Mřížky a tabulky

3. podzimní série | Termín odeslání: 2. prosince 2019

Tabulka $n \times n$ je tvořena n^2 čtverečky.
Mřížka $n \times n$ je tvořena vrcholy a hranami čtverečků tabulky $n \times n$.

Úloha 1. (3 body)

Pepa vyplnil tabulku 3×3 čísly 1 až 9 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i na hlavních diagonálách[1] byl dělitelný devíti. Muselo pak být číslo v prostředním poli násobek tří?

Úloha 2. (3 body)

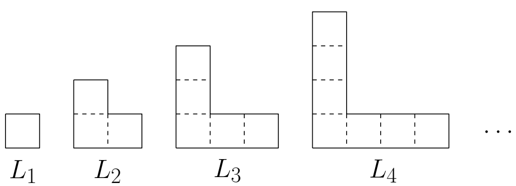
Radeček umístil do tabulky 9×9 v nějakém pořadí čísla 1 až 81. Potom Matějovi řekl, aby našel takové i, že součin čísel v i-tém řádku není roven součinu čísel v i-tém sloupci. Dokažte, že to Matěj zvládl nehledě na rozmístění čísel.

Úloha 3. (3 body)

Pavel si vyrobil krabici o rozměrech $9 \times 8 \times 8$ a chce do ní uskladnit svých 32 oblíbených kvádrů o rozměrech $2 \times 3 \times 3$ tak, aby jejich stěny byly rovnoběžné se stěnami krabice a žádný nevyčníval ven. Ukažte, že se mu to nepovede.

Úloha 4. (5 bodů)

Lenka chce vydlaždičkovat čtvercovou podlahu koupelny o rozměru $n \times n$. V místním obchodě ale prodávají pouze dlaždičky typu L_k, které mají dvě ramena tvořená k čtverečky (viz obrázek) a stojí k korun. Dlaždičky se nesmí překrývat ani lámat. Jak má Lenka nakoupit, aby zaplatila co nejméně?



Úloha 5. (5 bodů)

Ondra s Luckou našli bílou tabulku $n \times n$ a číslo k. Potom hráli následující hru: Ondra vybere k políček a obarví je červeně. Lucka pak několik červených políček (alespoň jedno) přebarví na zelenou. Pro jaké nejmenší k může vždy políčka přebarvit tak, že v každém řádku i sloupci bude sudý počet zelených políček?

---

[1] *Hlavní diagonála* tabulky 3×3 je tvořena dvěma protilehlými rohovými a prostředním políčkem.

Úloha 6. (5 bodů)

Martin dostal dvě posloupnosti $a_1, \dots, a_{2020}$ a $b_1, \dots, b_{2020}$. Každá z nich je tvořena po dvou různými reálnými čísly. Aby se naučil sčítat, vypsal si tabulku součtů, a to takovým způsobem, že do políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci napsal $a_i + b_j$. Dále zjistil, že součin čísel v každém řádku je roven 1. Ukažte, že součin čísel v každém sloupci musí být roven -1.

Úloha 7. (5 bodů)

Dominik vyplnil celou tabulku $2n \times 2n$ nepřekrývajícími se dominovými kostkami 2×1 a 1×2. Potom ji podal Terce, ať obarví vrcholy mřížky třemi barvami tak, aby dva sousední vrcholy měly stejnou barvu právě tehdy, když jejich spojnice půlí některé domino. Rozhodněte, zda ke každému rozložení domin Terka dokáže najít vyhovující obarvení.

Úloha 8. (5 bodů)

Verča dostala mřížku $n \times n$. Do ní si nakreslila cestu procházející po hranách nebo diagonálách jednotlivých čtverečků. Cesta prochází každým vrcholem právě jednou a diagonály se v ní můžou křížit. Určete maximální možný počet diagonál ve Verčině cestě.

Mřížky a tabulky

3. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Pepa vyplnil tabulku 3×3 čísly 1 až 9 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i na hlavních diagonálách[1] byl dělitelný devíti. Muselo pak být číslo v prostředním poli násobek tří?

