Projektivní geometrie III

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. DUBNA 2020

Úlohy této série jsou řazeny podle témat, nikoliv podle obtížnosti.

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Mějme kružnice Ω a ω takové, že jsou kružnicí opsanou, resp. vepsanou nějakého trojúhelníka. Na Ω zvolme bod A. Tečny z A k ω protnou Ω v bodech BC. Platí[1], že BC se dotýká ω v D. Dokažte, že zobrazení z A na Ω do D na ω je projektivní.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Na ose úhlu u A zvolme bod P. Označme B_1, C_1 druhé průsečíky postupně PB, PC s kružnicí ω. Na AB zvol bod X tak, že $|\sphericalangle XB_1B| = 90°$. Analogicky na AC zvol Y tak, že $|\sphericalangle YC_1C| = 90°$. Dokažte, že přímka XY prochází pevným bodem nezávisle na pozici P.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Uvažme trojúhelníky ABC, DEF sdílící kružnici opsanou Ω i vepsanou ω. Přímka BC se dotýká ω v K, přímka EF se ω dotýká v L. Označme $M = DK \cap \Omega$ a $N = AL \cap \Omega$. Dokažte, že přímky AM, DN, BC prochází jedním bodem.

[1] Tohle není třeba dokazovat, plyne to z věty, které se říká *Ponceletovo porisma*. Pokud Tě o ní zajímá více, přečti si 3. díl seriálu *Geometrie trojúhelníka*: *https://prase.cz/archive/36/uvod3s.pdf*.

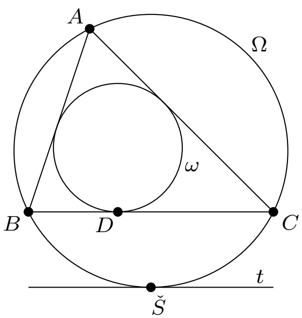
Projektivní geometrie III

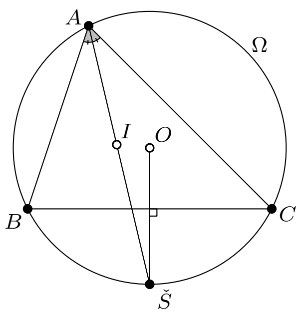
3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Mějme kružnice Ω a ω takové, že jsou kružnicí opsanou, resp. vepsanou nějakého trojúhelníka. Na Ω zvolme bod A. Tečny z A k ω protnou Ω v bodech BC. Platí[1], *že BC se dotýká ω v D. Dokažte, že zobrazení z A na Ω do D na ω je projektivní.* (Radek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Budiž O střed Ω a I střed ω. Zobrazení $A \mapsto D$ vyjádříme jako složení několika zobrazení, o nichž víme, že jsou projektivní. Zobrazení $A \mapsto D$ má přitom vést z držáku Ω od držáku ω, z čehož lze usoudit, že budeme potřebovat nějaké projektivní zobrazení mezi nimi. Jelikož ω je kružnice vepsaná a Ω kružnice opsaná nějakého trojúhelníka, určitě má ω menší poloměr než Ω. Speciálně tedy tyto poloměry nejsou stejné, z čehož existuje stejnolehlost s kladným koeficientem, která je na sebe převádí.





Budiž f tato stejnolehlost s kladným koeficientem, která zobrazuje Ω na ω. Podívejme se, jaký bod se v ní zobrazuje na D. Nahlédněme, že nakreslíme-li si přímku BC jako vodorovnou, pak je D „bod dole“ na kružnici ω, takže se na něj musí zobrazovat opět „bod dole“ na kružnici Ω, tedy střed oblouku BC (toho, který neobsahuje A). Tomuto bodu se říká *Švrčkův bod*[2] (příslušející vrcholu A) a často jej značíme $\check{S}$.

