Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. KVĚTNA 2020

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) V jídelně je kulatý stůl a každý z alespoň tří žáků okolo stolu má na talíři nějaký počet brambor. Ve chvíli, když si nějaký z nich všimne, že oba jeho sousedi mají méně brambor, může jednu svou bramboru sníst a škodolibě zavolat kuchařku, ať oběma jeho sousedům po bramboře přidá. Brambory jsou tak nechutné, že je jindy nejedí. Existuje počáteční rozdělení brambor, pro které si takto můžou provádět naschvály donekonečna? (2 BODY)

(b) U vedlejšího kulatého stolu sedí $n \geq 3$ učitelů. Kuchařka připravila n různě velkých porcí o velikostech 1 až n klobásek. Kolika způsoby jim může kuchařka rozdat porce tak, aby pro každého učitele platilo, že počet jeho klobásek dělí součet počtu klobásek jeho sousedů. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

V řadě je napsaná konečná posloupnost alespoň dvou celých čísel. Kouzelnice Anička přijde k posloupnosti a může s jejími členy dělat následující operaci. Pokud má člen za souseda stejně velké číslo, zvětší ho o dva, v opačném případě pouze o jedna.

(a) Může Anička z libovolné počáteční posloupnosti vytvořit konstantní, pokud může operace provádět na libovolná čísla, kolikrát chce? (2 BODY)

(b) Pokud Anička musí operaci provést na každé číslo právě jednou, existuje počáteční posloupnost, ze které umí takto vytvořit konstantní? (3 BODY)

ÚLOHA 3.

(a) Terka dostala tabulku 3×3 vyplněnou samými nulami. V každém kroku vybere dvě sousední políčka a buď k oběma přičte 1, nebo ji od obou odečte. Ukažte, že tímto postupem nikdy nedostane tabulku se samými dvojkami. (2 BODY)

(b) Nechť n je přirozené číslo. Hedvika chtěla vyplnit tabulku $1 \times n$ červenými, zelenými a modrými čtverečky. Zjistila ale, že místo modrých čtverečků koupila modrá domina, která neumí lámat. Nechť p_n značí počet způsobů, jak umí (za použití červených čtverečků, zelených čtverečků a modrých domin) vyplnit tabulku tak, aby každé políčko bylo pokryto právě jedním útvarem a nic nepřečnívalo. Ukažte, že p_n dělí p_{2n+1}. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

(a) Budiž ABC trojúhelník se středem kružnice vepsané I a kružnicí opsanou ω. Přímka AI protíná ω podruhé v bodě M. Nechť D je průsečík BI a kružnice opsané CMI různý od I. Ukažte, že $BD = CD$. (2 BODY)

(b) Buď ω kružnice se středem O a poloměrem r_1. Nechť ℓ je přímka dotýkající se ω v daném bodě P a nechť Q je libovolný bod na ℓ. Úsečka OQ protíná ω v bodě S. Označme R průsečík PS a kružnice opsané OPQ různý od P a nechť r_2 je poloměr kružnice opsané OPQ. Dokažte, že $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$. (3 BODY)

ÚLOHA $\frac{4!}{4} - \frac{4}{4}$.

(a) Určete hodnotu $s\left(s\left(s\left(s\left(4^{4^{4^{4}}}\right)\right)\right)\right)$, kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n. (2 BODY)

(b) Mějme trojúhelník se stranami délek a, b, c. Dále víme, že $ab + bc + ca = 1$. Dokažte, že $(a+1)(b+1)(c+1) < 4$.

(3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Lenka si napsala na tabuli přirozené číslo n a hrála si s ním. V každém kroku napsané číslo nahradila součinem jeho cifer. Po nějaké době bylo na tabuli napsáno číslo 1. Najděte všechna možná n. (2 BODY)

(b) Martin dostal k narozeninám nekonečnou mřížku a snaží se do mřížových bodů umístit přirozená čísla tak, aby každé bylo použito právě jednou. Zároveň musí pro každé n platit, že součet čísel v každém čtverci $n \times n$ je násobkem n. Může se mu to podařit? (3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Na šachovnici 2020×2020 je umístěno 2020 šachových dam tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Ukažte, že v každém z rohových čtverců 1010×1010 se nachází alespoň jedna dáma.

(2 BODY)

(b) Pepa sbírá kartičky fotbalových brankářů. Každý brankář má na dresu některé z čísel $1, \ldots, n$. Navíc platí, že součet čísel brankářů na všech kartách je roven $k \cdot n!$ pro nějaké přirozené k. Dokažte, že Pepa dovede rozdělit svoje karty do k hromádek, v každé z nichž je součet čísel brankářů roven $n!$. (3 BODY)

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *V jídelně je kulatý stůl a každý z alespoň tří žáků okolo stolu má na talíři nějaký počet brambor. Ve chvíli, když si nějaký z nich všimne, že oba jeho sousedi mají méně brambor, může jednu svou bramboru sníst a škodolibě zavolat kuchařku, ať oběma jeho sousedům po bramboře přidá. Brambory jsou tak nechutné, že je jindy nejedí. Existuje počáteční rozdělení brambor, pro které si takto můžou provádět naschvály donekonečna?* *(Jakub Löwit)*

(b) *U vedlejšího kulatého stolu sedí $n \geq 3$ učitelů. Kuchařka připravila n různě velkých porcí o velikostech 1 až n klobásek. Kolika způsoby jim může kuchařka rozdat porce tak, aby pro každého učitele platilo, že počet jeho klobásek dělí součet počtu klobásek jeho sousedů?* *(Marian Poljak)*

ŘEŠENÍ:

(a) Ukážeme, že to nebudou moci provádět donekonečna pro žádné rozdělení. Označme největší počet brambor mezi žáky m. Indukcí podle počtu kroků dokážeme, že se toto maximum nezvětší. Na začátku to triviálně platí. Nyní předpokládejme, že po n krocích má každý z žáků nejvýše m brambor. Kdyby to přestalo platit po $n+1$ krocích, znamenalo by to, že už po n-tém kroku měl některý žák více než m brambor, aby mohl přidat bramboru tomu s menším počtem, který jich právě získal $m+1$. To je ale spor s indukčním předpokladem, proto se maximum opravdu nemůže zvětšit.

