p' = 1$. To z definice poláry bodu A současně znamená, že bod p' leží na poláře bodu A neboli na A' .⁹ $\square$

Cvičení 54. Rozmysli si, že pokud dodefinujeme poláru počátku jako nevlastní přímku a poláru jakéhokoli nevlastního bodu A jako přímku procházející počátkem kolmou na směr A , tak dostaneme dualitu celé projektivní roviny se sebou samotnou.

Podobně jako jsme inverzi skládali se stejnolehlostí a koeficientu dané stejnolehlosti říkali koeficient inverze, budeme i dualitu skládat se stejnolehlostí. Vzniká nám tím pojem *koeficient duality*.

Definice 55. Definujeme polárovou dualitu se středem v P . Posuneme P do počátku. Pak tato dualita bude definována tak, že bodu A přiřadí množinu všech bodů X takových, že $A \cdot X = k$, kde k je nenulové reálné číslo, kterému říkáme *koeficient duality*.

Tvrzení 56. *Mějme v rovině body A , P a přímku p , která jimi neprochází a je kolmá na AP . Pak existuje dualita se středem P , která zobrazí A na p .*

Poláry podle kružnice

Všimni si, že polárová dualita s kladným koeficientem k zobrazí bod, který leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{k}$, na přímku procházející daným bodem, která je tečnou k dané kružnici.

Analogicky jako jsme mohli používat pojem inverze podle kružnice, můžeme nyní používat pojem polárová dualita podle kružnice.

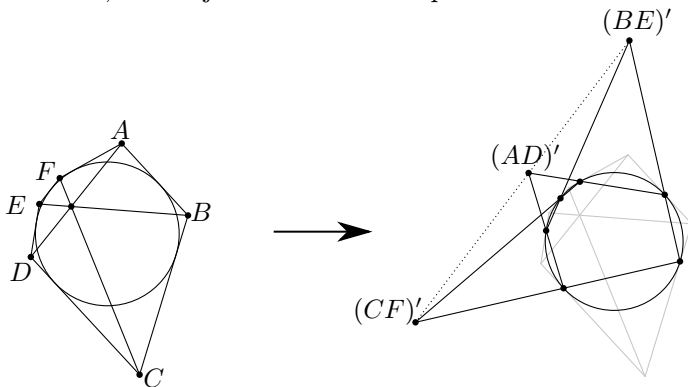
Tvrzení 57. *Mějme bod A vně kružnice ω . Označme X , Y body dotyku tečen vedených bodem A ke kružnici ω . Pak XY je polárou bodu A podle ω .*

Důkaz. Víme, že AX je polárou X a AY je polárou Y . Protože přímka XY je přímkou definovanou body X , Y a bod A je bodem definovaným přímkami AX , AY , tak z principu duality je XY polárou A . $\square$

⁹Tvrzení také známé pod názvem: „Polára bodu na poláře prochází pólem původní poláry“. V anglické literatuře označováno jako La Hire's Theorem.

Věta 58. (Brianchon) *Mějme tečnový šestiúhelník $ABCDEF$. Pak přímky AD , BE a CF prochází jedním bodem.*

Důkaz. Uvažme dualitu podle kružnice vepsané. Označme body dotyku vepsané s AB, BC, CD, DE, EF, FA postupně I, J, K, L, M, N . Pak $A' = IN$. Analogicky známe poláry i zbylých bodů šestiúhelníka. Pól přímky AD je průsečíkem polár A a D . Což jsou dvě protější strany šestiúhelníka $IJKLMN$. Tvrzení, že AB, BC, CD prochází jedním bodem, znamená, že jejich póly leží na jedné přímce. Ale to je přesně Pascalova věta, kterou jsme si ukazovali v prvním díle. $\square$



Úhel mezi bodem a přímkou

Hlavní trik, který s polárami budeme využívat, je přenášení úhlů. K usnadnění tohoto přenášení si však musíme dodefinovat pár značení.

Definice 59. Následující definice využívají rovinu s počátkem P .

- (i) Úhel mezi přímkami $|\angle pq|$ je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku p proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku q .
- (ii) Úhel mezi body $|\angle AB|$ je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku PA proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku PB .
- (iii) Úhel mezi bodem a přímkou $|\angle Ap|$, kde A leží na p , je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku PA proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku p . Obdobně $|\angle pA|$ je úhel, o který musíme otočit p na PA .

Tvrzení 60. (o dualitě úhlů) *Pro všechny body a přímky v dualitě platí*

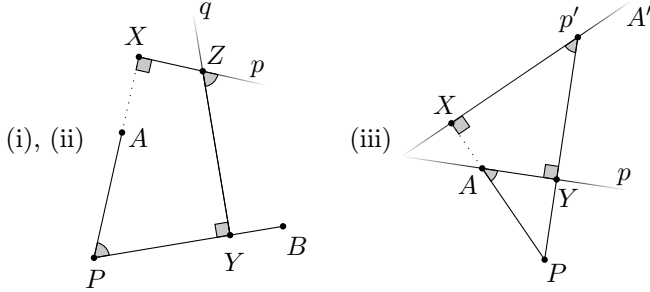
- (i) $|\angle pq| = |\angle p'q'|$,
- (ii) $|\angle AB| = |\angle A'B'|$,
- (iii) $|\angle Ap| = |\angle A'p'|$.

Důkaz.

- (i), (ii) Nejdříve dokážeme první a druhé tvrzení. Označme $A = p'$ a $B = q'$. Dále označme průsečíky $X = PA \cap p$, $Y = PB \cap q$ a $Z = p \cap q$. Pak $PXZY$ leží na jedné kružnici protože $|\angle ZYP| = 90^\circ = |\angle ZXP|$. Takže z obvodového úhlu

je úhel mezi p a q stejný jako úhel mezi PA a PB . Což jsme chtěli dokázat. $\square$

- (iii) Pro třetí tvrzení označme $X = PA \cap A'$ a $Y = Pp' \cap p$. Pak X, A, Y, p' leží na jedné kružnici, protože $|\angle p'YA| = 90^\circ = |\angle p'XA|$. Znovu z obvodového úhlu plyne, že úhel mezi p a PA je stejný jako úhel mezi A' a Pp' . $\square$



Úloha 61. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nechť $E = AB \cap CD$ a $F = AD \cap BC$. Mějme bod X uvnitř $ABCD$ takový, že $|\angle AXE| = |\angle CXF|$. Dokaž, že $|\angle AXB| + |\angle CXD| = 180^\circ$.

Úloha 62. (Blanchet zas a znovu) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A . Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD . Dokaž, že $|\angle EDA| = |\angle FDA|$.

Úloha 63. Mějme pevný bod D a pevné přímky k, l , které procházejí společným bodem A . Na přímkách k, l jsou postupně body X a Y takové, že $|\angle XDA| = |\angle YDA|$. Dokaž, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 64. Mějme rovnoběžník $ABCD$ a v něm nalezněme bod F , který splňuje $|\angle CDF| = |\angle CBF|$. Dokaž, že $|\angle FCB| = |\angle FAB|$.

Úloha 65. Mějme trojúhelník ABC takový, že $|\angle BAC| = 120^\circ$. Označme postupně D, E, F průsečíky os úhlů u vrcholů A, B, C s protější stranou. Dokaž, že $|\angle EDF| = 90^\circ$.

Tvrzení 66. (o dualitě na kružnici) Mějme trojúhelník ABC se stranami a, b, c . Na jeho kružnici opsané mějme bod P . Uvažme dualitu se středem v P . Pak platí, že čtyřúhelníky $ABCP$ a $a'b'c'P$ jsou podobné. Tedy speciálně bod P leží na kružnici opsané $a'b'c'$.

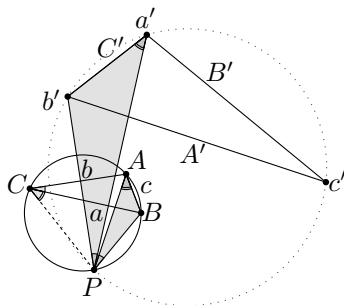
Důkaz. Dokážeme, že trojúhelníky ABP a $a'b'P$ jsou podobné. Z obvodového úhlu $|\angle BAP| = |\angle BCP|$. Z duality úhlů

$$|\angle BCP| = |\angle Ca| = |\angle C'a'| = |\angle b'a'P|.$$

Znovu z obvodového úhlu $|\angle APB| = |\angle ACB|$. Z duality úhlů pak

$$|\angle ACB| = |\angle ab| = |\angle a'b'| = |\angle a'Pb'|.$$

Dostali jsme, že $|\angle BAP| = |\angle b'a'P|$ a $|\angle APB| = |\angle a'Pb'|$. Takže z věty *uu* jsou trojúhelníky ABP a $a'b'P$ podobné. Obdobně jsou trojúhelníky ACP a $a'c'P$. Takže i čtyřúhelníky $ABCP$ a $a'b'c'P$ jsou podobné. $\square$

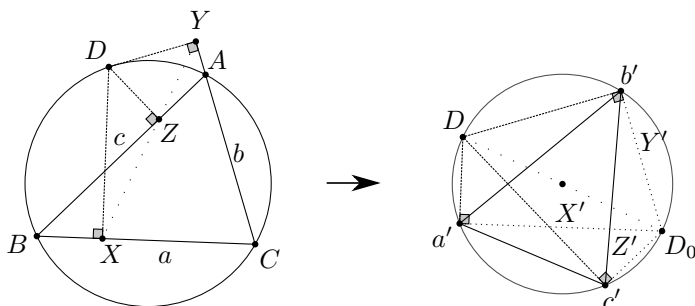


Věta 67. (Simsonova přímka) Mějme trojúhelník ABC a na jeho kružnici opsané bod D . Označme X, Y, Z postupně paty z D na přímky BC, AC, AB . Pak X, Y, Z leží na jedné přímce.

Důkaz. Označme a, b, c postupně strany trojúhelníka BC, CA, AB . Uvažme polárovou dualitu se středem v D a libovolným koeficientem. Z tvrzení 66 leží D na kružnici opsané $a'b'c'$. Z duality úhlů $90^\circ = |\angle Xa| = |\angle X'a'|$. Takže přímka X' je kolmice na Da' procházející a' . Analogicky Y' je kolmice na Db' skrz b' a Z' je kolmice na Dc' skrz c' . Chceme ukázat, že X', Y', Z' prochází jedním bodem. Označme D_0 bod naproti na kružnici opsané $a'b'c'$ od bodu D . Pak $|\angle Da'D_0| = 90^\circ$. Takže X' prochází D_0 . Analogicky i Y' a Z' prochází D_0 . Tedy X', Y' a Z' prochází jedním bodem, takže X, Y, Z musely ležet na jedné přímce. $\square$

Úloha 68. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a vepišťem I . Označme p tečnu k ω různou od stran trojúhelníka. Na přímce p zvolme body A_0, B_0, C_0 tak, aby $|\angle AIA_0| = |\angle BIB_0| = |\angle CIC_0| = 90^\circ$. Dokaž, že přímky AA_0, BB_0 a CC_0 prochází jedním bodem.

Úloha 69. (Miquelův bod) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme P průsečík AB a CD . Analogicky Q je průsečík BC a AD . Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům QAB, QCD, PBC a PAD prochází jedním bodem M . Dokaž, že M leží na PQ , právě když $ABCD$ je tětíkový. Můžeš si všimnout i dalších zajímavých úhlových vlastností.



Poláry a inverze

Všimni si, že inverze a poláry spolu dost souvisí. Konkrétně poláru bodu A dostaneme tak, že vedeme kolmici na PA procházející inverzí (se stejným koeficientem) bodu A , kde P je střed duality i inverze.

Tvrzení 70. (dualita zachovává dvojpoměry) *Mějme body A, B, C, D na přímce. Uvažme jakoukoli dualitu. Pak $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. (Z principu duality víme, že přímky $A'B'C'D'$ prochází jedním bodem, takže je na nich dvojpoměr dobře definovaný.)*

Důkaz. Označme P střed duality. Rozlišme dvě konfigurace.

- (i) Nejprve rozeberme případ, kdy P leží na přímce A, B, C, D . Všechny přímky A', B', C', D' jsou rovnoběžné. Promítneme dvojpoměr (A', B', C', D') na přímku A, B, C, D . Tím dostaneme to samé, jako když (A, B, C, D) zinvertujeme se stejným středem a koeficientem.
- (ii) V druhém případě, když P leží mimo $ABCD$, z promítacího tvrzení víme, že

$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$

Otočíme tento svazek o 90° na (PA_1, PB_1, PC_1, PD_1) . Pak PA_1 je rovnoběžné s A' , $PB_1 \parallel B'$, $PC_1 \parallel C'$ a $PD_1 \parallel D'$. Protože u dvojpoměrového svazku záleží jen na úhlech mezi přímkami, platí, že

$$(PA_1, PB_1, PC_1, PD_1) = (A', B', C', D').$$

Takže $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. □

Úloha 71. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$ a necht I je střed kružnice jemu vepsané. Označme $Q = AB \cap CD$ a $P = BC \cap AD$. Označme M kolmou projekci bodu I na přímku PQ . Dokaž, že $|\angle DMI| = |\angle BMI|$.

Věta 72. (Simsonova přímka podruhé) *Mějme trojúhelník ABC a na jeho kružnici opsané bod D . Označme X, Y, Z postupně paty z D na přímky BC, AC, AB . Pak X, Y, Z leží na jedné přímce.*

Důkaz. Uvažme dualitu se středem v D a následnou inverzi se stejným koeficientem a středem v D . Ta zobrazí stranu trojúhelníka na patu z D na danou stranu. Takže třeba $a \rightarrow X$. Označme čárkou obrazy v dualitě a dvojčárkou obrazy po následné inverzi. Z tvrzení dualita na kružnici víme, že $a'b'c'D$ je tětivový. Takže po inverzi máme, že $a''b''c''\infty$ leží na kružímce. Ale protože obsahuje bod v nekonečnu, musí ležet na přímce. Takže X, Y, Z leží na přímce. $\square$

Může se Ti zdát, že jsme na tuto větu využili moc silné nástroje (dualitu i inverzi), když se dá jednoduše vyúhlit. Tyto nástroje nám ale dávají další vhled do toho, co to Simsonova přímka vlastně je. Pojdme si ukázat netriviálnější tvrzení, které z tohoto náhledu celkem rychle plyne.

Příklad 73. Mějme harmonický čtyřúhelník $ABCD$. Označme X, Y, Z paty z D na přímky BC, CA, AB . Pak $|XY| = |YZ|$.

Řešení. Znovu aplikujeme dualitu se středem v D . Z tvrzení dualita na kružnici víme, že $a'b'c'D$ je podobný s $ABCD$, tedy speciálně je harmonický. Takže $(a', b', c', D) = -1$. Po zinvertování podle D dostáváme, že

$$(X, Y, Z, \infty) = (a'', b'', c'', \infty) = -1.$$

To je ale dvojpoměr s bodem v nekonečnu, tedy Y je středem úsečky XZ .