Formálněji: tečnou k ω v bodě D je přímka BC, zatímco tečnou t k Ω v bodě $\check{S}$ je kolmice na $O\check{S}$, což je osa BC. Stejnolehlost zachovává rovnoběžky, takže se $\check{S}$ musí ve stejnolehlosti f zobrazit na bod, v němž je tečna k ω rovnoběžná s t. To už dává pouze dvě možnosti: z kladnosti koeficientu f se $\check{S}$ nemůže zobrazit na bod naproti D (tj. „bod nahoře“ na kružnici ω), musí se tedy zobrazit na D, jak jsme chtěli.

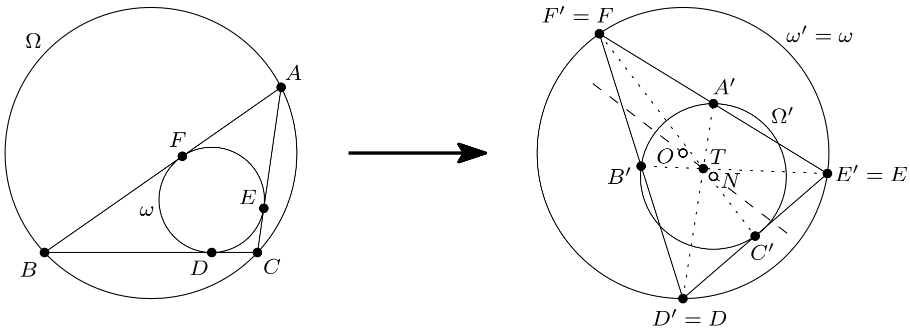
[1] Tohle není třeba dokazovat, plyne to z věty, které se říká *Ponceletovo porisma*. Pokud Tě o ní zajímá více, přečti si 3. díl seriálu *Geometrie trojúhelníka*: *https://prase.cz/archive/36/uvod3s.pdf*.

[2] Viz 2. díl seriálu *Geometrie trojúhelníka*: *https://prase.cz/archive/36/uvod2s.pdf*.

Švrčkův bod ale díky shodnosti oblouků $B\check{S}$ a $\check{S}C$ leží i na ose úhlu $\sphericalangle BAC$, která prochází bodem I. Z toho je zobrazení $A \mapsto \check{S}$ projektivní jakožto prostřelení skrz bod I. Zobrazení $\check{S} \mapsto D$ je už stejnolehlost f, tedy je taky projektivní. Dohromady je $A \mapsto \check{S} \mapsto D$ projektivní.

Alternativní řešení:
V tomto řešení budeme využívat Feuerbachovu kružnici a Eulerovu přímku[3].

Nechť jsou E, F body dotyku kružnice ω s přímkami AC, AB. Překreslíme celý obrázek v inverzi podle kružnice ω – jelikož inverze je projektivní zobrazení, postačí nám ukázat, že $A' \mapsto D'$ je projektivní. Body D, E, F se zachovají a $\omega' = \omega$ jim bude kružnicí opsanou. Bod A leží mimo kružnici ω, takže se zobrazí na střed tětivy spojující body dotyku tečen k ω procházejících skrz A. To znamená, že A' je střed EF, analogicky jsou B', C' středy úseček FD, DE.



Díváme-li se nyní na obrázek prostřednictvím trojúhelníku DEF, pak se A, B, C zobrazí na jeho středy stran. Kružnice Ω' jimi musí procházet, bude se tedy jednat o Feuerbachovu kružnici trojúhelníku DEF. Kružnice Ω' ale bude pevná (nezávisí na poloze A), takže máme pevnou kružnici opsanou ω se středem O a pevnou Feuerbachovu kružnici Ω' se středem N. Oba tyto středy leží na Eulerově přímce trojúhelníku DEF, takže ta je také pevná. Na této přímce také leží těžiště T trojúhelníku DEF a dělí úsečku ON v poměru $2:1$, takže je také pevné. Stejnolehlost se středem v T s koeficientem -2 pak zobrazí středy stran A', B', C' na protější vrcholy D, E, F. To znamená, že $A' \mapsto D'$ je projektivní (máme $D' = D$).