Navíc se při každém kroku zvětší počet brambor mezi studenty o 1, a jelikož je celkový počet brambor shora omezen m-násobkem počtu žáků, tak víme, že toto pošťuchování nepotrvá donekonečna.

(b) Řešení byla v principu dvojího typu. První rozebírala, co se stane pro každé číslo a jeho sousedy, a druhá si všimla, že když odebereme učitele s nejvyšším počtem klobásek od stolu, tak dostaneme stále validní řešení pro $n-1$ učitelů.

ŘEŠENÍ DÍVÁNÍM SE NA SOUSEDY:

Prvně si všimneme, že pokud sousedí dvě sudá čísla, tak jsou nutně sudá i všechna čísla na kruhu, protože když máme vedle sebe tři čísla g, h, x, přičemž g a h jsou sudá, tak $h \mid x+g$, takže i x musí být sudé. Nutně tedy musí být dvě lichá čísla kolem každého sudého. Z toho plyne, že pro sudé n jsou čísla rozdělená rovnoměrně a pro liché n jsou vždy dvě lichá čísla vedle sebe. Podívejme se nyní na případ pro sudé n.

Číslo n musí mít sousedy, jejichž součet mu je právě roven, jelikož $2n > (n-1)+(n-2)$. Podívejme se na číslo $n-1$. To je liché, ale má za sousedy dvě sudá čísla. Proto jejich součet musí být sudý násobek $n-1$. Z toho už plyne, že sousedé $n-1$ jsou n a $n-2$. Nyní budeme postupovat indukcí. Řekněme, že máme již rozmístěno i čísel a řešíme, jak může vypadat to další. Řada tedy vypadá následovně: $n, n-1, \ldots, n-i+1, x$. To znamená, že $n+i-1 \mid x+n-i+2$, jelikož jsou však vetší čísla než $n-i$ vypotřebovaná a $x+n-i+2 > n-i+1$, tak i $3(n-i+1) > x+n-i+2$, tudíž $x = n-i$. Tímto jsme ukázali konstrukci pro sudá n. Celkový počet způsobů s otočením a překlopením je tedy $2n$.

Nyní proberme lichá $n > 3$. Stejně dobře víme, že n je součtem svých sousedů, ale jelikož je liché, tak musí mít vedle sebe jedno číslo liché. Rozeberme dva případy: buď $n-1$ sousedí s n, a potom stejnou argumentací jako prve dostaneme předchozích $2n$ případů, nebo $n-1$ nesousedí s n. Podívejme se podobně jako v předchozím případě na velké liché číslo, tentokrát $n-2$. To buď sousedí s n, ale to by znamenalo, že jeho druhý soused je $n-4$, což je také liché číslo, a tedy spor. Nebo sousedí s $n-1$ a $n-3$. Dokud tedy neumístíme n, tak můžeme používat stejnou argumentaci jako pro sudé n a dostaneme klesající řadu od $n-1$ do i, kde i sousedí s n. Jelikož n nesousedí s $n-1$, tak musí být n pouze mezi $\frac{n+1}{2}$ a $\frac{n-1}{2}$. A teď to pojďme dokázat. Vezměme si toto číslo i, které je součástí klesající řady od $n-1$ a sousedí s n. Pro toto číslo platí, že $i \mid n+i+1 \implies i \mid n+1$, ale jelikož je $i < n+1$, tak $i \leq \frac{n+1}{2}$. Zároveň n sousedí s nějakým dalším j, kde $j < i$ $(i \neq 1)$ a $n \mid i+j$. Z toho tedy plyne, že $n \leq i+j < 2i$, neboli $i \geq \frac{n+1}{2}$.

Pokud je tedy $i > 1$, tak platí, že $i = \frac{n+1}{2}$. Druhé číslo dostaneme odečtením od n, takže to musí být $\frac{n-1}{2}$.

Nyní se naposledy podívejme na souseda $\frac{n-1}{2}$, nazvěme jej x. Potom $\frac{n-1}{2} \mid n+x$, což po odečtení dvojnásobku $\frac{n-1}{2}$ dává $\frac{n-1}{2} \mid x+1$. Protože je však $x < \frac{n-1}{2}$, tak víme, že $x+1 = \frac{n-1}{2}$. Nyní už máme zase použitá všechna větší čísla než $\frac{n-1}{2} - 1$ a klesající řadu začínající dvěma členy $\frac{n-1}{2}$ a $\frac{n-1}{2} - 1$. Proto naší známou argumentací dostaneme, že tato řada klesá až do 1.

Jako poslední musíme vyřešit případ $n = 3$, pro který je výsledek 6, protože vyhovuje libovolná permutace. Výsledkem tedy je, že pro lichá $n > 3$ je výsledek $4n$ a pro sudá n je výsledek $2n$.

Zkouška: Pro klesající řadu máme buď sousedící $i+1$, i, $i-1$, tedy podmínka platí, nebo $n-1$, n, 1 a n, 1, 2, což ale také očividně splňuje podmínku. Pro řadu roztrhnutou v půlce členy $\frac{n+1}{2}$ a $\frac{n-1}{2}$ je vše kromě okolí těchto dvou čísel analogické jako v minulém případě, takže stačí ověřit, že podmínku splňují trojice $\left(\frac{n+3}{2}, \frac{n+1}{2}, n\right)$ a $\left(n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$. První trojice podmínku splňuje, protože $\frac{n+1}{2} \mid \frac{3(n+1)}{2}$, stejně jako druhá, protože $\frac{n-1}{2} \mid \frac{3(n-1)}{2}$.