Úloha 74. V čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík úhlopříček AC a BD . Dále označme M průsečík kružnic opsaných PCD a PAB různý od P . Nakonec označme H_1, H_2, H_3 a H_4 postupně paty kolmic z bodu P na přímky AB, BD, DC a CA . Dokaž, že H_1, H_2, H_3 a H_4 leží na jedné přímce.

Poláry v zadání

Občas se stane, že k vyřešení úlohy ji ani nepotřebujeme celou dualizovat, ale stačí si uvědomit, které přímky v zadání jsou poláry kterých bodů v zadání. Nejlépe si to ukážeme na příkladech.

Úloha 75. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω se středem I . Kružnice ω se dotýká stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F . Přímka EF protíná přímku BC v G . Dokaž, že $GI \perp AD$.

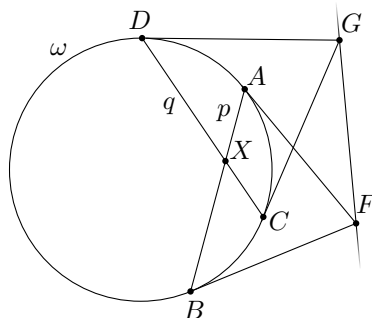
Řešení. Pokusíme se ukázat silnější tvrzení, že AD je polárou G podle ω . Pak musí GI být kolmé na AD . Najdeme pól AD podle ω . Ten musí být průsečíkem polár A a D . Polára A je EF , polára D je BC , takže G je opravdu pólem AD .

Úloha 76. Mějme trojúhelník ABC a jeho vepsíště I . Označme body dotyku vepsané kružnice se stranami BC, CA, AB postupně D, E, F . Označme S průsečík přímek EF a BC . Dokaž, že $SI \perp AD$.

Poláry a kolineace

Už jsme si ukázali, jak vypadá polára bodu ležícího na kružnici a vně kružnice. Pojďme nějak projektivně zkonstruovat poláru bodu uvnitř kružnice.

Tvrzení 77. Mějme bod X uvnitř kružnice ω . Necht' p, q jsou libovolné přímky procházející bodem X , p protíná ω v A, B a q protíná ω v C, D . Tečny k ω v A a B se protínají v F . Tečny k ω v C a D se protínají v G . Pak přímka FG je polára X .



Důkaz. Už víme, že p je polára F a q je polára G . Z principu duality tak přímka procházející F, G musí být polárou průsečíku p, q . Takže FG je opravdu polára X . $\square$

Tvrzení 78. (kolineace zachovává poláry) Mějme kružnici ω , bod A a jeho poláru a vzhledem k ω . Pak pokud kolineace zobrazí ω na kružnici ω' , $A \rightarrow A'$ a $a \rightarrow a'$, tak a' je polára A' vzhledem k ω' .

Důkaz. Poláry umíme zkonstruovat využitím pouze tečen a průsečíků. To všechno ale kolineace zachovává. Zachovává tedy i poláry. $\square$

Tím se možnosti kolineace ještě rozšířily. Pojďme si to ukázat.

Příklad 79. Mějme tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ se středem O kružnice opsané. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Dokaž, že $PO \perp QR$.

Řešení. Označme ω kružnici opsanou $ABCD$. Dokážeme silnější tvrzení. Dokážeme, že QR je polára P podle ω . Uvažme kolineaci zobrazující QR na nevlastní a na kružnici. Z $ABCD$ se tím stane obdélník. Poláry se zachovaly. QR je nevlastní a P je střed ω , takže QR je polára P . Takže PO muselo být kolmé na QR .

Poznámka 80. Rozmysli si, že v předchozím případě dokonce PQ je polára R a PR je polára Q podle ω a že z toho plyne, že O je ortocentrum PQR . To je tvrzení, které se v prvním díle zdálo kolineací absolutně nedokazatelné.

Úloha 81. Mějme tečnový tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme I střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a P průsečík úhlopříček. Dokaž, že O, I, P leží na jedné přímce.

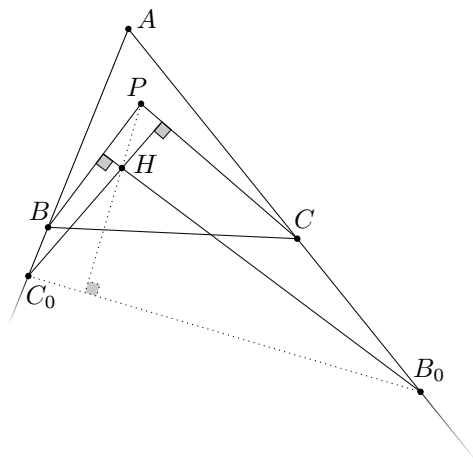
Dualita s ortocentrem

Ukážeme si speciální případ duality. Pro trojúhelník ABC se stranami a, b, c najdeme dualitu, která zobrazí $A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow c$.

Tvrzení 82. (existence duality podle trojúhelníka) Uvažme dualitu zobrazující $A \rightarrow BC$ se středem v ortocentru. Podíváme se, kam tato dualita zobrazí B . B leží na A' neboli B' prochází skrz A . Zároveň musí být kolmá na BH , ale to je právě AC . Analogicky je polára C přímka AB .

Poznámka 83. Pro pravoúhlý trojúhelník tato dualita neexistuje, protože ortocentrum v něm splývá s vrcholem.

Příklad 84. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H . V něm leží bod P . Označme B_0 bod na AC takový, že $B_0H \perp BP$. Analogicky sestojíme C_0 na AB tak, aby $C_0H \perp CP$. Dokaž, že $PH \perp C_0B_0$.



Řešení. Najdeme póly přímek PB a PC v dualitě podle trojúhelníka ABC . Přímka PB prochází bodem B , takže její pól leží na b . Označíme její pól Q . Pak protože střed duality je ortocentrum, musí platit, že $QH \perp PB$. Takže $Q = B_0$. Analogicky pól PC je C_0 . Takže přímka C_0B_0 je polára $P = PB \cap PC$. Z toho plyne, že $PH \perp C_0B_0$.

Poznámka 85. Mohli jsme dodefinovat i bod A_0 . Pak z toho, že PA, PB, PC prochází jedním bodem, plyne, že A_0, B_0, C_0 leží na přímce.

Úloha 86. Mějme trojúhelník ABC a označme H jeho ortocentrum. Dále mějme ceviany¹⁰ AD , BE , CF . Kolmice na přímkou DH procházející skrz A protíná BC v A_0 . Obdobně kolmice na EH procházející skrz B protíná AC v B_0 a kolmice na FH procházející C protíná AB v C_0 . Dokaž, že A_0 , B_0 a C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 87. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H . Označme M_a střed strany BC , M_b střed strany AC a M_c střed strany AB . Průsečík polopřímky M_aH s kružnicí opsanou označíme X_a a průsečík AX_a s BC označíme Y_a . Analogicky sestrojíme body X_b , X_c a Y_b , Y_c . Dokaž, že Y_a , Y_b a Y_c leží na přímce.

Úloha 88. Mějme trojúhelník ABC a jeho ortocentrum H . Na straně BC leží bod D . Příмка skrz H kolmá na DH protne přímky AB a AC postupně v bodech K a L . Dokaž, že $\frac{|KH|}{|HL|} = \frac{|BD|}{|DC|}$.

Úloha 89. Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H . Na AC nalezneme bod B' takový, že $|\angle AHB'| = |\angle ABC|$. Analogicky na AB nalezneme C' splňující $|\angle AHC'| = |\angle ACB|$. Dokaž, že $B'C' \parallel BC$.

Úloha 90. V trojúhelníku ABC s ortocentrem H a patami výšek z vrcholů A , B , C označenými D , E , F . Necht M je střed strany BC . Příмка EF protne přímkou BC v X . Dokaž, že $XA \perp HM$.

Úloha 91. (Droz-Farny) Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H . Přímky p , q jsou na sebe kolmé a prochází bodem H . Příмка p protíná BC v A_0 , AC v B_0 a AB v C_0 . Analogicky q protíná BC v A_1 , AC v B_1 a AB v C_1 . Dokaž, že středy úseček A_0A_1 , B_0B_1 a C_0C_1 leží na přímce.

Úloha 92. Mějme trojúhelník ABC . Označme H jeho ortocentrum a M střed strany BC . Dále K je průsečík MH s kružnicí opsanou ABC . Příмка rovnoběžná s BC procházející skrz H protíná přímkou AK v bodě X . Vnější osa úhlu BHC protíná BC v bodě Y . Označme S střed oblouku BC neobsahující A . Dokažte, že $SH \perp XY$.

Úloha 93. V trojúhelníku ABC označme H ortocentrum. vnější osa úhlu BHC protne BC v X . vnitřní osa AHB protne AB v Y a vnitřní osa AHC protne AC v Z . Dokaž, že X , Y , Z leží na přímce.

Shrnutí

Shrňme, co jsme v druhém díle ukázali.

¹⁰Ceviany v trojúhelníku jsou tři přímky, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníka a protínají se v jednom bodě.

Komplexní dvojpoměr

- (1) Definován jako

$$\frac{(B - A)(D - C)}{(C - B)(A - D)}$$

pro komplexní čísla A, B, C, D .

- (2) Na přímce i na kružnici se chová stejně jako standardní.

Möbiovská zobrazení

- (1) Lineární lomené funkce v komplexních číslech

$$\frac{ax + b}{cx + d}$$

pro komplexní koeficienty a, b, c, d .

- (2) Zachovávají dvojpoměry.

- (3) Zachovávají kružímky.

Inverze

- (1) Definovaná středem a koeficientem. Posuneme střed do počátku, pak je to zobrazení tvaru $k/\bar{x}$, kde k je reálný koeficient.
- (2) komplexně konjugují dvojpoměry.
- (3) Zachovává kružímky.
- (4) Označme P střed inverze a čárkou obrazy. Pak P, X, X' leží na přímce pro všechna X .
- (5) Kružnice procházející středem se zobrazí na přímku neprocházející středem.
- (6) Pro body A, B a jejich inverzy A', B' podle inverze se středem P platí $|\angle PAB| = |\angle PB'A'|$.
- (7) Složení dvou inverzí je Möbiovské zobrazení.
- (8) Inverze podle kružímky. Definovaná jako Möbiovské zobrazení s pruhem, jehož množina pevných bodů je zadaná kružímka. Inverze podle přímky je překlopení.
- (9) Tvrzení *KIL*.

Kolmé kružnice

- (1) Tečny v jejich průsečících jsou kolmé.
- (2) Obraz ω v inverzi podle Ω je znovu ω právě když jsou ω a Ω na sebe kolmé.
- (3) Označme p přímku spojující středy kolmých kružnic. Ta kružnice protne ve čtyřech bodech. Tyto body tvoří harmonickou čtveřici.

Dualita

- (1) Nahrazujeme body a přímky tak, aby se zachovala vlastnost náležení. Takže pokud A leží na p , pak p' leží na A' .
- (2) Konečné duální diagramy.

Poláry

- (1) Skalární součin $A \cdot B$ ve světě s počátkem P je roven $A \cdot B = |PA| \cdot |PB| \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi PA a PB .

- (2) Definované pomocí skalárního součinu. Polára A je množina bodů X takových, že $A \cdot X = k$, kde k je reálný koeficient polárové duality.
- (3) Určují dualitu celé projektivní roviny.
- (4) Dobře se přepočítávají úhly.
- (5) Pro čtyři body na kružnici $ABCD$ platí, že po dualitě se středem v D jsou čtyřúhelníky $ABCD$ a $a'b'c'D$ podobné, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka ABC .
- (6) Inverze bodu A je pata středu duality na poláru A' .
- (7) Pokud kolineace zachová kružnici, zachová i poláry vzhledem k dané kružnici.
- (8) Pro trojúhelník ABC existuje polárová dualita se středem v ortocentru zobrazující $A \rightarrow a, B \rightarrow b$ a $C \rightarrow c$.

Pár slov závěrem

Zde končí naše putování projektivním světem druhého dílu. Ale nemusíš truchlit, vydáme se zde ještě jednou a naposled v díle třetím. Pro připomenutí: na druhé procházce jsme nejprve potkali komplexní čísla, těch jsme se nezalekli a ukázali si, že pomocí nich lze jednoduše popsat některá klasická zobrazení, celou třídu těchto zobrazení jsme pak nazvali Möbiovská. Dále jsme se podrobněji zaměřili na jedno konkrétní zobrazení – inverzi a zjistili, že kružnice a přímky jsou si v jistém pohledu tak podobné, že jsme jejich čeleď nazvali kružímky. Také jsme se vydali až na pól, kde jsme namísto očekávaných polárních medvědů našli poláry. Hlavním objevem druhého výletu se pak stal tvor jménem dualita, který kudy chodil, tu se hned přímky měnily v body a naopak body v přímky. Pro větší sblížení se všemi potkanými zvířátky jsme si vlastnosti jednotlivců demonstrovali na spoustě příkladů a obrázků.

A na co se můžeš těšit ve třetím putování? Tentokrát se vydáme do končin dosud nepoznaných a tajuplných. Ukážeme si, jak se dají úlohy dokazovat za pomoci hýbání s body. A že občas je stačí dokázat ve třech speciálních případech a pak už jsou dokázány celé. Pomocí hýbání pak budeme schopni dokazovat i zvláštní tvrzení jako třeba, že určitá množina přímek prochází jedním bodem bez toho, abychom znali daný bod. Seznámíme se se zvířátkem zvaným Desarguesova involuce, které sice může dle jména působit děsivě, ale při bližším poznání umí schovat zoubky, být kouzelné a poradit si s mnohými obrázky. Například umí dokázat, že nějaké dvě náhodné úsečky na přímkě jsou stejně dlouhé. Doufáme, že jste se při této výpravě nezalekli šavlobužných tygrů a doprovodíte nás i na této závěrečné cestě. Vstříc novému dobrodružství!

Návody

20. Zinvertuj podle O . Z kružnic vznikne obdélník.
21. Invertuj se středem A_3 . Rozmysli si, co se stane s dotýkajícími se kružnicemi.
25. Zinvertuj podle A a přenes úhly.