(Terka Poláková)

Řešení:
Pokud je součet dělitelný devíti, je dělitelný i třemi. Pro trojici čísel, jejichž součet je dělitelný třemi, existují dvě možnosti, jaké zbytky po dělení třemi mohou tato čísla dávat: První možností je, že mají všechna čísla stejný zbytek. A druhá je, že má každé z čísel jiný zbytek.

Prostředním políčkem procházejí dvě diagonály, jeden sloupec a jeden řádek. Tedy čtyři součty v sobě obsahují prostřední políčko. Pokud by všechny tyto součty byly tvořeny čísly dávajícími tři různé zbytky, pak by žádné jiné číslo v tabulce nemohlo dávat stejný zbytek po dělení třemi jako číslo v prostředním políčku. Z toho plyne, že alespoň jeden z těchto součtů je tvořen čísly dávajícími stejné zbytky po dělení třemi. Takové trojice mohou být pouze $2+5+8=15$, $1+4+7=12$ nebo $3+6+9=18$. Nicméně čísla 15 a 12 nejsou dělitelná devíti. Z toho důvodu musí být na prostředním políčku číslo dělitelné třemi.

Poznámky:
Úloha byla bezproblémová, většina zaslaných řešení byla správná. *(Terka Poláková)*

Úloha 2.

Radeček umístil do tabulky 9×9 v nějakém pořadí čísla 1 až 81. Potom Matějovi řekl, aby našel takové i, že součin čísel v i-tém řádku není roven součinu čísel v i-tém sloupci. Dokažte, že to Matěj zvládl nehledě na rozmístění čísel.

(Jáchym Solecký)

Řešení:
Podíváme se, kde se nachází prvočísla 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 a 79. Jedná se o prvočísla, která jsou menší než 81, zato jejich další násobky jsou větší. Těchto prvočísel je deset, ale hlavní diagonála[2] tabulky má pouze devět políček, takže alespoň jedno z těchto čísel na diagonále neleží. To znamená, že toto číslo pro nějaké i leží v i-tém řádku, ale ne v i-tém sloupci. Protože je to prvočíslo, které se nevyskytuje v prvočíselném rozkladu žádného jiného čísla v tabulce, vyskytuje se v prvočíselném rozkladu součinu i-tého řádku, ale nevyskytuje se v prvočíselném rozkladu součinu i-tého sloupce. Tudíž se součin čísel v i-tém řádku nerovná součinu v i-tém sloupci. Matějovi tedy stačí vybrat toto i.

---

[1] *Hlavní diagonála* tabulky 3×3 je tvořena dvěma protilehlými rohovými a prostředním políčkem.

[2] Hlavní diagonálou tabulky myslíme políčka, která pro nějaké i leží zároveň v i-tém sloupci i v i-tém řádku.

Poznámky:

Většina řešení byla správná a podobná vzorovému. Překvapivé množství řešitelů špatně spočítalo počet prvočísel mezi 41 a 81, za což jsem body nestrhávala, pokud i přesto důkaz korektně dokončili. Řešitelé, kteří se úlohu pokoušeli řešit úplně jinak, obvykle nedospěli ke zdárnému konci.

(Anna Mlezivová)

Úloha 3.

Pavel si vyrobil krabici o rozměrech $9 \times 8 \times 8$ a chce do ní uskladnit svých 32 oblíbených kvádrů o rozměrech $2 \times 3 \times 3$ tak, aby jejich stěny byly rovnoběžné se stěnami krabice a žádný nevyčníval ven. Ukažte, že se mu to nepovede.

(Pavel Hudec)

Řešení:

Objem krabice je stejný jako součet objemů kvádrů, takže v krabici nesmí být žádné volné místo. Proto musí být i každá ze stěn krabice beze zbytku pokryta stěnami kvádrů. Víme, že kvádry mají stěny s obsahy $3 \times 2 = 6$ a $3 \times 3 = 9$, což jsou obě čísla dělitelná třemi. Z toho už nutně plyne, že stěna 8×8 se pokrýt nedá, neboť 64 není dělitelné třemi, a tedy se 64 nedá vyjádřit jako součet násobků 6 a 9.