Řešení podle Lucky Krajčoviechové přes indukci:

Pro $n = 3$ může kuchařka rozdat porce libovolně, čili zde je $3! = 6$ možností. Pro $n = 4$ musí vedle 4 být čísla 1 a 3, takže tehdy je $4 \cdot 2 = 8$ možností. Dále budeme předpokládat $n \geq 5$.

Ať a, b, c, d jsou taková čísla, že porce velikostí a, b, n, c, d mají nějací učitelé v tomto pořadí. Platí $n \mid b+c$, ale zároveň $2 < b+c < 2n$, takže $b+c = n$. Dále platí $b \mid a+n$, takže $b \mid a+b+c$, a tedy i $b \mid a+c$. Analogicky platí $c \mid b+d$. Kdyby tedy učitel s největším počtem klobásek odešel, tak by i nadále pro každého učitele u stolu platilo, že počet jeho klobásek dělí součet klobásek jeho sousedů. Všechny konstrukce pro n se tak dají sestrojit z konstrukcí pro $n-1$ tak, že se číslo n přidá mezi dvě sousední čísla, jejichž součet je n.

Indukcí ukážeme, že pro sudá n musí být velikosti klobás od některého učitele některým směrem v pořadí $1, 2, \ldots, n$, čímž dostaneme $2n$ možností (2 možnosti pro směr a n pro učitele, který má jen jednu klobásku). Pro lichá n to může být jak $1, 2 \ldots, n$, tak i $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}, n, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$. Pro lichá n proto máme $2n + 2n = 4n$ způsobů.

Pro $n = 4$ je to už dokázáno. Pokud to platí pro $n-1$, přičemž n je liché, tak přidáním n mezi čísla 1 a $n-1$ podmínka očividně platí. Kdyby se nový učitel posadil mezi takové, kteří mají k a $k+1$ klobásek, tak musí platit $n = 2k+1$, takže $k = \frac{n-1}{2}$, neboli učitel se posadí mezi $\frac{n-1}{2}$ a $\frac{n+1}{2}$. Pro tohoto nového učitele i oba jeho sousedy podmínka zjevně bude stále platit. Ostatním se sousedé nezměnili, takže u nich to platí i nadále. Jiné možnosti navíc už nemáme.

Pokud tvrzení platí pro $n-1$, přičemž n je sudé, tak se nový učitel musí posadit mezi učitele, kteří mají součet klobásek sudý, tedy musí mít stejnou paritu počtu klobásek. Pokud ten, který má $n-1$ klobásek, sedí mezi těmi s $\frac{n-2}{2}$ a $\frac{n}{2}$, tak žádná taková dvojice sousedních učitelů není vyhovující. Pokud $n-1$ sedí mezi 1 a $n-2$, tak n si může sednout jedině mezi 1 a $n-1$. Dokazované tvrzení tak platí pro všechny $n \geq 3$, takže pro $n = 3$ existuje 6 různých způsobů, pro sudé $n \geq 4$ dostáváme $2n$ způsobů a pro liché $n \geq 5$ mají kuchařky $4n$ způsobů.

Poznámky:
Řekl bych, že přišlo zhruba stejně množství řešení části **(a)** jako části **(b)**, což je zajímavé vzhledem k tomu, že příklad **(a)** byl snadnější. Na druhou stranu byl příklad **(b)** hravější, a proto se možná mohl více zalíbit. Většina řešení první části byla správně a používala myšlenku ze vzoráku. V druhé části přicházely buď pouze konstrukce, za které jsem uděloval jeden bod, nebo byla řešení zcela správná. Občas někdo zapomněl na to, že jsou učitelé rozlišitelní, a proto musíme počítat otočení a zrcadlový obraz, ale za to jsem body nestrhával. *(Filip Čermák)*

Úloha 2.

V řadě je napsaná konečná posloupnost alespoň dvou celých čísel. Kouzelnice Anička přijde k posloupnosti a může s jejími členy dělat následující operaci. Pokud má člen za souseda stejně velké číslo, zvětší ho o dva, v opačném případě pouze o jedna.

(a) Může Anička z libovolné počáteční posloupnosti vytvořit konstantní, pokud může operace provádět na libovolná čísla, kolikrát chce? *(Jakub Löwit a Anička Doležalová)*

(b) Pokud Anička musí operaci provést na každé číslo právě jednou, existuje počáteční posloupnost, ze které umí takto vytvořit konstantní? *(Anička Doležalová)*

Řešení:
(a) Ano, může. Anička může od prvního k poslednímu členu posloupnosti každý z nich (jeden po druhém) postupně zvýšit na číslo $m+2$, kde m je maximální hodnota této posloupnosti. Číslo $m+2$ určitě nemine, protože jediný způsob, jak přeskočit $m+2$, je skočit z $m+1$ přímo o 2, ale to se nemůže stát, protože ve chvíli, kdy Anička pracuje s jedním členem, nemá žádný další člen posloupnosti hodnotu $m+1$.

(b) Ne, taková posloupnost neexistuje. Pro spor ale předpokládejme, že ano a že z ní Anička umí vytvoří konstantní posloupnost s čísly a. Každá operace zvýší původní číslo o jedna nebo o dva, tato posloupnost tedy musela obsahovat pouze čísla $a-1$ a $a-2$.

Pokud v původní posloupnosti bylo alespoň jedno číslo $a-2$, tak se poslední z těchto čísel provedením operace zvětší jen na $a-1$.