26. Najdi pevnou inverzi se středem v $\check{S}$, která zobrazí X_0 na X_1 nezávisle na poloze přímky p .
27. Dokresli kružnice nad průměry AB , AC , CD , CE . Následně zinvertuj podle C .
28. Zinvertuj podle A . Objeví se trojúhelník s výškami.
29. Zinvertuj podle A a dokaž, že $|AB|/|BP| = |AC|/|CP|$.
37. Označ O_1 střed kružnice opsané ABC . Kružnice opsaná ABC , nevlastní bod a bod O_1 tvoří hezkou konfiguraci.
38. X , P a BC mají tvořit hezkou konfiguraci. Zinvertuj podle A .
44. Najdi harmonickou čtveřici. Najdi pravý úhel. Využij tvrzení dvě ze tří.
45. Zinvertuj podle δ a najdi pravý úhel.
61. Zdualizuj podle X .
62. Zdualizuj podle paty výšky.
63. Zdualizuj podle D . Dokaž, že póly hledaných přímek leží na jedné přímce.
64. Zdualizuj podle F .
65. Rozmysli si, jak se chová dualita podle bodu, který leží na ose úhlu. Co když leží na rameni?
68. Zdualizuj podle kružnice vepsané.
69. Zdualizuj úlohu podle průsečíku dvou kružnic opsaných. Uvědom si, že z toho co dostaneš plyne, že M leží i na zbylých dvou. Pro druhou část převed' tětiovost na součet úhlů 180.
71. Zdualizuj podle kružnice vepsané. Převed' podmínku pomocí dvě ze tří na harmonický svazek.
74. Stačí najít Simsonovy přímky. Zkus ale využít důkaz Simsonovy přímky. Zdualizuj a zinvertuj podle M .
76. Zjisti, že S je polára AD podle kružnice vepsané.
81. Najdi poláru P podle kružnice vepsané i opsané. To, co zjistíš, říká dost informace, aby platilo, že O , I , P leží na přímce.
86. Hledaná přímka je polára průsečíku cevián AD , BE , CF v dualitě podle ABC .
87. Jaká je polára bodu M_a v dualitě podle ABC .
88. Převed' poměr na dvojpoměr s nevlastním bodem a pak zdualizuj podle ABC .
89. Přenes úhel v dualitě podle ABC .
90. Překlop A podle M na A_0 . Jaká je polára A_0 v dualitě podle ABC .
91. Pro zdualizování převed' na harmonické svazky. Po dualitě už jen zbývá vyúhlit.
92. Zdualizuj podle ABC osu úhlu BAC a osu strany BC .
93. Body X , Y , Z se v dualitě podle ABC zobrazí na různé osy úhlů.

Projektivní geometrie III – Pohyblivá geometrie

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává třetí a závěrečný díl seriálu o projektivní geometrii (tzv. progeo¹). Než ale vyrazíme na naši poslední pouť a poznáme nový světa kus, vzpomínejme nejprve na zážitky z poslední výpravy. Ve druhém díle jsme se seznámili s komplexními čísly a Möbiovskými zobrazeními. Dále jsme blíže poznali čeled' kružímkovitých a skamarádili se s inverzí a dualitou. Trasu třetího výletíku velitel rozvrhl opět do světa s nevlastní přímkou. Tentokráte bychom zde měli potkat jiné druhy než posledně. Budeme se, oproti předchozím dílům, hlavně zabývat zobrazeními, které nezobrazují celou rovinu. Naučíme se více rozumět, jak jsou spolu jednotlivé objekty v obrázcích provázané a jak dokazovat úlohy pomocí hýbání s body. Nakonec se podíváme na zoubky Desarguesově involuci (nedbaje lidové moudrosti darované involuci na zuby nehleď).



¹Nejedná se bohužel o oficiální termín hodný zápisu do matriky geometrických pojmů.

Držáky dvojpoměrů

V prvním díle jsme si definovali dvojpoměr. Umíme ho určit pro čtveřici bodů na přímce, čtveřici bodů na kružnici nebo čtveřici přímek procházejících jedním bodem. Obecně budeme *držák* říkat množině objektů, kde každé čtveřici z nich umíme určit dvojpoměr. Takže množina bodů na přímce je držák, množina bodů na kružnici taky a množina přímek procházejících pevným bodem také.

Poznámka 1. (abstrakce) Držáky by mohly být teoreticky i dost zběsilé objekty a dvojpoměry dost zběsilé funkce. Po dvojpoměru obecně vyžadujeme, aby splňoval jednoznačnost dvojpoměrů a přepočítávací lemmata z prvního dílu. V celém díle se budeme ale zabývat dost jednoduchými držáky, tak tuto abstrakci nebudeme příliš využívat.

Podívejme se nyní na zobrazení mezi držáky, zejména nás budou zajímat ta, která zachovávají dvojpoměry.

Definice 2. *Projektivní* nazveme zobrazení mezi držáky $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ takové, že zachovává dvojpoměry. Takže pro všechny čtveřice $A, B, C, D \in \mathcal{U}$ platí, že

$$(A, B, C, D) = (f(A), f(B), f(C), f(D)).$$

Všimni si, že potřebujeme, aby na $\mathcal{U}$ i na $\mathcal{V}$ byl dvojpoměr definován, proto vyžadujeme, aby to byly držáky.

Práce se zobrazením, a ne jen se čtveřicí bodů nám v mnohém usnadní práci. Protože často se pak stačí soustředit místo čtyř bodů jen na jeden a zároveň můžeme využívat triky s dvojpoměry. Ukážeme si, že projektivní zobrazení už vlastně známe, jen jsme je tak nenazývali.

V prvním díle jsme si ukazovali promítací tvrzení. To říkalo, že když máme čtyři body A, B, C, D ležící na přímce a bod P mimo ni, tak

$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$

Nyní můžeme toto tvrzení přeformulovat do světa zobrazení.

Tvrzení 3. (promítací) *Mějme přímku q a bod P mimo ni. Pak zobrazení, které bodu $X \in q$ přiřadí přímku PX , je projektivní.*

Tvrzení, které pojednávalo o čtveřicích bodů, jsme tím zapsali přehledněji využitím méně bodů. Zatím Ti možná tohle nepřijde tak úchvatné, jen se tu plahočíme v definicích. Ale časem v tomto díle uvidíš, jak tenhle pohled na dvojpoměry dokáže spoustu věcí zpřehlednit, a tím Ti umožní „nahlédnout“ i do složitějších důkazů.

Ještě si ukážeme pár takovýchto tvrzení, která nejsou nijak hluboce překvapivá. Důkazy občas necháme jako cvičení, většinou stačí zobrazit obecnou čtveřici v tomto zobrazení a uvědomit si, že dvojpoměr se zachoval.

Na konci této kapitoly si ukážeme, jak jsou tyhle „jednoduché“ nástroje silné. Bez námahy pak půjdou řešit netriviální úlohy.

Tvrzení 4. *Složení dvou projektivních zobrazení je projektivní.*

Tvrzení 5. *Inverzní zobrazení k projektivnímu je projektivní.*

Cvičení 6. Dokaž předchozí tvrzení.

Tvrzení 7. (tři body stačí) *Mějme dvě projektivní zobrazení f, g z držáku $\mathcal{U}$ do držáku $\mathcal{V}$. Pokud existují tři různé prvky $A, B, C \in \mathcal{U}$ takové, že se na nich f a g shodují, pak se tato zobrazení shodují na všech bodech.*

Důkaz. Důkaz plyne velmi rychle z jednoznačnosti dvojpoměrů. Libovolný prvek $X \in \mathcal{U}$ umíme charakterizovat dvojpoměrem (A, B, C, X) . Pak protože jsou zobrazení f i g projektivní, tak

$$\left(f(A), f(B), f(C), f(X)\right) = (A, B, C, X) = \left(g(A), g(B), g(C), g(X)\right).$$

Takže pokud $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ a $f(C) = g(C)$, tak z jednoznačnosti dvojpoměrů se $f(X) = g(X)$. $\square$

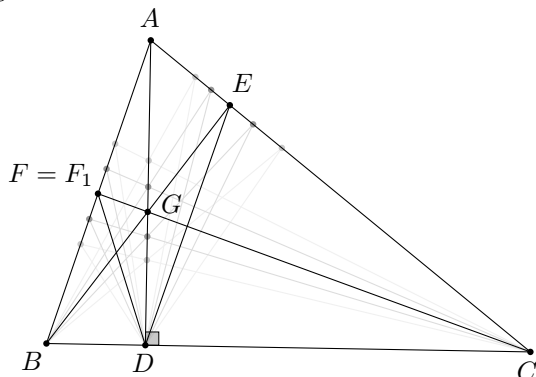
Ukážeme si pár užitečných projektivních zobrazení, zkus si rozmyslet, že opravdu jsou projektivní.

- (i) Mějme kružnici ω a na ní bod P , pak zobrazení, které $X \in \omega$ přiřadí přímkou PX , je projektivní (bodu P přiřadí tečnu k ω).
- (ii) Libovolná inverze je projektivní zobrazení. (Držák musí být množina bodů na kružnici nebo na přímce.)
- (iii) Mějme dvě přímky p, q a bod P , který na nich neleží. Dále pokud $f : p \rightarrow q$ je zobrazení takové, že $X \in p$ se zobrazí na $Y \in q$ tak, že PXY leží na přímce, pak f je projektivní.
- (iv) Uvažme držák přímk procházejících bodem P . Označme ℓ jednu pevnou přímkou procházející P . Zobrazení, které přímce p přiřadí přímkou osově souměrnou podle ℓ , je projektivní.
- (v) Libovolné podobné zobrazení neboli libovolné pevné posunutí, stejnoolehlost či rotace. Je třeba dávat pozor, jak pak vypadá výstupní držák.
- (vi) Jakákoli kolineace je projektivní. Zatím si musíme trochu dávat pozor, jaké držáky na sebe zobrazujeme, později si ukážeme, jak tenhle problém trochu obejít.
- (vii) (prostřelovací) Mějme kružnici ω a bod P , který na ní neleží. Pak zobrazení $f : \omega \rightarrow \omega$ definované tak, že bodu X přiřadí druhý průsečík XP a ω , je projektivní. Pro důkaz využij buď kolineaci, nebo si vzpomeň, že existuje inverze se středem v P , která ω prokládá na sebe.

I když to tak možná ještě nevypadá, jsme už vyzbrojeni opravdu silnými nástroji. Nejdříve si ukážeme, jak se tyto nástroje používají na jednoduché úloze, a hned pak si předvedeme, jak si poradí s úlohou z IMO 2010. Nenech se odradit tím, že tady řešení sepisujeme docela dlouhá, snažíme se vysvětlit, proč děláme kroky, které děláme.

Příklad 8. (Blanchet potřetí) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A . Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD v bodě G . Dokaž, že $|\angle EDA| = |\angle FDA|$.

Řešení. Označíme F_1 bod ležící na AB splňující $|\angle EDA| = |\angle F_1DA|$. K dokázání úlohy stačí dokázat, že $F_1 = F$. Začneme hýbat s bodem G po přímce AD . Tím body A, B, C zůstanou pevné, ale body E, F, F_1 se budou nějak hýbat. Zkusíme tyto pohyby nasimulovat pomocí projektivních zobrazení. Konkrétně zkusíme nalézt dvě projektivní zobrazení, která zobrazí G na F , resp. na F_1 . Pak můžeme využít lemmatu *tři body stačí*.



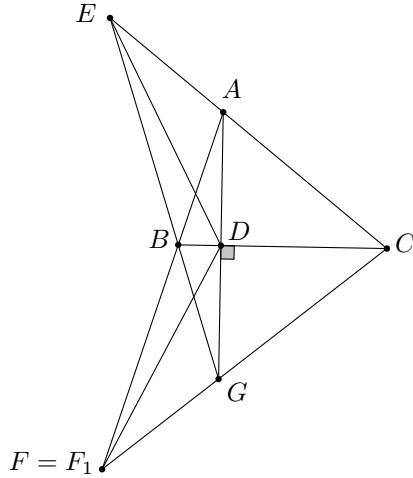
Jak z G sestrojíme F ? Dokreslíme přímku CG a nalezneme průsečík CG a AB . Zobrazení $G \mapsto CG$ je projektivní zobrazení z držáku *body na AD* do držáku *přímky skrz C* . Následně zobrazení $CG \mapsto F$ je projektivní zobrazení z držáku *přímky skrz C* do držáku *body na AB* . Složením těchto zobrazení jsme projektivním zobrazením nasimulovali pohyb F v závislosti na G .

Analogicky dostaneme projektivní zobrazení zobrazující G na E . Zbývá nasimulovat stejné úhly, abychom dostali projektivní zobrazení z E do F_1 . To dostaneme jako složení zobrazení z E do přímky DE , následně tuto přímku překlopíme podle AD . To je projektivní a držák se nezměnil (přímky skrz D). Výslednou přímku promítnutím na AB zobrazíme na F_1 . Takže máme projektivní zobrazení z E do F_1 a z G do E . Jejich složením dostáváme projektivní zobrazení z G do F_1 .

Pomocí lemmatu *tři body stačí* porovnáme projektivní zobrazení z G do F a z G do F_1 .

- (i) Pro G ležící na BC platí, že $F = F_1 = B$.
- (ii) Pro $G = A$ platí $F = F_1 = A$.

- (iii) Když G je obraz A podle BC , dostáváme celý obrázek symetrický podle BC , speciálně i E, F jsou symetrická podle BC . Takže E je překlopené F podle BC . Protože je AD kolmé na BC , splňují podmínku o úhlech. Platí tedy, že $F_1 = F$.



Protože se tato dvě zobrazení rovnají pro tři volby G , tak se rovnají všude. Pro všechna G pak platí, že $F_1 = F$, takže i původní úloha.

Poznámka 9. Jako třetí bod jsme mohli uvážit taky třeba ortocentrum a pak úhlit jako v prvním díle.

U výběru tří vhodných bodů je třeba si dávat pozor a nevybrat nějaký bod dvakrát. Časté volby tří bodů jsou pozice, kdy se nějaké body rovnají jiným v zadání, leží na přímkách nebo jsou body v nekonečnu.

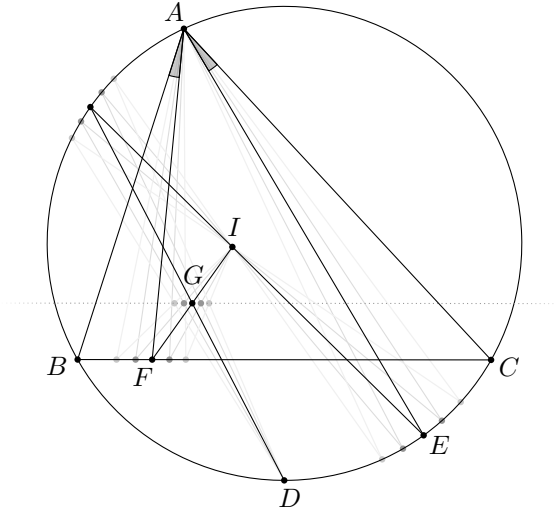
Příklad 10. (IMO 2010/2) Mějme trojúhelník ABC . Označme I jeho vepsiště a ω jeho kružnici opsanou. Přímka AI protne ω podruhé v bodě D . Mějme body E ležící na oblouku BDC a F ležící na BC takové, že

$$|\angle BAF| = |\angle CAE| < \frac{1}{2}|\angle BAC|.$$

Dále označme G střed IF . Dokaž, že průsečík přímek EI a DG leží na ω .