Poznamenejme, že na užitý postup lze nahlížet dvěma způsoby. Jeden (ten, který jsme použili) je, že si celý obrázek překreslíme inverzí a dokazujeme projektivnost v novém obrázku, tj. nakonec dokážeme projektivnost $A \mapsto A' \mapsto D' \mapsto D$, kde první a poslední zobrazení je inverze. Druhý pohled je, že prostě v původním obrázku skládáme inverzi a stejnolehlost, takže zkrátka zavedeme bod A' jako střed EF atp. a dokážeme projektivnost $A \mapsto A' \mapsto D$. To znamená, že inverzí nepřekreslíme celý obrázek, ale pouze ji aplikujeme na ty body, u kterých se nám to hodí.

Poznámky:
Úloha se ukázala býti zrádnou pro mnohé řešitele. Nejčastější chybou bylo nějaké použití hýbajícího se objektu, jako by byl pevný. Někteří se např. pokoušeli tvrdit, že zobrazení $A \mapsto B$ je projektivní jakožto prostřelení skrz F (což ale není pevný bod). Jiní se snažili $A \mapsto D$ poskládat pouze pomocí stejnolehlostí a rotací, což by ale vyžadovalo, aby úhel použitého otočení byl konstantní (což opět obecně není). Kdyby toto fungovalo, tak by $A \mapsto D$ bylo dokonce podobné zobrazení, takže by (ve značení alternativního řešení) byly trojúhelníky ABC a DEF podobné, což ale obecně neplatí, poněvadž $|\sphericalangle DEF| = 90° - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$. *(Matěj Doležálek)*

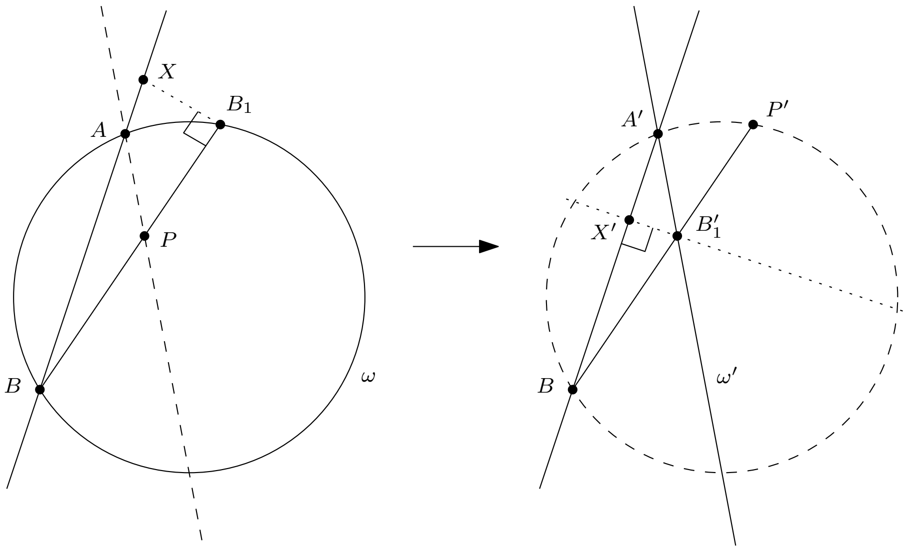
[3]Viz 1. díl seriálu *Geometrie trojúhelníka*: *https://prase.cz/archive/36/uvod1s.pdf*.

Úloha 2.

Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Na ose úhlu u A zvolme bod P. Označme B_1, C_1 druhé průsečíky postupně PB, PC s kružnicí ω. Na AB zvol bod X tak, že $|\sphericalangle XB_1B| = 90°$. Analogicky na AC zvol Y tak, že $|\sphericalangle YC_1C| = 90°$. Dokažte, že přímka XY prochází pevným bodem nezávisle na pozici P. (Radek Olšák)

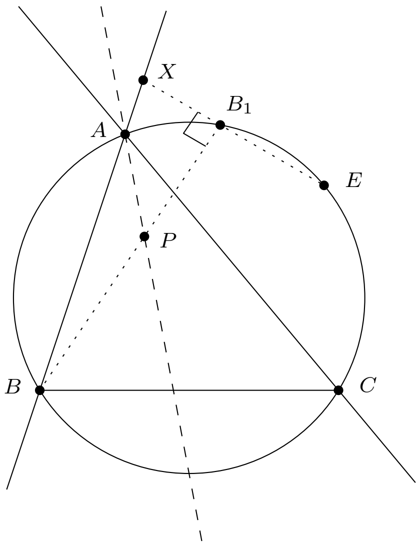
Řešení:
Použijeme lemma o záhadném bodu. Chtěli bychom ukázat, že zobrazení, které bodu X na přímce AB přiřadí bod Y na přímce BC, je projektivní, a že $X = A$ právě tehdy, když $Y = A$. Na to stačí ukázat, že zobrazení, které bodu P na ose úhlu u A přiřadí bod X na přímce AB, je projektivní, a $P = A$ právě tehdy, když $X = A$. Potom totiž bude z analogických důvodů to samé platit o Y, a protože složení dvou projektivních zobrazení je projektivní, máme hotovo. Zjevně $P = A$ právě tehdy, když $B_1 = A$ a to bude právě tehdy, když $X = A$. Tedy nám stačí ukázat projektivnost $P \mapsto X$. To si předvedeme dvěma způsoby.

Když nevíš, tak invertuj:
Zinvertujeme naši konfiguraci podle B. Pak se z osy úhlu u A stane nějaká kružnice procházející skrze B a A'. Nazvěme ji Γ. Potom P' je bod ležící na této kružnici. Protože ω je kružnice procházející skrze A i B, je ω' nějaká přímka procházející skrze A'. Body B, P a B_1 leží na přímce, takže i B, P' a B_1' leží na přímce, proto B_1' vznikne jako průsečík přímky BP' s přímkou ω'. Tedy zobrazení, které P' z Γ přiřadí B_1' na ω', je projektivní, protože z P' přejdeme k BP' a odtamtud k B_1' a všechna tato zobrazení jsou projektivní. Nyní, protože $|\sphericalangle BB_1X| = 90°$, je $|\sphericalangle BX'B_1'| = 90°$. Protože X' zároveň leží na přímce BA', vznikne X' jako průsečík BA' a spojnice B_1' s bodem v nekonečnu ve směru kolmém na BA'. To je projektivní zobrazení, takže i zobrazení $P' \mapsto B_1' \mapsto X'$ bude projektivní. Protože inverze je také projektivní zobrazení, dostáváme již, že $P \mapsto X$ je projektivní zobrazení.



Bez inverze:
Zobrazení, které P na ose úhlu u A přiřadí B_1 na ω je projektivní, protože je to jen řetězec projektivních zobrazení $P \mapsto BP \mapsto B_1$. Nyní nechť E je bod na ω takový, že BE je průměr ω.

Pak $|\sphericalangle BB_1E| = 90°$, takže E, B_1 a X leží na přímce. Pak ale zobrazení, které B_1 na ω přiřadí X na AB, je projektivní, protože je to jen řetězec projektivních zobrazení $B_1 \mapsto EB_1 \mapsto X$. Tedy i $P \mapsto BP \mapsto B_1 \mapsto EB_1 \mapsto X$ je projektivní zobrazení, takže $P \mapsto X$ je projektivní zobrazení.



Poznámky:
Chválím ty z vás, kteří si všimli, že osa úhlu je v zadání úplně zbytečně – mohlo jít o libovolnou přímku skrz A. *(Rado van Švarc)*

Úloha 3.