Pokud v ní ale nebylo žádné číslo $a-2$, pak první provedení operace zvýší některé číslo z $a-1$ na $a+1$, což je také spor.

Poznámky:
Úloha byla poměrně snadná, většina řešení byla správně. V první části se často objevil také postup, ve kterém Anička nejprve vytvoří posloupnost ostře rostoucí a poté ji od posledního členu postupně dorovnává na konstantní hodnotu. *(Jáchym Solecký)*

Úloha 3.

(a) *Terka dostala tabulku 3×3 vyplněnou samými nulami. V každém kroku vybere dvě sousední políčka a buď k oběma přičte 1, nebo ji od obou odečte. Ukažte, že tímto postupem nikdy nedostane tabulku se samými dvojkami.* *(Terka Poláková)*

(b) *Nechť n je přirozené číslo. Hedvika chtěla vyplnit tabulku $1\times n$ červenými, zelenými a modrými čtverečky. Zjistila ale, že místo modrých čtverečků koupila modrá domina, která neumí lámat. Nechť p_n značí počet způsobů, jak umí (za použití červených čtverečků, zelených čtverečků a modrých domin) vyplnit tabulku tak, aby každé políčko bylo pokryto právě jedním útvarem a nic nepřečnívalo. Ukažte, že p_n dělí p_{2n+1}.* *(Rado van Švarc)*

Řešení:
(a) Obarvěme tabulku šachovnicovým způsobem, získáme 5 černých a 4 bílá políčka. Nyní si všimněme, že každá Terčina operace ovlivní jedno černé a jedno bílé políčko. To znamená, že se rozdíl součtu čísel na bílých a černých políčkách nemění. Na začátku je popsaný rozdíl nulový, na

konci má být roven 2, což není možné. Tím bylo dokázáno, že Terka nikdy nemůže dostat tabulku se samými dvojkami.

(b) Nejprve definujme $p_0 = 1$, protože máme jednu možnost, jak vyplnit prázdnou tabulku. Uvažujme políčko, které je přesně uprostřed tabulky o délce $2n+1$. Pokud toto políčko tvoří levou část domina, máme $p_n p_{n-1}$ možností, jak vyplnit zbytek tabulky (zbývají nám dvě nezávislé části délky n a $n-1$). Pokud prostřední políčko netvoří levou část domina, můžeme za ním tabulku rozdělit na části velikostí $n+1$ a n. Takto rozdělenou tabulku můžeme vyplnit $p_{n+1}p_n$ způsoby. Tím jsme pokryli všechny případy a máme tedy celkem $p_{2n+1} = p_n(p_{n-1} + p_{n+1})$ možností, jak tabulky vyplnit. Tím jsme tedy dokázali $p_n \mid p_{2n+1}$.

Poznámky:
Většina řešitelů postupovala víceméně vzorovým způsobem. Kromě toho se v první úloze objevilo několik řešení, která úlohu řešila (obvykle docela složitě) pomocí soustavy rovnic. V druhé úloze stojí za zmínku (překvapivě jednoduché) řešení, které posloupnost vyjádřilo explicitně, a potom jenom ověřilo dělitelnost. *(Josef Minařík)*

Úloha 4.

(a) *Budiž ABC trojúhelník se středem kružnice vepsané I a kružnicí opsanou ω. Přímka AI protíná ω podruhé v bodě M. Nechť D je průsečík BI a kružnice opsané CMI různý od I. Ukažte, že $BD = CD$.* *(Matěj Doležálek)*

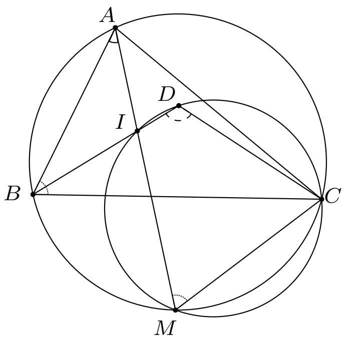
(b) *Buď ω kružnice se středem O a poloměrem r_1. Nechť ℓ je přímka dotýkající se ω v daném bodě P a nechť Q je libovolný bod na ℓ. Úsečka OQ protíná ω v bodě S. Označme R průsečík PS a kružnice opsané OPQ různý od P a nechť r_2 je poloměr kružnice opsané OPQ. Dokažte, že $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$.* *(Rado van Švarc)*

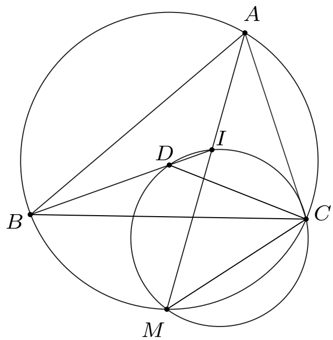
Řešení:
(a) Označme velikosti úhlů v trojúhelníku ABC standardně jako α, β, γ. Z tětivovosti čtyřúhelníka $ABMC$ dostáváme $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ABC| = \beta$. Nyní rozebereme dvě možnosti.

(i) I leží na úsečce DB. Pak z tětivovosti $DIMC$ máme $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle IDC| = 180° - |\sphericalangle IMC| = 180° - \beta$.

(ii) D leží na úsečce IB. Pak z tětivovosti $IDMC$ máme $|\sphericalangle BDC| = 180° - |\sphericalangle IDC| = 180° - |\sphericalangle IMC| = 180° - \beta$.

Z toho dostáváme, že $|\sphericalangle BDC| = 180° - \beta$. Ze součtu úhlů v trojúhelníku DBC pak platí, že $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DBC| = \beta/2$. Tudíž je tento trojúhelník rovnoramenný, takže $|BD| = |CD|$.