Řešení. Označme K_1 průsečík EI a ω a K_2 průsečík DG a ω . Stačí ukázat, že $K_1 = K_2$.

Představme si, že bod E se hýbe po celé kružnici opsané. Bod E teď bydlí na drážku ω . Zobrazení, které bodu E přiřadí přímku AE , je projektivní. Překlopená AE podle osy úhlu u A prochází bodem F . Překlopení je také projektivní, takže



$E \mapsto AE \mapsto AF$ je projektivní. Zároveň BC je pevná přímka, takže $AF \mapsto F$ je projektivní. F bydlí na drážku BC . Stejnolehlost se středem v I a koeficientem $\frac{1}{2}$ zobrazí $F \mapsto G$. Bod G bydlí na drážku p , kde p je přímka rovnoběžná s BC , která vznikne aplikováním stejnolehlosti na BC . Zobrazení $G \mapsto DG$ je projektivní z promítání. A nakonec zobrazení z $DG \mapsto K_2$ je projektivní. Označme g zobrazení $E \mapsto K_2$. Pak g je složením zobrazení

$$E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F \mapsto G \mapsto DG \mapsto K_2,$$

takže je projektivní.

Zároveň ale i zobrazení f definované jako $E \mapsto K_1$ je projektivní, protože je to prostřelení skrz pevný bod I .

Právě jsme pomocí zobrazení G nasimulovali konstrukci bodu K_2 v závislosti na bodu E ($g(E) = K_2$) a pomocí f nasimulovali konstrukci bodu K_1 ($f(E) = K_1$). K tomu, abychom ukázali, že $K_1 = K_2$, stačí ukázat, že tyto funkce jsou shodné. K tomu ale máme tvrzení *tři body stačí*. Stačí nám tedy ověřit tvrzení pro tři body na ω .

- (i) Pokud $E = C$, pak $AE = AC$, $AF = AB$, $F = B$, G je střed BI . K_2 je průsečík DG a ω . K_1 je průsečík CI s ω , takže střed oblouku AB . Chceme ukázat, že $K_1 = K_2$. Takže stačí ukázat, že DGK_1 leží na přímce. Nyní využijeme trochu znalost o středech oblouků. Víme, že $|K_1I| = |K_1B|$, analogicky $|DI| = |DB|$. Takže D a K_1 leží na ose BI . Na ní ale leží i bod G . Takže jsme ukázali, že $f(C) = g(C)$.

- (ii) Pokud $E = B$, tak je důkaz úplně stejný jako pro $E = C$. Takže $f(B) = g(B)$.

- (iii) Nakonec nechť $E = D$. Pak $AE = AI = AF$, $F = AI \cap BC$, G je střed FI . Platí $DG = DI$, takže $K_2 = A$. K_2 je také A . Takže $f(D) = g(D)$.

Tohle ale znamená z tvrzení *tři body stačí*, že f a g se shodují na všech bodech vstupu. Takže úloha je celá dokázána.

Poznámka 11. Všimni si, že úloha nás omezovala na E ležící na malém oblouku. Takový malý oblouk ale není náš standardní držák, se kterým umíme pracovat, tak jsme si úlohu lehce zobecnili pro E ležící kdekoli na ω .

Této metodě budeme říkat metoda projektivního hýbání s body². Myšlenka bude taková, že se pokusíme nejdříve úlohu převést na to, že se nějaké dva body rovnají, následně začneme s nějakým bodem hýbat. Konstrukce v úloze v závislosti na tomto bodě zkusíme nasimulovat pomocí projektivních zobrazení. Tím převedeme úlohu na otázku, zda se nějaká projektivní zobrazení rovnají. Tu vyřešíme pro libovolné tři různé body. Dost často si budeme chtít vybírat body, které úlohu nějakým způsobem degenerují.

Poznámka 12. Řešení příkladu 10 by se dalo přepsat také tak, že dodefinujeme T_1 střed oblouku AB a T_2 střed oblouku AC . Pak ukážeme, že dvojpoměr

$$(T_2, T_1, A, K_1) = (B, C, D, E) = (T_2, T_1, A, K_2)$$

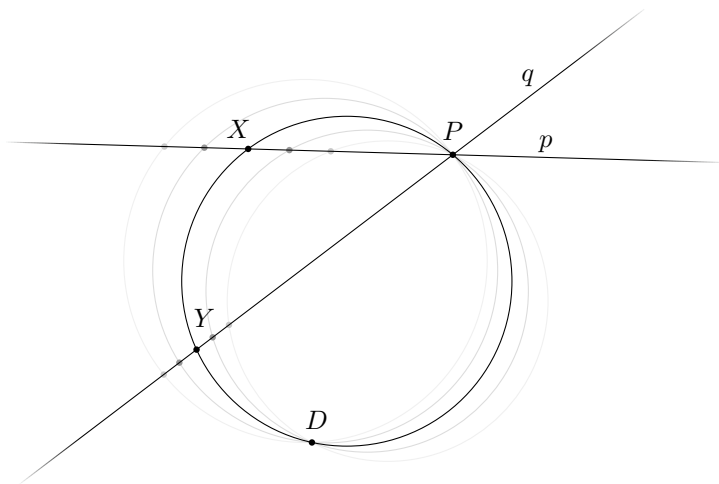
a použitím jednoznačnosti dvojpoměrů obdržíme řešení úlohy. Takže potřebné nástroje jsme měli už v prvním díle, jen tento nový pohled je v mnoha ohledech příjemnější. Protože nejdříve zkontrolujeme, že úloha stačí ověřit ve třech bodech, a až pak ty body hledáme a nemusíme promítat celé čtverice, ale stačí sledovat obraz jediného bodu.

Poznáváme projektivní zobzení

Už jsme si ukázali, jak získávat nová projektivní zobzení skládáním již známých projektivních zobzení. To je ten nejsilnější nástroj, který budeme potřebovat. Občas určit, že je zobzení projektivní, nebude tak jednoduché. Ukážeme si příklad projektivního zobzení a jak to o něm dokázat.

Příklad 13. Máme dvě přímky p, q , které se protínají v P . Dále máme pevný bod D mimo ně. Pak zobzení g , které bodu $X \in p$ přiřadí $Y \in q$, definované tak, že body X, Y, P, D leží na jedné kružnici, je projektivní.

²Pouhé *hýbání s body* už využívá František Konopecský a označuje odlišnou metodu, která nevyužívá projektivních nástrojů. Viz <https://prase.cz/library/HybaniFK/HybaniFK.pdf>.



Řešení. Chceme toto zobrazení rozebrat na více zobrazení, o kterých víme, že projektivní jsou. Využijeme proto inverzi φ se středem v P . Pak X', Y', D' označíme obrazy bodů X, Y, D . A protože X, Y, P, D leží na kružnici, X', Y', D' leží na přímce. Takže zobrazení f , které dostane X' a vrátí Y' , je promítnutí skrz pevný bod D' , tudíž je projektivní. Z bodu Y' do Y se dostaneme znovu zpětnou inverzí. Takže hledané zobrazení je složením těchto projektivních $g = \varphi \circ f \circ \varphi$.

Tento způsob řešení by se dal shrnout tak, že inverze zobrazuje projektivní zobrazení na projektivní zobrazení. Důležité je si z toho odnést, že když chceš dokázat, že něco je projektivní, inverze je tvůj velký kamarád. Obdobným způsobem Ti může pomoci i kolineace či občas dokonce polárová dualita. Inverze je však častější. Můžeš si to zkusit na následujících cvičeních.

Cvičení 14. Mějme přímku p a pevné body A, B mimo ni. Definujeme zobrazení, které bodu $X \in p$ přiřadí $Y \in p$ takové, že A, B, X, Y leží na kružímce. Dokaž, že je projektivní.

Cvičení 15. Mějme přímku p , která se dotýká kružnice ω v bodě A . Zobrazení g zobrazí $X \neq A \in p$ na $Y \in \omega$ tak, že XY je tečna k ω a $Y \neq A$. Dokaž, že g je projektivní. Jak by se mělo chovat pro $X = A$?

Poznámka 16. Projektivní zobrazení z předchozího cvičení může být často užitečné. Umožňuje Ti totiž projektivně rozhýbat trojúhelník s pevnou kružnicí vepsanou.

Cvičení 17. Mějme kružnici ω a přímku p . Pak zobrazení f definujeme tak, že bodu $X \in \omega$ ($X \notin p$) přiřadí $Y \neq X \in \omega$ tak, že existuje bod G na p takový, že XG i YG jsou tečny k ω . Dokaž, že f je projektivní. Jak by se mělo chovat, když X je průsečík p a ω ?

Cvičení 18. Mějme přímku p a kružnici ω tak, že A je jeden jejich průsečík. Definujeme zobrazení f z $X \neq A \in p$ do $Y \in \omega$ tak, že $|\angle A Y X| = 90^\circ$. Dokaž, že je projektivní. Kam by se mělo zobrazit A ?

Možná Tě překvapilo, že se Tě ve cvičeních ptáme, jak se zobrazení chová v bodech, kde jsme ho nedefinovali. Je to velmi užitečná věc, jakou si u projektivních zobrazení uvědomit, protože tyto degenerované případy jsou často právě ty, které chceme ověřovat pro lemma *tři body stačí*.

Pojďme si ještě ukázat, jak intuitivně poznat, že zobrazení projektivní není. Nejlepší je všimnout si, zda je zadané zobrazení bijektivní. Nejlépe tak, že si zkusíš pro zadané zobrazení najít inverzní, pokud neexistuje jednoznačné inverzní, toto zobrazení projektivní není³. Další, čeho se dá všimnout, je, jak moc „jednoznačné“ lze zkonstruovat. Ukážeme si na příkladě.

Příklad 19. Mějme kružnice ω a δ tak, že δ leží uvnitř ω a neprotínají se. Pak zobrazení f z $X \in \omega$ do $Y \in \delta$ definujeme tak, že XY je „pravotočivá“ tečna k δ . Pak f je bijektivní, ale intuice by Ti měla říct, že tato definice není dobře zkonstruovatelná, takže f projektivní není. To, co by Tě mělo bít do očí, je, že máme „pravotočivou“ a „levotočivou“ tečnu, ale dost uměle si vybíráme jednu z nich. Samozřejmě, že toto není dobře definovatelné pravidlo, můžou existovat i divná projektivní zobrazení, ale často je to dobrý náhled na to, co projektivní není.

Poznámka 20. Všimni si, že když už máme projektivní zobrazení zobrazující bod A do B , tak protože existuje vždy inverzní zobrazení, tak máme i projektivní zobrazení z B do A , takže občas budeme říkat, že jsou A, B projektivně svázané, čímž myslíme, že existují tato projektivní zobrazení.

V úlohách je důležitým krokem při použití této metody vybrat správný bod kterým hýbat. Většinou se chceš snažit hýbat jemně, aby se co nejméně částí úlohy hýbalo. Pak je větší šance, že vzniklá zobrazení budou projektivní. Tři jednoduché případy už pak často existují.

Úloha 21. (existence kamaráda) Říkáme, že body P, Q jsou *kamarádi* v ABC , pokud $|\angle PAB| = |\angle QAC|$, $|\angle PBA| = |\angle QBC|$ a $|\angle PCB| = |\angle QCA|$. Dokaž, že každý bod P , který neleží na stranách trojúhelníka ABC , má kamaráda.

V prvním díle jsme Ti ukázali kouzelný důkaz Pascalovy věty pomocí promítání dvojpoměrů. Teď už ale máš nástroje na to si ji dokázat sám (sama).

Úloha 22. (Pascalova věta) Mějme tětíkový šestiúhelník $ABCDEF$. Označme $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap FA$. Dokaž, že X, Y, Z leží na jedné přímce.

Úloha 23. Mějme trojúhelník ABC s vepsíštěm I . Kružnice vepsaná se dotýká strany BC v D . Body P, Q leží postupně na BI, CI tak, že $|\angle PAQ| = \frac{1}{2}|\angle BAC|$. Dokaž, že $|\angle QDP| = 90^\circ$.

³Dala by se definovat projektivní zobrazení, která nejsou prostá, ale standardně taková nepotkáš.

Úloha 24. (Unlikely Concurrence) Mějme trojúhelník ABC . Označme body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC postupně X, Y . Dokaž, že XY , střední příčka vzhledem k vrcholu C a osa úhlu u vrcholu A prochází jedním bodem. Následně označ tento bod R a dokaž, že $|\angle CRA| = 90^\circ$.

Úloha 25. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC a v něm bod P . Označme A_1 překlopené P podle BC . Analogicky B_1 překlopené P podle AC a C_1 překlopené P podle AB . Dokaž, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 prochází jedním bodem.

Úloha 26. (Jacobi) Mějme trojúhelník ABC . Sestrojme body X, Y, Z tak, že $|\angle YAC| = |\angle ZAB|$, $|\angle ZBA| = |\angle XBC|$ a $|\angle YCA| = |\angle XCB|$. Dokaž, že AX, BY, CZ prochází jedním bodem.

Úloha 27. Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y . Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z . Ukaž, že X, Y a Z leží na jedné přímce. (PraSe 38 Myš-Maš/6)

Úloha 28. Mějme trojúhelník ABC . Označme M, N středy stran AB, AC . Na tečně ke kružnici opsané ABC v bodě A zvolme bod X . Označme ω_B kružnici procházející MB dotýkající se přímky MX . Analogicky ω_C je kružnice skrz body NC dotýkající se NX . Dokaž, že ω_B a ω_C se protínají na BC .

Úloha 29. Mějme P, Q kamarády⁴ v ABC . Označme X patu Q na BC . Kružnice nad průměrem AP protíná opsanou ABC v K různém od A . Přímka AQ protíná opsanou ABC v T různém od A . Dokaž, že T, X, K leží na přímce.

Úloha 30. Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k . Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k , body dotyku pojmenovala A a B . Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ . Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L . Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protнула k podruhé v bodě T . Ukaž, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\angle PBT| = |\angle QLA|$. (PraSe 38 Tečny/7)

Úloha 31. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P, Q takové, že platí $|\angle PBA| = |\angle QBC|$, $|\angle PCB| = |\angle QCA|$ a $|\angle PAC| = |\angle QAB|$. Nechť jsou O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníků PBC a QBC . Dokaž, že platí $|\angle BAO_1| = |\angle CAO_2|$. (iKS 9. ročník G5)

Úloha 32. Mějme čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|\angle BAD| + 2|\angle BCD| = 180^\circ$. Označme E průsečík osy $\angle BAD$ s BD . Osa AE protíná BC a CD v X a Y . Dokaž, že A, C, X, Y leží na jedné kružnici.