Uvažme trojúhelníky ABC, DEF sdílící kružnici opsanou Ω i vepsanou ω. Přímka BC se dotýká ω v K, přímka EF se ω dotýká v L. Označme $M = DK \cap \Omega$ a $N = AL \cap \Omega$. Dokažte, že přímky AM, DN, BC prochází jedním bodem. *(Radek Olšák)*

Řešení:
Dokážeme, že přímka AM prochází průsečíkem přímek BC a EF. Pak ze symetrie značení tímto průsečíkem prochází i DN. Ukážeme dvě různá řešení: jedno hýbáním a jedno pomocí DDIT.

Řešení hýbáním:

Lemma. *Mějme kružnici ω a na ní bod P. Tečnu v P označme ℓ. Pak na ℓ mějme pohyblivý bod X. Označme Y bod na ω takový, že XY je druhá tečna k ω. Pokud $X = P$, tak $Y = P$. Pak X na ℓ a Y na ω jsou projektivně svázané.*

Důkaz. Uvažme dualitu vzhledem k ω. Ta zobrazí X na přímku PY. Protože dualita zachovává dvojpoměr, je toto zobrazení $X \mapsto PY$ projektivní. Protože P leží na ω, můžeme projektivně zobrazit $PY \mapsto Y$. Zbývá rozmyslet si degenerovaný případ. Pro $X = P$ dostaneme $PY = \ell$, takže promítnutí na kružnici skrz P zobrazí znovu na P. $\square$

Označme X_1 průsečík AM s BC a X_2 průsečík EF s BC. Pak chceme ukázat, že $X_1 = X_2$. Začneme hýbat s bodem D po kružnici Ω. Pak zobrazení $D \mapsto M$ je prostřelení skrz K neboli je projektivní. Zobrazení $M \mapsto AM \mapsto X_2$ jsou také projektivní. Takže máme zobrazení z D do X_1, které je projektivní.[4]

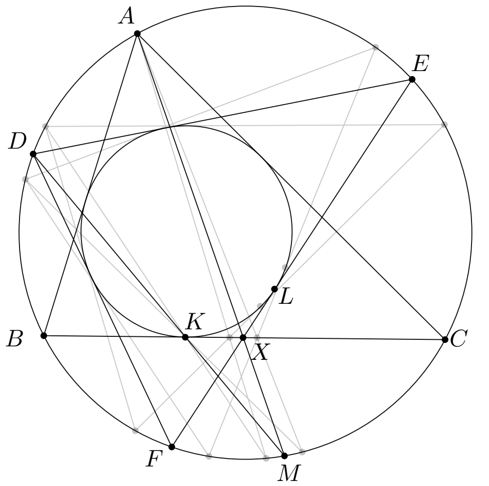
Zobrazení z D do L je projektivní z první seriálové úlohy. L a X_2 jsou projektivně svázané pomocí našeho lemmatu. Takže existuje projektivní zobrazení z D do X_2.

Nyní můžeme využít lemma *tři body stačí.*

(i) Pro $D = A$ dostáváme $M = AK \cap \Omega$, takže $X_1 = K$. Dále $L = K$, takže i $X_2 = K$ pomocí lemmatu.

(ii) Pro $D = B$ dostaneme $M = C = X_1$. Pak L je bod dotyku AC a ω, takže $X_2 = C$.

(iii) Pro $D = C$ je situace analogická, $D = B$.



Řešení pomocí DDIT:

Uvažme DDIT na tečnový čtyřúhelník $ABKC$ a bod D. Pak dostaneme dvojičky (DF, DE), (DM, DA) a (DB, DC) v jedné involuci. Protože D leží na Ω můžeme tuto involuci promítnout na Ω a dostáváme involuci prohazující (F, E), (M, A) a (B, C). Ale to je involuce na kuželosečce, takže má střed. Tedy FE, MA, BC opravdu prochází jedním bodem.

Poznámky:

Všechna správná došlá řešení využívala jeden z těchto postupů. Řešení pomocí DDIT si vysloužila imaginární bod. *(Radek Olšák)*

[4]Teď je dobré si uvědomit, že pokud úloha platí, pak už musí být projektivní i zobrazení z D do X_2. Takže náš plán útoku musí fungovat.