(b) Označme $|\sphericalangle OPS| = \alpha$. Pak protože OPS je rovnoramenný trojúhelník, musí být $|\sphericalangle PSO| = |\sphericalangle RSQ| = \alpha$. Z tětivovosti čtyřúhelníku $OPQR$ dále platí, že $|\sphericalangle OQR| = \alpha$. To znamená, že trojúhelník QRS je rovnoramenný, tedy $|QR| = |SR|$.

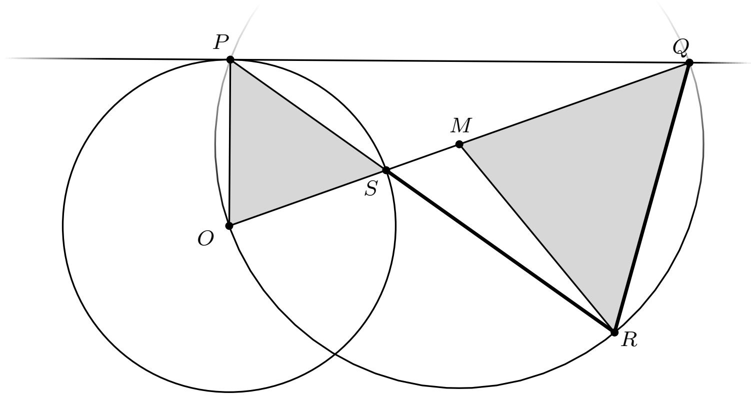
Označme M střed kružnice opsané trojúhelníku OPQ. Protože je $|\sphericalangle OPQ| = 90°$, bod M je z Thaletovy věty středem úsečky OQ.

Z toho dále vyplývá, že trojúhelník MQR je rovnoramenný s úhlem $\sphericalangle MQR$ o velikosti α mezi ramenem a základnou, a je tak podobný trojúhelníku OPS. Z této podobnosti dostáváme

$$\frac{|QR|}{|MQ|} = \frac{|PS|}{|SO|}.$$

Všimneme si, že $|SO| = r_1$ a $|MQ| = r_2$. Po dosazení a upravení a s využitím znalosti, že $|QR| = |SR|$, dostáváme kýženou rovnost:

$$\frac{|QR|}{r_2} = \frac{|PS|}{r_1},$$
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|PS|}{|QR|} = \frac{|PS|}{|SR|}.$$



Poznámky:
Většina řešení řešilo část **(b)** pomocí různých goniometrických vět. Takže jsem se rozhodl všechny, kteří řešili obě podúlohy rozumně synteticky, odměnit jedním imaginárním bodem.

(Radek Olšák)

Úloha $\frac{4!}{4} - \frac{4}{4}$.

(a) *Určete hodnotu* $s\left(s\left(s\left(s\left(4^{4^{4^4}}\right)\right)\right)\right)$, *kde* $s(n)$ *značí ciferný součet čísla* n.

(Marian Poljak)

(b) *Mějme trojúhelník se stranami délek* a, b, c. *Dále víme, že* $ab + bc + ca = 1$. *Dokažte, že* $(a + 1)(b + 1)(c + 1) < 4$. *(Martin Raška)*

Řešení:
(a) Hledaná hodnota je čtyři. Označme $x = 4^{4^{4^4}}$. Postupně ukážeme, že $s(s(s(s(x))))$ musí dávat zbytek čtyři po dělení devíti a že je menší než třináct. Složením obou pozorování už bude jediná vyhovující hodnota právě čtyři.

K první části je třeba pozorování, že každé číslo n dává stejný zbytek po dělení devíti jako jeho ciferný součet $s(n)$ v desítkové soustavě. To je jednoduchý důsledek toho, že každá mocnina deseti dává po dělení devíti zbytek jedna. Použitím tohoto tvrzení čtyřikrát po sobě tedy stačí spočítat, jaký zbytek dává x po dělení devíti.

Lze spočítat, že $4^3 \equiv 1 \pmod 9$. Dále číslo 4^{4^4} dává po dělení třemi zbytek jedna, neboť i číslo čtyři dává zbytek jedna. Dohromady tak existuje číslo k, pro které platí

$$x = 4^{4^{4^4}} \equiv 4^{3k+1} \equiv 4 \cdot \left(4^3\right)^k \equiv 4 \cdot (1)^k \equiv 4 \pmod 9,$$

díky čemuž tedy i $s(s(s(s(x)))) \equiv 4 \pmod 9$.

K následující sérii odhadů budeme používat, že pokud je číslo menší než 10^k, tak má nanejvýš k cifer, a tudíž je jeho ciferný součet nejvýše $9k$.

$$\begin{aligned} x = 4^{4^{4^4}} &< 10^{4^{4^4}}, \\ s(x) \leq 9 \cdot 4^{4^4} &< 10^{4^4+1}, \\ s(s(x)) \leq 9 \cdot \left(4^4+1\right) &< 10^4, \\ s(s(s(x))) &\leq 9 \cdot 4 = 36. \end{aligned}$$

Všechna čísla menší než 36 mají ciferný součet menší než 13, takže rovněž $s(s(s(s(x)))) < 13$. Tím je tato část úlohy dokázána.

(b) Díky trojúhelníkové nerovnosti platí $1 = ab + bc + ca > b(a+c) > b^2$. Z toho plyne, že $b < 1$, a totéž lze symetricky dokázat i pro délky a a c. Za použití $ab + ac + bc = 1$ platí

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) - 4 &= abc + a + b + c + ab + ac + bc - 3 = \\ &= abc + a + b + c - ab - ac - bc - 1 = (a-1)(b-1)(c-1). \end{aligned}$$

Poslední výraz je součinem tří záporných čísel, neboť jsme již dříve ukázali, že $a, b, c < 1$, takže je menší než nula. Z toho už je tvrzení ze zadání dokázané.