Úloha 33. Mějme trojúhelník ABC . Na straně BC zvolme bod D . Na ose úhlu BAC zvolme bod I . Přímky BI, AI protínají kružnici opsanou ABD postupně v bodech P, Q . Analogicky přímky CI a AI protnou kružnici opsanou ACD v bodech R, S . Dokaž, že přímky RS, PQ, BC prochází jedním bodem.

Úloha 34. Mějme bod P na straně AB v trojúhelníku ABC . Na stranách AC a BC zvolíme S a T tak, aby $|AP| = |AS|$ a $|BP| = |BT|$. Kružnice opsaná PST

⁴Viz úloha existence kamaráda.

protne AB a BC znovu v Q a R . Přímky PS a QR se protnou v L . Ukaž, že přímka CL pólí PQ .

Úloha 35. Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme H ortocentrum ABC . Dále na AB a BC zvolme P, Q tak, aby $PH \parallel AD$ a $QH \parallel CD$. Dokaž, že kolmice na PQ skrz bod H prochází ortocentrem ACD .

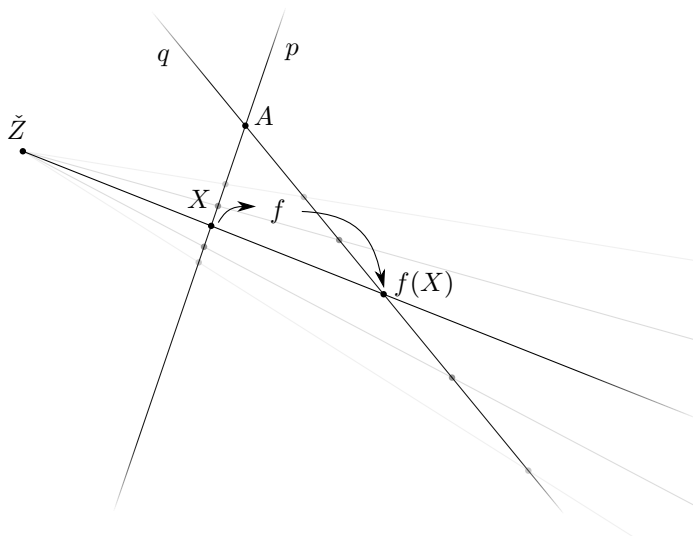
Úloha 36. V trojúhelníku ABC označme A' a B' paty výšek z A a B . Na kružnici opsané ABC na oblouku ACB je bod D . Dále $P = AA' \cap BD$ a $Q = BB' \cap AD$. Dokaž, že střed PQ leží na $A'B'$.

Úloha 37. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná se středem I dotýká stran AC a AB v bodech E, F . Obrazy bodů E, F ve středové symetrii přes I označme G, H . Buď Q průsečík GH a BC a M střed BC . Dokaž, že jsou přímky IQ a IM na sebe kolmé. (Taiwan TST 2014)

Záhadný bod

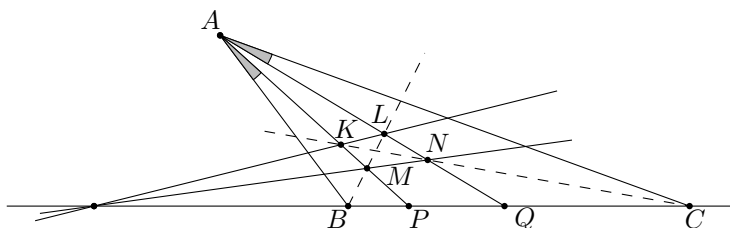
Pojďme se nyní podívat na trochu jiný styl úloh. Budou to úlohy, kde je třeba dokázat, že nějaká množina přímek prochází pevným bodem. Standardní postupy nám říkají, že jako první chceme zjistit, co je ten společný průsečík zač, a pak jen o každé přímce dokázat, že tímto bodem prochází. Ukážeme si způsob, jak lze občas přeskóčit tento krok určující vlastnosti hledaného bodu. Dokážeme, že množina přímek prochází pevným bodem, i když vůbec nezjistíme, o jaký bod se jedná. K tomu nám poslouží následující lemma.

Lemma 38. (o záhadném bodu) Mějme dvě přímky p, q . Označme A jejich průsečík. Necht' je $f : p \rightarrow q$ projektivní zobrazení. Pak pokud $f(A) = A$, pak všechny přímky $Xf(X)$ procházejí pevným bodem.



Důkaz. Uvažme různé body $B \neq A \in p$, $C \neq A \in p$. Označme $\tilde{Z}$ průsečík $Bf(B)$ a $Cf(C)$. Definujme zobrazení g jako promítnutí z p do q skrz bod $\tilde{Z}$. Zobrazení f i g jsou projektivní. Zároveň $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$ a $f(A) = A = g(A)$. Takže z lemmatu *tři body stačí* je f shodné s g . Takže všechny přímky $Xf(X)$ prochází skrz $\tilde{Z}$. $\square$

Příklad 39. Na straně BC v trojúhelníku ABC mějme body P, Q tak, že platí $|\angle BAP| = |\angle QAC|$. Osa úhlu ABC protíná AP a AQ postupně v bodech M a L . Osa úhlu ACB protíná AP a AQ postupně v K, N . Dokaž, že BC, MN a KL prochází jedním bodem.



Řešení. Podíváme se na osy úhlů $\angle ABC$ a $\angle ACB$ jako držáky $\mathcal{U}, \mathcal{V}$. Pak dodefinujeme zobrazení φ , které bod $X \in \mathcal{U}$ zobrazí na $Y \in \mathcal{V}$ tak, že $|\angle XAB| = |\angle YAC|$. Všimni si, že tohle zobrazení je projektivní. Označme I průsečík osy $\angle ABC$ a osy $\angle ACB$. Pak $\varphi(I) = I$, protože je to střed kružnice vepsané. Takže podle lemmatu o záhadném bodu všechny přímky $X\varphi(X)$ prochází pevným bodem. Pro dokončení důkazu si stačí všimnout, že $\varphi(M) = N$, $\varphi(L) = K$ a $\varphi(B) = C$. Takže BC, MN a KL prochází jedním bodem.

Úloha 40. Mějme pevný bod D a pevné přímky k, l , které procházejí společným bodem A . Na přímkách k, l jsou postupně body X a Y takové, že $|\angle XDA| = |\angle YDA|$. Dokaž, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 41. (těžká) Mějme trojúhelník ABC . Na straně BC leží bod P . Kružnice nad průměrem BP protne podruhé kružnici opsanou APC v Q . Přímka PQ a AC se protínají v M . Označme H ortocentrum trojúhelníka ABP . Dokaž, že když se P hýbe na BC , tak přímky HM prochází pevným bodem.

Dokresluje kuželosečky

V této kapitole si ukážeme, jak může být občas praktické si do úlohy dokreslit kuželosečku, kde jako kuželosečku bereme jakkoli zkolineovanou kružnici. Aby se nám kuželosečky hodily, dodefinujeme si na nich dvojpoměr, takže kuželosečky budou zapadat do držáků. Jak dodefinovat dvojpoměr na obecné kuželosečce? Uděláme malý podvod, neřekneme přímo, jak ho jednoduše spočítat, ale ukážeme, že nějak určit lze.

Definice 42. (dvojpoměr na kuželosečkách) Uvažme kuželosečku δ a na ní čtyři body A, B, C, D . Pak existuje kolineace, která zobrazí δ na kružnici. Na této kružnici ale A', B', C', D' umíme přiřadit nějaký dvojpoměr. Takže (A, B, C, D) definujeme na kuželosečce jako dvojpoměr (A', B', C', D') , kde jsme δ zobrazili kolineací.

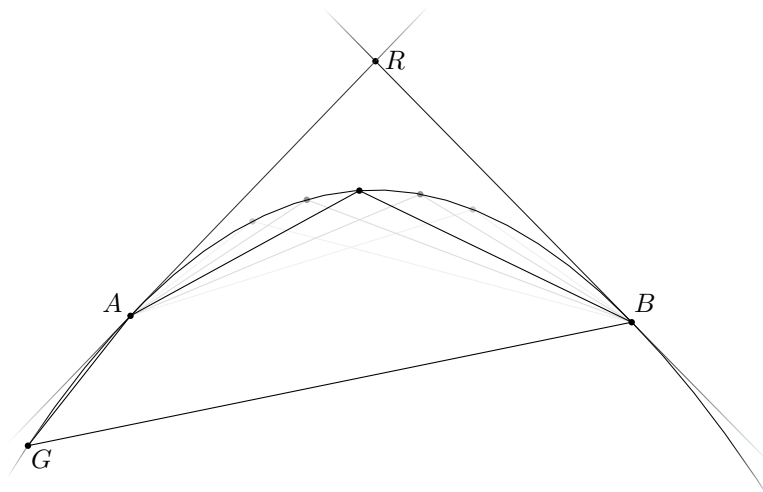
Je tahle definice jednoznačná? Vzpomeň si, že pokud kolineace zachová kružnici, tak na ni zachová i dvojpoměr. Zároveň složení kolineací je stále kolineace. Takže nemůžou existovat dvě různé kolineace zobrazující δ na kružnici takové, že dvojpoměry (A', B', C', D') by se lišily.

Projektivní zobrazení na kuželosečkách jsou velmi podobná projektivním na kružnici. Hlavně se nám budou hodit tyto dvě:

- (i) Mějme kuželosečku δ a bod A , který na ní leží. Pak zobrazení z δ do svazku v A takové, že zobrazí X na AX , je projektivní. Bod A se zobrazí v tomto zobrazení na tečnu k δ .
- (ii) (prostřelovací) Mějme kuželosečku δ a bod A , který na ní neleží. Pak zobrazení z δ do δ takové, že bod X zobrazí na Y tak, že Y je druhý průsečík XA a δ . Pokud existuje jen jeden průsečík, X se zobrazí samo na sebe.

Cvičení 43. Zkus si dokázat, že jsou tato zobrazení opravdu projektivní.

Věta 44. (Steinerova kuželosečka) Mějme různé body A, B v projektivní rovině. Označme $\mathcal{U}$ držák přímek procházejících bodem A a $\mathcal{V}$ držák přímek procházejících bodem B . Dále mějme projektivní zobrazení φ z $\mathcal{U}$ do $\mathcal{V}$. Pak pokud obraz AB není BA , tak množina průsečíků $p \cap \varphi(p)$ je kuželosečka. A platí, že A, B na této kuželosečce leží a φ zobrazí AB na tečnu v B k této kuželosečce.



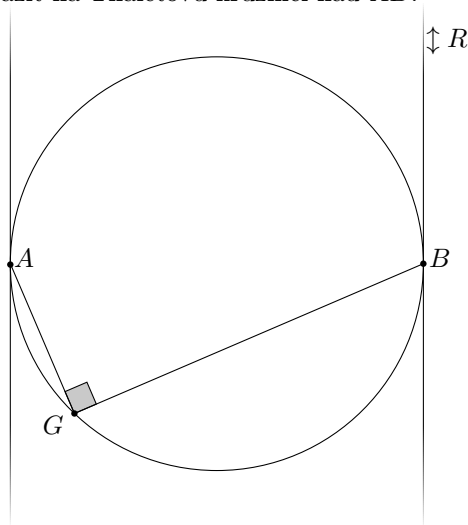
Důkaz. Myšlenka důkazu je taková, že se pokusíme úlohu zkolineovat tak, že zadané zobrazení je nějaké pěkné, u kterého množinu průsečíků známe. Dobrým kandidátem

je zobrazení přímky p skrz A na přímku q skrz B tak, že $p \perp q$.⁵ Pak množina jejich průsečíků je Thaletova kružnice. Tak to pojďme udělat.

Označme φ^{-1} zobrazení inverzní k φ . Dále označíme $k = \varphi(AB)$ a $\ell = \varphi^{-1}(BA)$. Pak protože AB se nezobrazí na BA , tak k a ℓ jsou různé přímky. Označme R jejich průsečík. Vyberme libovolnou⁶ přímku q procházející A . Označme G průsečík $q \cap \varphi(q)$.

Tak nyní máme čtyři body A, B, R, G . Kolineace nám dovoluje tyto čtyři body umístit do libovolných jiných čtyř bodů projektivní roviny (v obecné poloze). Tak si pojďme rozmyslet, kde je chceme mít, aby se φ chovalo jako ta rotace, kterou hledáme.

Když chceme, aby byly vždycky kolmé, tak AB se zobrazí na kolmici na AB skrz B a BA se inverzně zobrazí na kolmici skrz A , takže R chceme zobrazit na nevlastní bod ve směru kolmém na AB . Bod G je obecný bod na naší hledané kuželosečce, takže ten chceme zobrazit na Thaletovu kružnici nad AB .



To je přesně kolineace, kterou použijeme. Zbývá říct, že φ po této kolineaci je opravdu ta hezká rotace, kterou chceme. K tomu využijeme *tři body stačí*. φ je projektivní a rotace o 90° taky, takže máme tyto dvě projektivní zobrazení a ty porovnáváme. Obraz AB je v obou BR . Obraz AG je v obou BG a obraz AR je v obou BA . Takže máme tři body, kde se shodují. Množina průsečíků $p \cap \varphi(p)$ je kuželosečka, protože jsme ji kolineací dokázali zobrazit na kružnici. A zmíněné vlastnosti o tom, že A, B na ní leží, a na co se zobrazí AB , z této kolineace plynou taktéž. $\square$

Možná by Tě zajímalo, jaká je množina těchto průsečíků, když $\varphi(AB) = BA$. Pak je tato množina přímka. Můžeš si zkusit rozmyslet, že tohle tvrzení je duální

⁵Toto zobrazení je projektivní, protože se jedná o otočení o 90° a následně posunutí z A do B .

⁶Dost obecnou, takže nesmí být rovna těm, o kterých už jsme mluvili.

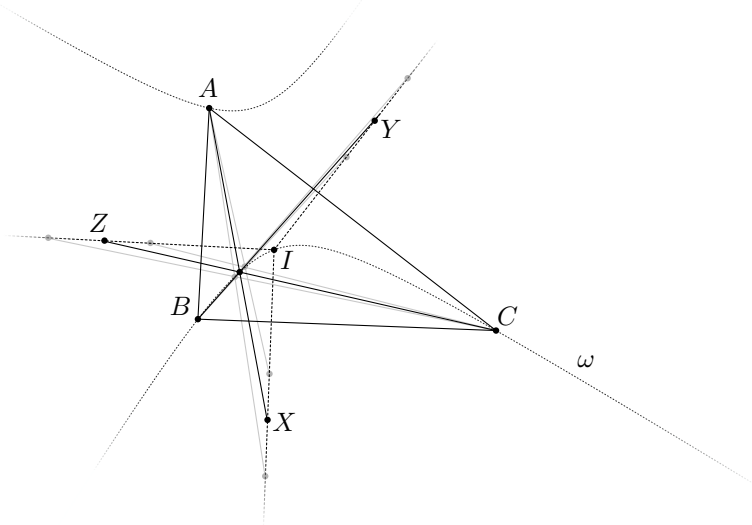
k tvrzení o záhadném bodu. Hodí se k tomu, že dualita zachovává dvojpoměry, takže se chová hezky k projektivním zobrazením.