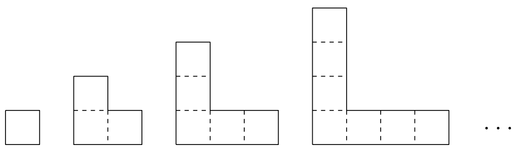
Poznámky:

Více než polovina řešitelů postupovala stejně jako vzorové řešení. Někteří z nich ovšem zapomněli zmínit (zřejmé) pozorování o rovnosti objemů, bez nějž jejich řešení nebyla kompletní.

Našlo se také dost lidí, kteří se úlohu pokoušeli řešit tak, že začnou kvádry do krabice skládat „nejlepším možným způsobem“, a pak ukážou, že to nevyjde. Taková řešení nemáme rádi (neboť většinou nefungují), protože autorovi se opravdu málokdy povede dostatečně zdůvodnit, že jeho způsob je opravdu *nejlepší* možný a že jiný způsob také fungovat nebude. *(Michal Töpfer)*

Úloha 4.

Lenka chce vydlaždičkovat čtvercovou podlahu koupelny o rozměru $n \times n$. V místním obchodě ale prodávají pouze dlaždičky typu L_k, které mají dvě ramena tvořená k čtverečky (viz obrázek) a stojí k korun. Dlaždičky se nesmí překrývat ani lámat. Jak má Lenka nakoupit, aby zaplatila co nejméně?

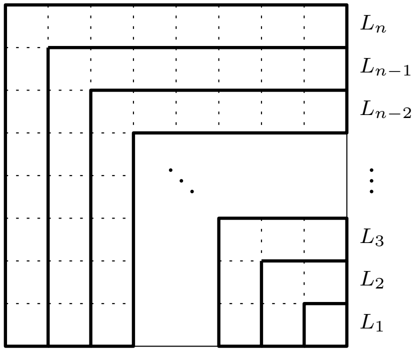


L_1 L_2 L_3 L_4

(Rado van Švarc)

Řešení:

Pro Lenku je nejvýhodnější koupit od každého druhu jednu dlaždičku, celkem tedy n dlaždiček. Nejprve ukážeme, jak plochu za pomoci n dlaždiček pokrýt, a pak ukážeme, že jich nemůže být méně. Dlaždičky vložíme do čtverce $n \times n$ tak, že začneme s dlaždičkou L_n, aby její rohové pole bylo v levém horním rohu. Poté nám bude zbývat čtverec s délkou strany o jedna menší, kde zase dáme dlaždičku L_{n-1} do levého horního rohu a tak dále, až dojdeme k L_1.



Nyní ukážeme, že dlaždiček nemůže být méně. Podívejme se na cenu k, za kterou pokryjeme $x = 2k - 1$ čtverečků jednou dlaždicí typu L_k na naší dané ploše. Pak $k = \frac{x+1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, neboli zaplatíme vždy stejně za pokrytou jednotku obsahu plus jedna polovina za každou použitou destičku. Nechť jsme koupili d dlaždiček, kterými jsme pokryli celý čtverec $n \times n$. Pak víme, že $\textit{celková cena} = \frac{n^2}{2} + \frac{d}{2}$. Tedy chceme minimalizovat počet použitých dlaždiček.

Označme rohové pole, které má každá dlaždička právě jedno, jako *střed*. Nechť každý řádek nebo každý sloupec obsahuje alespoň jeden střed. Pokud tomu tak je, vyhráli jsme a máme alespoň n dlaždiček. Pro spor předpokládejme, že existuje řádek i sloupec, který neobsahuje žádný střed. Podívejme se na jejich průnik. Tento čtvereček nemůže být pokrytý, protože aby byl čtvereček pokrytý, musí ležet na jednom rameni nějaké dlaždičky. Tedy její střed musí být buď ve stejném sloupci, nebo ve stejném řádku jako on sám. Což je však spor s předpokladem, že tento řádek ani sloupec žádný střed neobsahuje. Proto je naše konstrukce optimální.