Poznámky:

Většina správných řešení postupovala v obou částech vzorově. V první části se občas vyskytly drobné plus mínus jedničkové chyby v odhadech počtu cifer. Několik řešitelů si bohužel špatně vyložilo zápis čísla $4^{4^{4^4}}$. Mocnění není asociativní a takto zapsaným mocněním se myslí, že každý exponent se vztahuje pouze k jednomu číslu pod ním a ne k celé struktuře pod ním. Tedy například číslo 4^{4^4} je rovno $4^{\left(4^4\right)} = 4^{256}$ a ne $\left(4^4\right)^4 = 4^{16}$. Takovýmto výkladem došlo k velkému zjednodušení úlohy, neboť číslo 4^{64} je oproti číslu ze zadání relativně malé a jde například vyčíslit ručně.

(Martin Raška)

Úloha 6.

(a) *Lenka si napsala na tabuli přirozené číslo n a hrála si s ním. V každém kroku napsané číslo nahradila součinem jeho cifer. Po nějaké době bylo na tabuli napsáno číslo 1. Najděte všechna možná n.* *(Lenka Kopfová)*

(b) *Martin dostal k narozeninám nekonečnou mřížku a snaží se do mřížových bodů umístit přirozená čísla tak, aby každé bylo použito právě jednou. Zároveň musí pro každé n platit, že součet čísel v každém čtverci $n \times n$ je násobkem n. Může se mu to podařit?* *(Pavel Hudec)*

Řešení:

(a) Zřejmě případ $n = 1$ splňuje zadání. Následně označme m číslo, které bylo na tabuli před jedničkou. Součin jeho cifer je jedna, takže všechny jeho cifry musí být jedničky. Zároveň musí $m > 1$.

Pro spor předpokládejme, že m je součinem cifer nějakého čísla. To by znamenalo, že všechny jeho prvočíselní dělitelé jsou z množiny $\{2, 3, 5, 7\}$. Zřejmě m není dělitelné ani dvěma, ani pěti. Pokud by m bylo dělitelné třemi, tak i jeho ciferný součet by byl dělitelný třemi, neboli m by obsahovalo $3k$ cifer pro nějaké k. Pak by ale platilo

$$m = \underbrace{11\dots1}_{3k \text{ cifer}} = 111 \cdot \underbrace{100100\dots1001}_{k \text{ jedniček}} = 3 \cdot 37 \cdot \underbrace{100100\dots1001}_{k \text{ jedniček}},$$

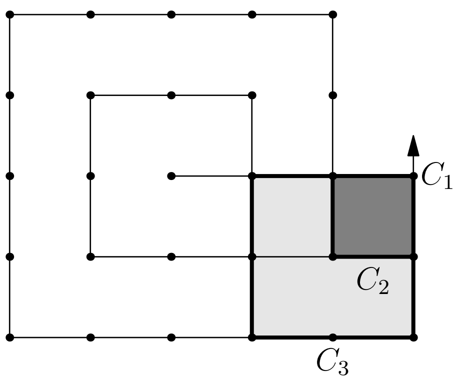
tedy m by bylo dělitelné i prvočíslem 37, což nelze.

Jediné zbývající prvočíslo dělící m je sedm, m tak musí být mocninou sedmi. Protože $7^4 = 2401$ končí dvojčíslím 01, budou se poslední dvojčíslí mocnin sedmičky od 7^4 opakovat, tedy jediná možná jsou 01, 07, 49 a 43. To znamená, že neexistuje žádná mocnina sedmi končící dvojčíslím 11, takže žádné číslo složené ze samých jedniček není mocninou sedmi. Tím jsme dostali hledaný spor.

Z toho plyne, že Lenka musela číslem m začít, jinými slovy jediná možná n jsou právě čísla ze samých jednotek, která zadání zjevně vyhovují.

(b) Ano, Martinovi se to může podařit.

Martin bude rovinu zaplňovat čísly po spirále – začne v libovolném mřížovém bodě a půjde o jeden bod doprava, následně pokud může zatočí doleva, jinak půjde rovně (viz obrázek). Předpokládejme, že je Martin v nějakém bodě spirály a snaží se do něj zapsat číslo x. Pak jsou body před ním a vpravo od něj ještě nezaplněny. Označme m největší číslo takové, že se přidáním nového bodu zaplní čtverec $m \times m$. Tím se zaplní právě jeden čtverec velikosti $n \times n$ pro libovolné $1 \leq n \leq m$ a navíc libovolný menší nově zaplněný čtverec je plně obsažen v libovolném větším nově zaplněném čtverci. Takovýto čtverec velikosti $n \times n$ označme C_n.



Pro libovolné prvočíslo p označme a_p největší mocninu p vyskytující se v prvočíselném rozkladu nějakého přirozeného čísla ne většího než m. Nyní můžeme použít Čínskou zbytkovou větu[1], abychom zajistili, že pro libovolné prvočíslo p bude součet čísel ve čtverci $C_{p^{a_p}}$ velikosti $p^{a_p} \times p^{a_p}$ dělitelný p^{a_p}. Toho docílíme tak, že pro libovolné prvočíslo p požadujeme, aby x bylo kongruentní s mínus součtem již zapsaných čísel v $C_{p^{a_p}}$ modulo p^{a_p}. Čínská zbytková věta nám dá nekonečně

[1] O té si můžeš přečíst v tomto příspěvku: *https://prase.cz/library/CinskazbytkovavetaLS/CinskazbytkovavetaLS.pdf.*

mnoho řešení takové soustavy kongruencí. Z těch je možné vybrat dosud nepoužité číslo, jelikož jsme předtím použili jen konečně mnoho čísel.