Máme už dostatek znalostí o kuželosečkách, tak si můžeme ukázat, jak nám můžou pomoci při řešení metodou projektivního hýbání s body.

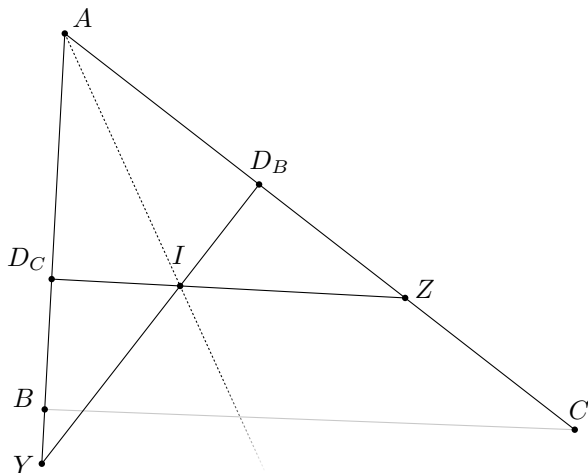
Příklad 45. (Kariya) Mějme trojúhelník ABC a I označme jeho vepsiště. Pak označme D_A, D_B, D_C paty I na strany a, b , respektive c . Body X, Y, Z leží postupně na polopřímkách ID_A, ID_B, ID_C tak, že $|IX| = |IY| = |IZ|$. Dokaž, že přímky AX, BY, CZ prochází jedním bodem.

Řešení. Začneme hýbat z bodem X po přímce ID_A . Pak zobrazení z X do Y je projektivní, kde pro X na polopřímce opačné k ID_A bude Y ležet na polopřímce opačné k ID_B . To, že je projektivní, se dá nahlédnout buď tak, že je to obecné shodné zobrazení, nebo ho přímo najít jako rotaci kolem I .

Obdobně zobrazení z X do Z je projektivní, takže máme projektivně svázané přímky AX, BY, CZ . Jenže teď narážíme na problém. Naše původní metoda předpokládala, že najdeme dvě zobrazení do nějakého bodu na nějakém držáku. Ale hledaný průsečík AX, BY a CZ se obecně nehýbe ani po přímce, ani po kružnici. Přichází na řadu Steinerova kuželosečka. Dokreslíme Steinerovu kuželosečku, kterou generují přímky BY a CZ , a označíme ji ω .



Nejdříve dokážeme, že A na ní leží, zatím to víme jen o B a C . Ale pokud úloha platí, tak ze symetrie na ní musí ležet i A . Necht Y je průsečík ID_B s AB . Pak ze symetrie podle osy úhlu $\angle CAB$ je Z průsečík ID_C s AC . Takže přímka BY je shodná s AB a přímka CZ je shodná s přímkou AC , takže $A = CZ \cap BY$ leží na ω .



Dodefinujeme si body H_1 a H_2 . Budiž H_1 druhý průsečík BY a ω a H_2 druhý průsečík AX a ω . Víme, že H_1 leží na BY a CZ a H_2 leží na AX . Stačí tedy ukázat, že se tyto dva body rovnají nezávisle na poloze X . Konečně tedy definujeme dvě projektivní zobrazení. První bude ψ a zobrazuje $X \mapsto Y \mapsto BY \mapsto H_1$. A druhé bude φ a zobrazuje $X \mapsto AX \mapsto H_2$.

Můžeme tedy využít lemma *tři body stačí*. Pořád si ale musíme dávat pozor, abychom nedokazovali úlohu kruhem, a musíme pamatovat na to, že ω je definovaná jako průsečíky přímek BY a CZ . Takže třeba nevíme, že BA se zobrazí na tečnu k ω v A . A tohle dokázat není triviální, takže si vybereme radši jiné degenerované případy, které se dokazují lépe.

- (i) Když X leží na AC , tak $H_1 = H_2 = C$. Plyne ze symetrie podle úhlu $\angle BCA$.
- (ii) Když X leží na AB , tak $H_1 = H_2 = B$. To je trochu složitější. Ze symetrie znovu víme, že CZ protíná ω podruhé v B . Obraz CZ v projektivním zobrazení do BY tedy musí být tečna k ω v B . Takže $H_1 = B$.
- (iii) Když $X = I$, Pak $H_1 = H_2 = I$.

Tím jsme dokázali, že se H_1 vždy rovná H_2 .

Poznámka 46. Všimni si, že se nemohlo stát, že by Steinerova kuželosečka byla degenerovaná do přímky. Pak by totiž B, C na ní neleželo. Zato A by na ní stále ze stejného argumentu leželo. To by ale porušilo symetrii celé úlohy. Takže se opravdu jedná o kuželosečku, a ne o přímku.

Poznámka 47. Všimni si, že dva ze tří případů nám Steinerova kuželosečka dala vlastně zadarmo, protože víme, že existuje případ, kdy se H_1 bude rovnat B , resp. C . Tyto dva případy bývají často degenerované, takže jsou přímo určené k lemmatu *tři body stačí*. Proto si často stačí uvědomit, kdy tyto případy nastanou, a najít jeden případ navíc. Pozor na případ, kdy se H_1 rovná A . Ten sice také vždycky existuje,

ale neumíme říct, že H_2 je v tu chvíli také A . K tomu bychom právě potřebovali, že AX je tečná k ω .

Tato metoda je velmi užitečná, protože nám pomáhá se vypořádat s body, co se po hezkých držácích nehýbou přímo. Ale není jednoduché ji umět správně použít, protože je potřeba dávat velký pozor na to, co máme jak definované a nezapočítat nějaký degenerovaný případ dvakrát.

Úloha 48. (IMO 2019/2) Na stranách BC a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body A_1 a B_1 . Body P a Q jsou zvoleny postupně uvnitř úseček AA_1 a BB_1 tak, že přímka PQ je rovnoběžná se stranou AB . Dále P_1 je bod na přímce PB_1 , pro nějž platí, že B_1 leží uvnitř úsečky PP_1 a zároveň $|\angle PP_1C| = |\angle BAC|$. Podobně bod Q_1 leží na přímce QA_1 tak, že A_1 leží uvnitř úsečky QQ_1 a zároveň platí $|\angle CQ_1Q| = |\angle CBA|$. Dokaž, že body P, Q, P_1, Q_1 leží na jedné kružnici.

Involuce

Nyní se podíváme na speciální projektivní zobrazení, kterým se říká *involutorní* či přímo *involuce*.

Definice 49. *Involucí* nazýváme projektivní zobrazení φ z držáku $\mathcal{U}$ do $\mathcal{U}$, které je samo sobě inverzní neboli platí $\varphi(\varphi(X)) = X$.

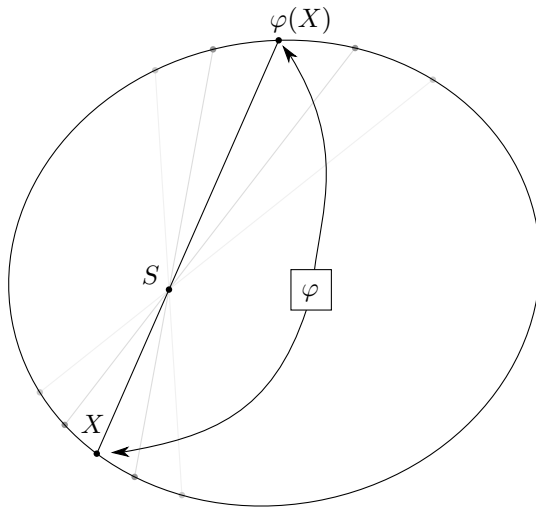
Poznámka 50. Obecně se v matematice involuce říká jakémukoli zobrazení, které je samo sobě inverzní. Jen v tomto seriálu kdykoli řekneme involuce, myslíme projektivní zobrazení. Také identita je příklad involuce, dokonce i projektivní. Té budeme říkat *triviální involuce*.

Rozmysli si, že pár involucí už známe – třeba prostřelovací projektivní zobrazení nebo jakákoli inverze. Pojdme si ukázat, jak se involuce chová na kuželosečce. Obecně se na involutorní zobrazení chceš často dívat jako na rozdělení objektů⁷ do dvojic, kde bod může být ve dvojici sám se sebou (takovou dvojici pak nazveme triviální). Také si všimni, že dvě involuce jsou stejné, pokud se shodují na dvou dvojicích, kde alespoň jedna je netriviální. Pak totiž máme tři body, na kterých se shodují.

Lemma 51. *Nechť ω je kuželosečka⁸ a φ je netriviální involuce na této kuželosečce. Pak všechny přímky $X\varphi(X)$ prochází pevným bodem. Tomuto bodu budeme říkat střed involuce.*

⁷Dvojčky mohou být například body či přímky, záleží, na jakém držáku jsme.

⁸Většinou se bude hodit jako kuželosečka přímo kružnice.



Důkaz. Uvažme bod $Y \in \omega$, který se nezobrazí sám na sebe, a $Y' = \varphi(Y)$. Dále mějme bod $Z \in \omega$ různý od Y a Y' . Pak p označíme přímkou YY' a q přímkou $Z\varphi(Z)$, kde pokud $\varphi(Z) = Z$, bereme tečnu k ω v Z . Označíme $S = p \cap q$. Nyní definujeme involutorní zobrazení ψ na ω jako prostřelení skrz S . Pak ψ a φ se shodují na obrazech různých bodů Z, Y, Y' , takže jsou z lemmatu *tři body stačí* stejná. Takže všechny přímky $X\varphi(X)$ prochází bodem S . $\square$

Všimni si, že tohle znamená, že každá involuce na kružnici je inverze, protože prostřelovací zobrazení je inverze. Tak to vypadá, že na kružnici jsme už všechna involutorní zobrazení znali, ukážeme si, že stejně tak je tomu i na přímce.

Tvrzení 52. *Každá netriviální involuce na přímce je nějaká inverze.*

Důkaz. Uvažme přímkou p a na ní netriviální involuci φ . Označme A_1, A_2 ($A_1 \neq A_2$) prvky jedné dvojčky této involuce a B_1, B_2 ($B_1 \neq B_2$) prvky druhé. Pak dokresleme kružnice nad průměry A_1A_2 a B_1B_2 . Pak chordála těchto kružnice protíná p v X . Takže existuje inverze se středem X , která prohazuje právě tyto dvojčky. Takže *tři body stačí* a tato inverze je stejná jako původní involuce. $\square$

Tvrzení 53. *Mějme projektivní zobrazení φ , pro které platí, že prohazuje jednu dvojčku, neboli pro různá A, B platí $\varphi(A) = B$ a $\varphi(B) = A$. Pak φ je involuce.*

Důkaz. Nalezněme obraz nějakého třetího prvku C . Označíme $D = \varphi(C)$. Pak se podíváme na dvojpoměr (A, B, C, D) . Po aplikování projektivního zobrazení φ dostáváme rovnost

$$(A, B, C, D) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)) = (B, A, D, \varphi(D)) = (A, B, \varphi(D), D).$$

Takže z jednoznačnosti dvojpoměrů $\varphi(D) = C$, Takže toto zobrazení je involucí. $\square$

Tvrzení 54. *Netriviální involuce má nanejvýš dva pevné body.*

Důkaz. Označme φ involuci s alespoň třemi pevnými body A, B, C . Pak pro libovolný prvek X různý od A, B, C platí

$$(A, B, C, X) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(X)) = (A, B, C, \varphi(X))$$

Takže z jednoznačnosti dvojpoměrů $X = \varphi(X)$ pro všechna X . Ale z toho plyne, že φ je triviální involuce. $\square$

Tvrzení 55. *Pokud se dvě netriviální involuce shodují na dvou pevných bodech, jsou stejné.*

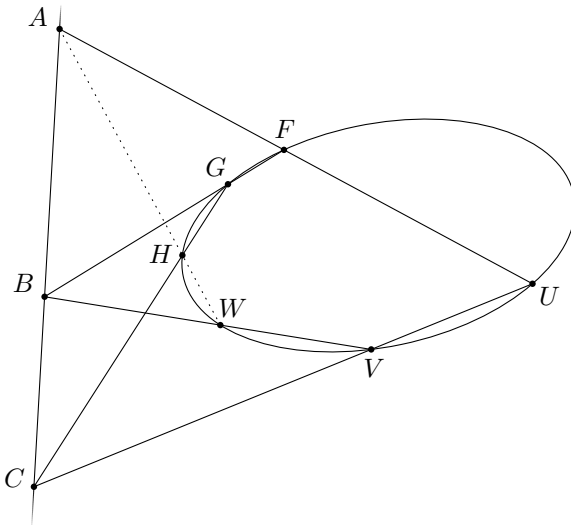
Důkaz. Označme φ a ψ involuce s pevnými body A, B . Označme C obecný prvek různý od A, B a $D = \varphi(C)$. Pak aplikováním φ na dvojpoměr (A, B, C, D) dostáváme

$$(A, B, C, D) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)) = (A, B, D, C) = \frac{1}{(A, B, C, D)}.$$

Protože jsou body A, B, C, D různé, znamená to, že $(A, B, C, D) = -1$. Označíme $E = \psi(C)$. Pak analogicky dostaneme, že $(A, B, C, E) = -1$ neboli z jednoznačnosti dvojpoměrů $D = E$. Takže zadané involuce se shodují ve všech bodech. $\square$

Poznámka 56. Pokud bychom předchozí lemmata dokazovali jen pro body na přímce, můžeme nahlédnout, že plynou z toho, že všechny involuce jsou inverze.

Lemma 57. (ping pong) *Mějme kuželosečku ω . Dále mějme tři body A, B, C ležící na přímce p . Pak označme φ_A involuci na ω se středem A . Analogicky φ_B a φ_C . Pak složení $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C$ je znovu involuce a má střed na přímce p .*



Důkaz. Uvědom si, že z toho, že máme involuce, tak inverzní zobrazení k φ_A je φ_A a analogicky pro φ_B a φ_C . Dokážeme nejdříve, že se jedná o involuci. Stačí ukázat, že pro každé X na ω platí

$$\xi(X) = \varphi_A(\varphi_B(\varphi_C(X))) = \varphi_C(\varphi_B(\varphi_A(X))) = \xi^{-1}(X).$$

Označme U nějaký bod na ω . Dále označme $V = \varphi_C(U)$, $W = \varphi_B(U)$. Pak $\varphi_A(W) = \xi(U)$. Analogicky definujeme $F = \varphi_A(U)$, $G = \varphi_B(F)$ a $H = \varphi_C(G)$. Pak $H = \xi^{-1}(U)$. Takže stačí ukázat, že $H = \varphi_A(W)$. Neboli že HW prochází A . To ale plyne z Pascalovy věty na $UVWHGF$. Takže se opravdu jedná o involuci.

K druhé části důkazu uděláme trochu triky. Kolineační BÚNO se jedná o kružnici. Víme, že involuce na kružnici se středem v K se dá interpretovat jako inverze se středem v K . Podíváme se tedy na zobrazení φ_A , φ_B , φ_C v celé komplexní rovině. Jedná se o inverze se středy A , B a C . Každá z těchto inverzí je zobrazení, které je symetrické podle přímky p . Takže i výsledné zobrazení bude symetrické podle p . Takže se jedná o inverzi, která je symetrická podle p . To ale znamená, že má střed na p . $\square$

Úloha 58. Mějme trojúhelník ABC . Označme H jeho ortocentrum a O střed kružnice opsané ω . Označme A_1 bod naproti A na ω . Bod A' budiž druhý průsečík A_1H a ω . Bod A'' označme překlopené H podle strany BC . Symetricky definujeme body B' , B'' , C' , C'' . Dokaž, že přímky $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se protínají v jednom bodě na Eulerově přímce⁹ trojúhelníku ABC .

Lemmata, co tu jsou, si zkus také dokázat. Budou se Ti ještě hodit.

Lemma 59. Mějme kružnici ω a na ní involuci φ . Mimo ni bod P . Dokaž, že kružímky opsané $PX\varphi(X)$ prochází pevným bodem různým od P .

Lemma 60. Mějme přímku ℓ a mimo ni bod P . Dále uvažme involuci φ na ℓ . Dokaž, že nezávisle na volbě $X \in \ell$ všechny kružímky opsané $PX\varphi(X)$ prochází pevným bodem různým od P .

Úloha 61. Mějme trojúhelník ABC . Na ose úhlu u A zvolme bod G . Dále zvolme body K , L na BC tak, že $|\angle KAB| = |\angle LAC|$. Dokaž, že nezávisle na bodech K , L kružnice opsané GKL prochází pevným bodem různým od G .

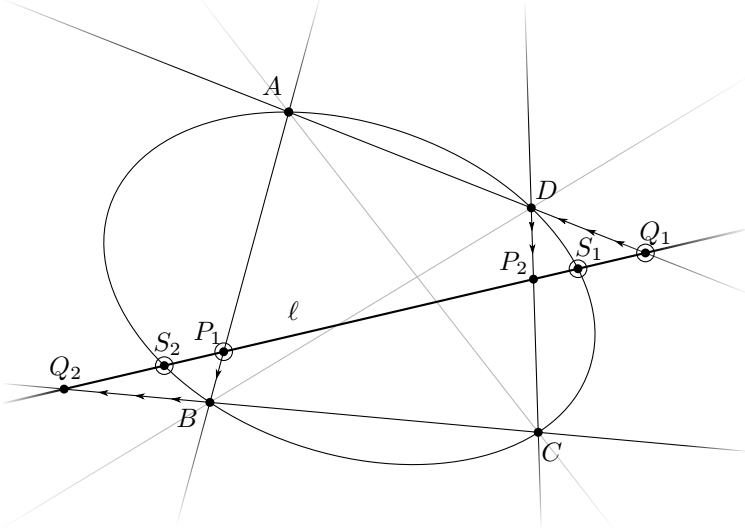
Lemma 62. Mějme přímku ℓ a na ní involuci φ . Dokaž, že nezávisle na $X \in \ell$ všechny kružnice nad průměrem $X\varphi(X)$ sdílí chordálu.

Desarguesova involuce

V této kapitole si ukážeme nástroj, který nám pomůže nalézt involuce v úloze.

⁹Pokud nevíš, co je to Eulerova přímka, doporučujeme Ti první díl seriálu o *Geometrii trojúhelníka*. Viz <https://prase.cz/archive/36/uvod1s.pdf>.

Věta 63. (Desarguesova involuce – DIT¹⁰) Mějme čtyři body A, B, C, D . Označme $p_1 = AB$, $p_2 = CD$, $q_1 = AD$, $q_2 = BC$, $r_1 = AC$, $r_2 = BD$. Dále mějme v rovině přímku ℓ neprocházející body A, B, C, D . Označíme $P_1 = \ell \cap p_1$. Analogicky definujeme P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2 . Libovolná kuželosečka procházející body A, B, C, D protíná ℓ v S_1, S_2 . Pak na přímce ℓ existuje involuce, která prohazuje dvojčky $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2), (S_1, S_2)$.



Důkaz. Uvažme na ℓ involuci (inverzi) ξ , která zobrazí S_1, S_2, P_1 postupně na S_2, S_1, P_2 . Ta existuje, protože inverze, stejně jako Möbiovské zobrazení, je dáno třemi obrazy. Protože jde o inverzi, zobrazí P_2 na P_1 . Ukážeme, že $\xi(Q_1) = Q_2$. Všimni si, že

$$(P_1, Q_1, S_1, S_2) \stackrel{A}{\wedge} (B, D, S_1, S_2) \stackrel{C}{\wedge} (Q_2, P_2, S_1, S_2) = (P_2, Q_2, S_2, S_1).$$

Už víme, že ξ zobrazí P_1, S_1, S_2 na P_2, S_2, S_1 . Protože je projektivní, zachovává dvojpoměr, takže z jednoznačnosti dvojpoměrů se $\xi(Q_1) = Q_2$. Analogicky ukážeme, že $\xi(R_1) = R_2$. Takže ξ je hledanou involucí. $\square$

Než si ukážeme, jak toto tvrzení použít v úloze, hodí se si rozmyslet, jak vypadají degenerované varianty.

Věta 64. (Desarguesova involuce pro 3 body) Mějme trojúhelník ABC na kuželosečce ω . Dále mějme přímku ℓ . Ta protíná AB, AC, BC postupně v P_1, P_2, Q_1 . Dále protíná tečnu k v A v bodě Q_2 . Také protíná ω v bodech S_1, S_2 . Pak existuje involuce prohazující dvojčky $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (S_1, S_2)$.

Věta 65. (Desarguesova involuce pro 2 body) Mějme body A, B na kuželosečce ω . Přímka ℓ protíná tečny vedené A, B k ω postupně v bodech Q_1, Q_2 . Dále ℓ

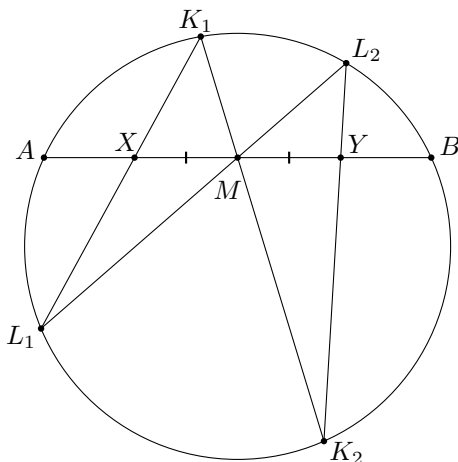
¹⁰Pochází z anglického Desargues Involution Theorem.

protíná AB v X a ω v S_1, S_2 . Pak existuje involuce prohazující tyto dvojčky $(X, X), (Q_1, Q_2), (S_1, S_2)$.

Tato tvrzení nedoporučujeme vnímat jako tři odlišné věty. Hodí se naučit se „vidět“ v těchto tvrzeních původní Desarguesovu větu. Rozmysli si čím nesmí procházet přímka ℓ v těchto degenerovaných případech, když v DIT nesmí procházet body A, B, C, D .

Ukážeme si nyní použití DIT na již známé úloze.

Příklad 66. (butterfly) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB se středem M . Na ω zvolme body K_1, L_1 . Označme K_2 průsečík K_1M s ω různý od K_1 . Obdobně definujme bod L_2 . Nechť $X = K_1L_1 \cap AB$ a $Y = K_2L_2 \cap AB$. Pak $|XM| = |YM|$.



Řešení. Uvažme čtyřúhelník $K_1L_1L_2K_2$ s kružnicí opsanou a přímku AB . Aplikujme na ně Desarguesovu involuci. Dostáváme involuci φ prohazující dvojčky $(A, B), (M, M), (X, Y)$. Definujme si involuci, která je na přímce AB a jedná se o překlopení podle M . Pak (A, B) a (M, M) jsou v této involuci, takže φ se s touto involucí shoduje na třech bodech, takže φ je překlopení podle M . Takže $|XM| = |YM|$.

Poznámka 67. Všimni si, že jsme dokázali i silnější tvrzení, víme, že kdykoli vezmeme libovolnou kuželosečku procházející body $K_1L_1L_2K_2$, tak protne AB v bodech symetrických podle M .

Úloha 68. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω . Označme p tečnu k ω v A . Přímka ℓ protíná AB, AC, BC, p v bodech K, L, M, N . Dokaž, že kružnice opsané AKL a AMN se protínají na ω .

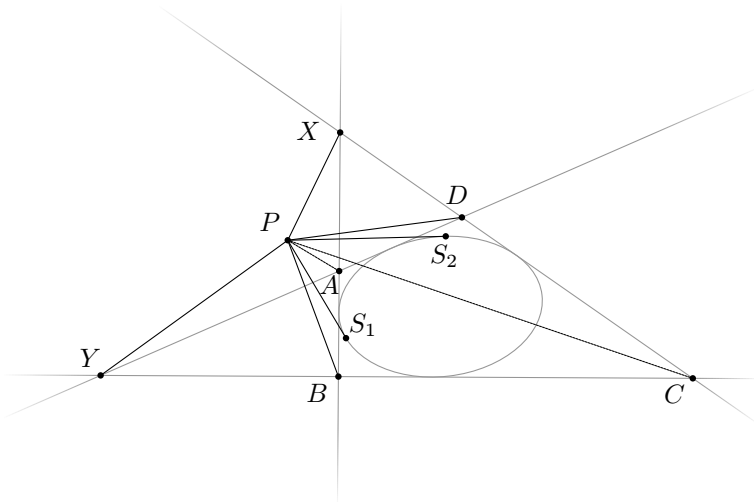
Úloha 69. Mějme trojúhelník ABC . Kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c v bodech A_1, B_1, C_1 . Označme M průsečík A -těžnice a přímky B_1C_1 . Dokaž, že MA_1 je kolmá na BC .

Úloha 70. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Ω . Kružnice ω se dotýká Ω v T a AB v K . Osa úhlu $\angle BCA$ protíná ω v bodech P, Q . Dokaž, že $|\angle BAP| = |\angle QAC|$.

Duální Desarguesova involuce

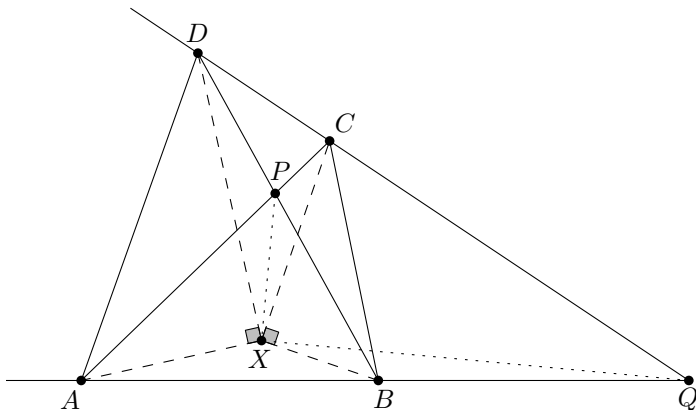
Většinou se nám v úlohách bude hodit duální varianta Desarguesovy involuce. Duální budeme myslet podle kružnice opsané $ABCD$. Ale občas $ABCD$ není tětiový. V minulém díle jsme si ukázali, že pokud kolineace zachová kružnici, zachová dualitu podle dané kružnice. Podobně jako jsme dodefinovali na kuželosečkách dvojpoměr, tak teď můžeme dodefinovat dualitu podle kuželosečky tak, že je to dualita podle kružnice po nějaké kolineaci.

Věta 71. (duální Desarguesova Involuce – DDIT) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Dále kuželosečku, která se dotýká přímek AB, BC, CD, DA . Dále mějme v rovině bod P neležící na těchto přímkách. Označme PS_1 a PS_2 tečny z P na ω . Dále označme $X = AB \cap CD$ a $Y = BC \cap DA$. Pak ve svazku přímek skrz P existuje involuce prohazující dvojice přímek $(PX, PY), (PA, PC), (PB, PD)$ a (PS_1, PS_2) .



Tato věta se často dá použít i bez kuželosečky, protože vždycky lze nalézt kuželosečku vepsanou čtyřem přímkám. Bez kuželosečky dostaneš tři dvojčky involuce. Už dvě nedegenerované dvojčky ji pomocí lemma *tři body stačí* přesně určí. Takže dostaneš nějakou informaci o třetí dvojčce. Ukážeme si, jak se tím dala řešit část úlohy z druhé série.

Příklad 72. Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Průsečík AB a CD označíme Q a průsečík AC a BD je P . Dále mějme bod X takový, že $|\angle AXD| = 90^\circ = |\angle BXC|$. Dokaž, že $|\angle QXP| = 90^\circ$.



Řešení. Uvažme čtyřúhelník $ABDC$. Na pořadí záleží, protože to určuje, jaké dvojčky nám DDIT dá. Aplikujeme DDIT na $ABDC$ a bod X . Dostaneme tyto dvojčky v jedné involuci (XA, XD) , (XB, XC) a (XP, XQ) . Otočení svazku o 90° je involuce, protože je projektivní a dvakrát aplikovaná je identita. První dvě dvojčky jsou v involuci rotace o 90° , takže i poslední dvojčka je v involuci rotace o 90° . Takže $|\angle PXQ| = 90^\circ$.

DDIT také často potkáš v zdegenerované podobě. Proto si napíšeme i další varianty, které často potkáš v úloze.

Věta 73. (DDIT pro trojúhelník) Mějme trojúhelník ABC s kuželosečkou vepsanou ω , která se dotýká strany BC v D . Dále mějme bod P různý od A, B, C, D . Označme PS_1, PS_2 tečny z P k ω . Pak existuje involuce ve svazku přímek skrz P , která prohazuje (PA, PD) , (PB, PC) a (PS_1, PS_2) .

Věta 74. (DDIT pro dva body) Mějme dva body A, B na kuželosečce ω . Tečny k ω v A, B se protínají v X . Mějme v rovině bod P . Tečny z P k ω označme PS_1, PS_2 . Pak existuje involuce ve svazku přímek skrz P , která prohazuje (PX, PX) , (PA, PB) a (PS_1, PS_2) .