Dokážeme, že při takovéto volbě x už součet čísel v každém C_n je dělitelný n. Nechť nejprve $n = p^k$ pro nějaké prvočíslo p a nějaké k. Pak umíme $C_{p^{a_p}}$ vydláždit menšími čtverečky velikosti $p^k \times p^k$, přičemž jedním z nich je C_{p^k}. Víme, že součet čísel v $C_{p^{a_p}}$ je dělitelný p^{a_p} a že součet čísel v malých čtverečcích jiných než C_{p^k} (ty už byly zaplněny dříve a splňují podmínku) je dělitelný p^k. Tedy i součet čísel v C_{p^k} – posledním malém čtverečku – je dělitelný p^k.

Uvažme nyní obecné n. Pak stačí ukázat, že součet čísel v C_n je dělitelný všemi prvočísly alespoň ve stejné mocnině jako n. Nechť tedy $n = p^k l$, kde l není dělitelné p. Pak opět C_n lze vydláždit čtverečky velikosti $p^k \times p^k$, z nichž jeden je C_{p^k} a zbylé už byly dokončeny dříve. Součet čísel v každém takovémto malém čtverečku je dělitelný p^k, takže i součet čísel v C_n je dělitelný p^k. Tedy dohromady je součet čísel v každém C_n dělitelný n a x tak můžeme bez problémů zapsat.

Zbývá si uvědomit, že pokud jsme „v rohu“ spirály, pak $m = 1$, a můžeme tedy místo postupu výše umístit nejmenší nepoužité číslo. Takto se Martinovi povede použít všechna přirozená čísla právě jednou a splnit všechny podmínky.

Poznámky:

Část **(a)** nebyla obtížná, objevilo se v ní více různých přístupů a většina řešení byla až na nějaké případné drobnosti správně.

K části **(b)** naopak došla jen dvě správná řešení. Ačkoliv úloha nezpochybnitelně nebyla jednoduchá, neřešitelná rozhodně nebyla. Myšlenka budování konstrukce postupně a použití Čínské zbytkové věty v každém kroku se v podobných úlohách vyskytuje často. V této úloze však nelze Čínskou zbytkovou větu použít přímo. Klíčová myšlenka pak ale je nevzdávat to a snažit se z Čínské zbytkové věty dostat co nejvíc to jde. Úloha je nastavena tak, že v tom případě už je Čínská zbytková věta dost silná na její zdolání. *(Pavel Hudec)*

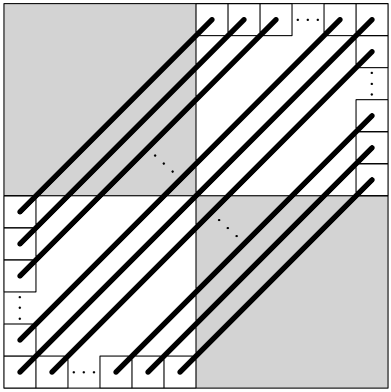
Úloha 7.

(a) *Na šachovnici* 2020×2020 *je umístěno* 2020 *šachových dam tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Ukažte, že v každém z rohových čtverců* 1010×1010 *se nachází alespoň jedna dáma.*
(Matěj Doležálek)

(b) *Pepa sbírá kartičky fotbalových brankářů. Každý brankář má na dresu některé z čísel* $1, \ldots, n$. *Navíc platí, že součet čísel brankářů na všech kartách je roven* $k \cdot n!$ *pro nějaké přirozené* k. *Dokažte, že Pepa dovede rozdělit svoje karty do* k *hromádek, v každé z nichž je součet čísel brankářů roven* $n!$. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

(a) Pro spor nechť v jednom z rohových čtverců žádná dáma neleží. BÚNO nechť je to čtverec vlevo nahoře. Vzhledem k tomu, že každá z 2020 dam musí stát v jiném z 2020 sloupců šachovnice, nutně už musí v každém sloupci stát právě jedna dáma. Jelikož v levém horním čtverci neleží žádné dámy, musí tedy v levém dolním čtverci stát 1010 dam. Analogicky uvažováním řádků namísto sloupců stojí 1010 dam v pravém horním čtverci. Ukážeme, že dvě z těchto dam musí ležet na stejné diagonále směrem doprava nahoru. Z osové souměrnosti podle diagonály směrem doleva nahoru zasahují do pravého horního čtverce právě ty diagonály, které zasahují do levého dolního čtverce. Těchto diagonál je ale 2019, neboť tolik políček leží v každém ze čtverců 1010×1010 na okraji šachovnice. Na 2019 diagonálách je rozmístěno 2020 dam, z Dirichletova principu tak na některé leží dvě dámy, které se tím ohrožují, což je spor se zadáním. V každém rohovém čtverci tak musí stát alespoň jedna dáma.



(b) Ukážeme si dvě různá řešení.

Řešení slepováním kartiček:
Postupujme indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ má Pepa jenom několik kartiček s číslem 1, z nichž každá tvoří hromádku o součtu 1!, takže dokazované tvrzení platí. Dále mějme $n \geq 2$. Nejprve ukážeme, že kartičky lze rozdělit do *balíčků*, z nichž každý má součet ℓn pro nějaké $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$. Mějme na začátku všechny karty na jedné velké hromadě a postupně odebírejme skupinky karet, z nichž utvoříme balíčky. Jelikož vždy z celkové hodnoty hromady odebereme násobek n, zachová se, že součet karet na hromadě je stále násobek n. Nejprve můžeme odebrat všechny karty s hodnotou n a vyrobit z nich samostatné balíčky, nadále tedy na hromadě mějme jenom karty s hodnotami $1, \ldots, n-1$.

Jakmile v této fázi zbude na hromadě méně než n karet, pak mají určitě součet menší než $n \cdot (n-1)$, takže z nich můžeme vyrobit poslední balíček. Pokud je na hromadě alespoň n karet, můžeme z nich některé odebrat a utvořit balíček následujícím způsobem: Seřaďme n karet zleva doprava v libovolném pořadí. Ke každé kartě si zapišme součet hodnot všech karet nalevo od ní včetně příslušné karty samotné. Pokud je některé číslo zapsané u a-té karty násobkem n, stačí vzít těchto prvních a karet. V opačném případě máme n čísel, která nabývají pouze $n-1$ různých zbytků modulo n, takže z Dirichletova principu musí součty u a-té a b-té karty dávat stejný zbytek pro nějaká $a < b$. Potom ale musí součet karet na pozicích $a+1$ až b (včetně) být násobkem n, takže můžeme utvořit balíček z těchto karet. Protože jsme vždy vybrali nejvýše n karet, z nichž každá má hodnotu nejvýše $n-1$, je součet vybraných karet nejvýše $n \cdot (n-1)$, takže jsme vytvořili validní balíček.

Všechny karty máme tedy rozděleny do balíčků se součty ℓn pro $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pro dokončení důkazu slepme každý takovýto balíček se součtem ℓn do jedné *megakarty* a napišme na ni číslo ℓ. Dostaneme tak megakarty s čísly $1, \ldots, n-1$, jejichž součet je $\frac{kn!}{n} = k(n-1)!$. Z indukčního předpokladu lze tyto megakarty rozdělit do hromádek po $(n-1)!$. Nyní už stačí v každé hromádce megakarty rozlepit zpět na původní karty a získáme rozdělení Pepových kartiček na hromádky se součtem $n!$.

Řešení postupným odkládáním kartiček:
Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $k \geq 2$. Ukážeme postup, jakým umí Pepa vytvořit hromádku se součtem $n!$. Pak mu už stačí jenom použít tento postup opakovaně a má vyhráno.

Označme číslo $1 \leq i < n$ *populární*, pokud má Pepa alespoň n kartiček s daným číslem. Číslo n pak bude populární vždy. Nechť $a_1, a_2, \ldots a_m$ je rostoucí posloupnost obsahující všechna populární čísla. Pepa bude procházet všechna populární čísla a přitom postupně vytvářet hromádku. Součet této hromádky po přidání kartiček s číslem a_j označme S_j, přičemž $S_0 = 0$.

Ukážeme indukcí podle j, že Pepa dovede přidávat kartičky tak, aby pro každé $0 \le j < m$ platilo $a_{j+1} \mid S_j$. Pro $j = 0$ to platí triviálně. Předpokládejme, že podmínka platí pro $j-1$, tedy že existuje přirozené S' takové, že $S_{j-1} = a_j \cdot S'$. Pak pokud Pepa přidá na hromádku x kartiček s číslem a_j, kde $x \equiv -S' \pmod{a_{j+1}}$, tak $S_j \equiv S_{j-1} + xa_j \equiv a_j(S' + x) \equiv 0 \pmod{a_{j+1}}$, takže podmínka platí i pro j. Díky popularitě a_j pak takové x vždy umíme najít (např. x, které je zbytkem $-S$' po dělení a_j, vyhovuje).

Konkrétně Pepa pro každé $1 \le j < m$ přidá na hromádku největší možný počet kartiček s číslem a_j tak, aby platilo $a_{j+1} \mid S_j$. To je z odstavce výše vždy možné, navíc pokud by Pepovi zbylo alespoň n kartiček s číslem a_j, tak jich může ještě a_{j+1} přidat.

Nyní odhadneme součet S kartiček, které Pepa na hromádku nevzal. Pokud je i populární, tak jich zbylo nejvýše $n-1$. Naopak pokud i populární není, tak jich je taky nejvýše $n-1$. Celkově tedy pro $n \ge 3$ platí

$$S \le (1 + 2 + \cdots + (n-1)) \cdot (n-1) = \frac{(n-1)\cdot(n-1)\cdot n}{2} \le (n-2)\cdot(n-1)\cdot n \le n!.$$

Zároveň tento odhad platí i pro $n = 1, 2$, takže $S \le n!$ pro všechna n. Tedy i $S_m = kn! - S \ge n!$, neboli součet čísel na Pepově hromádce dosáhne $n!$.

Ještě je potřeba ukázat, že součet nemůže nikdy přeskočit $n!$. To je však snadné, neboť pro každé $1 \le j \le m$ při přidávání kartiček s čísly a_j platí, že a_j po celou dobu dělí součet čísel na Pepově hromádce. To znamená, že v průběhu tohoto procesu prochází součet postupně po sobě jdoucí násobky a_j a nemůže tudíž minout $n!$.

Poznámky:
V obou úlohách postupovala všechna úspěšná řešení víceméně vzorovým způsobem. Několik řešení úlohy **(b)** ztroskotalo na tom, že buďto nějak tiše předpokládala, anebo prohlásila za v jistém smyslu „nejhorší“ případ, že Pepa má „mnoho“ kartiček s číslem n, načež když nalezne n karet jedné hodnoty t, může je nahradit za t karet hodnoty n, takže těchto menších kartiček musí být „málo“. Tato myšlenka se podobá vzorovému řešení, nicméně přehlíží obtíže, které mohou vzniknout tím, že takto nezískáme t skutečných karet hodnoty n, ale jen jeden velký blok, který má pouze stejnou celkovou hodnotu. Následně není vůbec zřejmé, že se dovedeme „trefit“ přesně na násobek $n!$, obzvláště pokud je skutečných karet s hodnotou n jen málo. Ač některá z těchto řešení vypadala na první pohled slibně, žádnému se nepovedlo mne přesvědčit, že se s těmito obtížemi zvládne vypořádat. *(Matěj Doležálek)*