Znovu si rozmysli, že v těchto větách vidíš původní DDIT. Tyto zdegenerované varianty nám už dávají pouze tři dvojčky, které se prohazují, takže bez kuželosečky jejich použití nedává žádné nové informace. Taky si rozmysli, kde v těchto zdegenerovaných případech nesmí být bod P , když v DDIT nesmí ležet na přímkách AB, BC, CD, DA .

Úloha 75. Mějme trojúhelník ABC . Na BC zvolme A_1, X, Y . V A_1 zvolme přímku ℓ . Ta protne AB a AC v B_1, C_1 . Přímky XB_1 a YC_1 se protínají v Z . Dokaž, že množina všech Z leží na jedné přímce nezávisle na poloze ℓ .

Úloha 76. Na straně BC trojúhelníka ABC zvolme bod A_1 . Na polopřímkách BA a CA zvolme body C_1 a B_1 tak, aby $|\angle BA_1C_1| = |\angle CA_1B|$. Přímky B_1B a

C_1C se protínají v A_2 . Dokaž, že nezávisle na poloze B_1 a C_1 přímky A_1A_2 prochází pevným bodem.

Úloha 77. (isogonal lines lemma) Mějme v rovině bod A . Dále uvažujme body K, L, M, N takové, že $|\angle KAM| = |\angle LAN|$. Označme $X = LN \cap KM$ a $Y = LM \cap KN$. Pak $|\angle XAN| = |\angle YAM|$.

Úloha 78. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω . Označme D bod dotyku kružnice připsané ke straně BC . Na přímce AD zvolme bod X tak, aby úsečka XD neobsahovala žádný bod ω . Tečny z X k ω protnou stranu BC v bodech K, L . Dokaž, že $|BK| = |CL|$. (iKS 8. ročník)

Úloha 79. Mějme trojúhelník ABC . Dále přímku ℓ a na ní bod P . Označme A_1 průsečík přímky AP překlopené podle ℓ s BC . Analogicky sestrojme B_1 a C_1 . Dokaž, že A_1, B_1, C_1 leží na přímce.

Poznámka 80. Pomocí této úlohy se dá dokázat úloha z minulého dílu (Droz-Farny). Vezmi P jako ortocentrum ABC a pak najdi správné dvě kolmice.

Úloha 81. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Na straně BC zvolme bod K . Kružnice nad průměrem KI (označme ji ω) protne kružnici vepsanou ABC v bodě $L \notin BC$. Přímka AL protne ω podruhé v M . Dokaž, že MI je osa úhlu BMC .

Úloha 82. Mějme trojúhelník ABC . Osa úhlu u A protíná BC v D . Přímky skrz D , které jsou tečné postupně kružnicím opsaným ABD a ACD , protínají postupně AC v E a AB v F . Označme G průsečík BE a CF . Dokaž, že $|\angle EDG| = |\angle ADF|$.

Úloha 83. Mějme trojúhelník ABC . Kružnice jemu vepsaná se dotýká BC v bodě D . Na přímce AD vně kružnice vepsané zvolme bod G . Označme ω kružnici opsanou BCG . Tečny z G ke kružnici vepsané ABC protínají ω podruhé v E, F . AD protíná ω podruhé v T . Dokaž, že přímka EF a tečna k ω v T se protínají na BC .

Úloha 84. Mějme trojúhelník ABC a bod P . Skrz P vede přímka ℓ . Překlopme PA podle ℓ , výsledná přímka protne BC v A_1 . Analogicky překlopené PB a PC protnou AC a AB v B_1 a C_1 . Dokaž, že A_1, B_1, C_1 leží na přímce.

(USAMO 2012 P5)

Úloha 85. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω . Body dotyku vepsané se stranami a, b, c jsou postupně D, E, F . Bod K je jedním z průsečíků EF a kružnice opsané ABC . Tečny z K k ω protnou kružnici opsanou ABC podruhé v I, J . Dokaž, že IJ prochází pólem přímky BC podle kružnice opsané ABC .

Úloha 86. (těžší) Mějme trojúhelník ABC . Kružnici vepsanou označme ω a její střed I . Označme T bod na kružnici opsané různý od A , který splňuje, že osa $\angle CTB$ prochází I . Dále zvolme M libovolný bod na kružnici opsané ABC . Tečny z M k ω protínají BC v bodech X_1, X_2 . Dokaž, že čtyřúhelník MX_1X_2T je tětiový.

(Taiwan TST3 2014 P3)

Poznámka 87. Bod T v této úloze je známý jako bod dotyku „Mixtilinear incircle“ a kružnice opsané. O tomto bodu se ví spousta zajímavých vlastností. Pro vyřešení této úlohy o něm však nic vědět nepotřebuješ.

Invertujeme Involuce

V této kapitole nás budou zajímat hlavně následující dvě pozorování.

- (i) Involuce na přímce, která má nevlastní bod pevný, je překlopení.
- (ii) Když invertujeme involuci, v invertovaném světě dostaneme znovu involuci.¹¹

Příklad 88. Mějme tětiový čtyřúhelník $ABCD$ s kružnicí opsanou Ω . Průsečík AD a BC označme P . Skrz P vedme přímku p . Ta protíná Ω v bodech A_1, B_1 . Dále protíná kružnici opsanou PAB v A_2 a kružnici opsanou PDC v B_2 . Dokaž, že $|A_1A_2| = |B_1B_2|$.

Řešení. K dokázání stejných délek si můžeme říct, že hledáme překlopení, které zobrazí A_1 na B_1 a A_2 na B_2 . Standardní postup by pak byl dokreslení středu A_1B_1 a snažení se dokázat, že je to střed i A_2B_2 . Ale my už víme, že překlopení se dá definovat i jinou vlastností než pomocí středu. Chceme najít překlopení, které zobrazí A_1 na B_1 a A_2 na B_2 . To znamená, že hledáme involuci, která zobrazuje tyto dvojčky na sebe a nevlastní bod je v ní pevným bodem.

Zinvertujeme celou úlohu podle P . Dostáváme tětiový čtyřúhelník $A'B'C'D'$, přímka $p' = p$ protne Ω' v A'_1 a B'_1 . Dále protne $A'B'$ v A'_2 a $C'D'$ v B'_2 . Chceme ukázat, že existuje involuce zobrazující A'_1 na B'_1 , A'_2 na B'_2 , která má P jako pevný bod. To je ale přesně Desarguesova involuce na přímce p a čtyřúhelník $A'B'C'D'$.

Úloha 89. Rozmysli si, že předchozí příklad platí, i když nahradíme kružnice opsané PAB a ADC kružnicemi opsanými PBD a PAC .

Úloha 90. Mějme trojúhelník ABC . Na stranách AB a AC zvolme body E, F . Přímka EF protíná kružnici opsanou v A_1, B_1 . Dále protíná kružnice opsané trojúhelníkům ABF a ACE postupně v A_2, B_2 . Dokaž, že $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.

Úloha 91. Mějme trojúhelník ABC . Na ose úhlu u A zvolme bod P . Kružnice opsaná ABP protíná AB a AC v bodech B_1, C_1 . Kružnice opsaná ACP protíná AB a AC v bodech B_2, C_2 . Dokaž, že $|B_1B_2| = |C_1C_2|$.

Shrnutí

Co jsme si v tomto díle ukázali.

¹¹Pozor, tohle neznámá, že skládání involucí je involuce, to dokonce většinou není.

Držáky

- (1) Jakékoli objekty, na kterých pro každé čtyři prvky umíme určit dvojpoměr.
- (2) Definujeme je, abychom mohli o svazcích, bodech na přímkách a bodech na kuželosečkách mluvit jako o jednom objektu.

Projektivní zobrazení

- (1) Zobrazení mezi držáky.
- (2) Zachovává dvojpoměry.
- (3) Složení projektivních zobrazení je projektivní.
- (4) Existuje inverzní projektivní zobrazení.
- (5) Lemma *tři body stačí*.
- (6) Záhadný bod.
- (7) K poznání projektivního zobrazení může často pomoci inverze.

Steinerova kuželosečka

- (1) Projektivně svázané přímky generují kuželosečku.
- (2) Řeší úlohy, kde se tři projektivně svázané přímky mají protínat v jednom bodě.

Involuce

- (1) Projektivní zobrazení, které je samo sobě inverzní.
- (2) Rozděluje prvky na dvojčky a pevné body.
- (3) Každá involuce na kuželosečce má střed.
- (4) Dvě netriviální involuce se rovnají, pokud mají shodné dvě dvojčky.
- (5) Když na kuželosečce složíme tři involuce, jejich středy leží na přímce, dostaneme novou involuci se středem na téže přímce. (Ping pong)
- (6) Netriviální involuce na přímce, která má nevlastní bod pevný, už nutně je překlopení.
- (7) Na involuce se můžeme dívat ve zinvertovaném světě a stále jsou to involuce.
- (8) Pro involuci φ na přímce platí, že všechny kružnice nad průměry $X\varphi(X)$ mají společnou chordálu.
- (9) Pro involuci φ na přímce a bod P mimo ni platí, že všechny kružímky opsané $PX\varphi(X)$ prochází druhým pevným bodem.

Desarguesova involuce

- (1) Standardní varianta je pro čtyřúhelník, ale dá se degenerovat až do varianty jen pro dva body.
- (2) Má užitečnou duální variantu, která hovoří o involuci ve svazku přímek.

Pár slov závěrem

Zde se shledáváme u rozcestníku na konci naší poslední výpravy. Unavení, zahlceni zážitky a dojmy z projektivního světa. Doufáme, že se Ti tato destinace líbila, my jsme rádi byli Tvými průvodci. A třeba na ni ještě někdy vzpomeneš za nostalgických

večerů u praskání ohně. Tady na rozcestí, poutníče, je ale Tvá volba, kam se vydat příště a do kterých končin matematiky Tě nohy zanesou. Ale ať už to bude kamkoli, přejeme Ti lehký krok a úsměv na rtech.

Seriál pro Tebe psali Radek a Lenka. Velkou měrou nám ale pomohla i spousta jiných PraSátek, tímto děkujeme především Hedvice, Radovi, Matějovi, Kubovi, ale také všem ostatním průzkumníkům terénu projektivního světa. Na viděnou zas někdy příště :-).

Návody

14. Zinvertuj podle A . Najdi prostřelovací zobrazení.
15. Inverze se středem A . Jak se chová konstrukce tečné kružnice ke dvěma rovnoběžkám?
17. Najdi pól p podle ω .
18. Dokresli kružnici nad průměrem AX .
21. Hýbej s P po AP .
22. Hýbej třeba s A po kružnici opsané. Existují právě tři z ostatních bodů takové, že když se jim A rovná, věta je triviální.
23. Hýbej s P po BI . Pro třetí případ vyber P vepišťe menšího trojúhelníka.
24. Hýbej s C po AC . Střední příčka je rovnoběžná se stranou.
25. Najdi vhodnou přímku, po které P hýbat, aby se zachovala přímka AA_1 .
26. Hýbej s X po BX .
27. Hýbej s D po CD .
28. Označ D průsečík ω_C a BC . Všimni si, že $|\angle XND| = |\angle ACB|$. Takže zobrazení z X do D se dá vnímat jako rotace o pevný úhel.
29. Označte X' průsečík KT a BC . Zafixujte ABC a bod T . Hýbejte s Q po AT . Ukažte, že $Q \mapsto X$ a $Q \mapsto X'$ jsou projektivní.
30. Převeď podmínku o úhlech na $LQ \parallel AT$.
31. Hýbej s P po PB . Jako třetí bod zvol P na ose ACB a tuhle konfiguraci vyřeš znovu hýbáním.
32. Označ I vepišťe BAD . Hýbej s C po kružnici opsané BID .
33. Hýbej s I po AI . Najdi dva triviální případy a za třetí zvol nevlastní bod. Pak rozhýbej D .
34. Uvědom si, že I je opišťe PST . Pata na AB je pak středem PQ . Hýbej s P po AB . Dokaž, že se přímky CD , PS a QR protínají v jednom bodě.
35. Zafixuj A , B , C , P a hýbej s Q po BC . Uvaž $Q = B$, $Q = BC_\infty$ a $PQ \parallel AC$.
36. Hýbej s P po AA' . Definuj Q' jako průsečík BB' a vystejnolehlené $A'B'$ z P koeficientem 2.

37. Hýbej s A po AB .
40. Najdi projektivní zobrazení zobrazující X na Y .
41. Zobrazení z P do M je projektivní. Dokresli kružnici opsanou a dobře tohle zobrazení definuj.
48. Dokresli průsečíky X, Y přímky PQ s CB a CA . Pak Q_1CQX je tětivový. Převeď tětivovost PQP_1Q_1 pomocí nových kružnic a mocnosti na průsečík přímek. Hýbej s B_1 po CA .
58. OH je Eulerova přímka. Slož involuce se středy H, O, H .
59. Zinvertuj podle P .
60. Zinvertuj podle P .
62. Chordála je množina středů kolmých kružnic (obecně inverzí). Najdi inverzi kolmou na všechny zadané kružnice.
68. Použij lemma o involucích, které mluví o průsečíku kružnic.
69. Degenerované DIT na $B_1B_1C_1C_1$. Výslednou involuci promítni na BC .
70. Dokresli průsečík CT s ω . Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ bude hrát roli přímky ℓ . Použij DIT pro trojúhelník.
75. DDIT na B_1C_1CB skrz bod A . Involuci promítni na BC .
76. DDIT na B_1BC_1C . Co pak splňuje přímka A_1A_2 ?
77. Přímochaře použití DDIT, kde involuce bude překlopení podle osy úhlu $\sphericalangle KAL$.
78. DDIT pro trojúhelník.
79. DDIT pro čtyřúhelník. Předefinuj bod C_1 .
81. DDIT na M a trojúhelník.
82. Dokaž, že $EF \parallel BC$, a z toho pak, že $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle FDB|$. Pak vypušť DDIT.
83. Promítni duální Desarguesovu involuci na ω .
84. Předefinuj C_1 jako průsečík A_1, B_1 s AB . Dokaž pomocí DDIT, že splňuje požadovanou vlastnost.
85. Použij DDIT podle K na $EEDD$ a $FFDD$. Dokaž, že na BC určují stejný involuce. Ukaž, že $IBJC$ je harmonický.
86. DDIT se středem v T Ti dá informaci o úhlech u T . DDIT se středem M pomocí lemmatu převeď na jinou tětivovost, zbavíš se tak divných bodů X_1 a X_2 .
89. Jen se v Desarguesově involuci změní, kterou dvojici bereme.
90. Zinvertuj podle A . Involuci na kružnici najdi pomocí jejího středu.
91. Překlop celou úlohu podle osy úhlu. Pak už ji můžeš převést na involuci a invertovat podle A . Hledaná involuce bude překlopení svazku přímek procházejících vhodným bodem.