Poznámky:
Všichni řešitelé, kteří poslali svá řešení, napsali správně alespoň konstrukci, čímž si vysloužili jeden bod. Spousta řešitelů se snažila dokázat, že je nejlepší použít co největší dlaždičky, ale ve svém řešení použili jak velké, tak malé dlaždičky, a proto nebylo jasné, proč by nemohlo existovat řešení lepší. Několik řešitelů našlo správný argument, že chceme minimalizovat počet dlaždiček, ale nebylo jich mnoho. Pár zavrávoralo u obhájení, že jich je alespoň n, ale vcelku už to nebyly žádné velké chyby, které je stály nanejvýš jeden bod. *(Fíla Čermák)*

Úloha 5.

Ondra s Luckou našli bílou tabulku $n \times n$ a číslo k. Potom hráli následující hru: Ondra vybere k políček a obarví je červeně. Lucka pak několik červených políček (alespoň jedno) přebarví na zelenou. Pro jaké nejmenší k může vždy políčka přebarvit tak, že v každém řádku i sloupci bude sudý počet zelených políček?

(Danil Koževnikov)

Řešení (podle Jana Brady):
Dokážeme, že hledané k je rovno $2n$. Pro $k = 2n - 1$ to zřejmě Lucka nemůže zvládnout, protože Ondra může obarvit například celý jeden řádek a jeden sloupec.

Nyní indukcí podle n dokážeme, že pro $k = 2n$ to už vždy zvládne. Pro $n = 1$ úloha nemá smysl, pro $n = 2$ má triviální řešení, kdy oba obarví všechna čtyři políčka.

Indukční krok: Předpokládejme, že pro všechna Ondrova obarvení pro rozměr tabulky n to Lucka zvládne. S libovolným obarvením tabulky $(n + 1) \times (n + 1)$ nyní provedeme následující: najdeme řádek nebo sloupec, BÚNO po případném otočení tabulky řádek, s minimálním počtem obarvených políček, ty jsou nejvýše dvě. Pokud mají všechny řádky i sloupce právě dvě obarvená políčka, má Lucka úkol snadný, stačí přebarvit všechna políčka a je hotovo.

V opačném případě má tento řádek 0 nebo 1 obarvené políčko. Tento řádek přeškrtneme a najdeme i sloupec s nejméně obarvenými políčky. Pokud má 0 nebo 1 políčko obarvené, vyškrtneme ho také. Jinak mají všechny sloupce 2 obarvená políčka a v takovém případě záleží na tom, zda má přeškrtnutý řádek 0 nebo 1 obarvené políčko. Pokud má jedno obarvené políčko, přeškrtneme sloupec, ve kterém se nachází. Pokud nemá žádné obarvené, přeškrtneme libovolný sloupec. Nyní se tedy v přeškrtnutém řádku a sloupci nachází maximálně celkem 2 obarvená pole. Pokud tedy spojíme zbylé oblasti do čtverce, vznikne nám čtverec $n \times n$ s minimálně $2(n+1)-2 = 2n+2-2 = 2n$ obarvenými poli. Pro tento čtverec ale z indukce Lucka vždy nalezne obarvení, které zřejmě funguje i pro náš čtverec, tudíž máme dokázáno.

Řešení pomocí teorie grafů:

Dokážeme, že hledané k je rovno $2n$. Pro $k = 2n - 1$ to zřejmě Lucka nemůže zvládnout, protože Ondra může obarvit například celý jeden řádek a jeden sloupec.

Tabulku si představíme jako bipartitní graf, kde vrcholy jsou řádky a sloupce. V jedné partitě jsou vrcholy odpovídající řádkům a ve druhé sloupcům. Mezi řádkem a sloupcem vede hrana právě tehdy, když Ondra červeně obarvil políčko ležící právě v tomto sloupci i v tomto řádku. Naším úkolem je tedy najít neprázdný podgraf, ve kterém má každý vrchol sudý stupeň, hrany tohoto podgrafu pak odpovídají výběru políček, které má Lucka obarvit zeleně.

Pro $k = 2n$ takovýto podgraf jistě existuje, protože náš graf má $2n$ vrcholů a $2n$ hran, a víme, že acyklický graf (*les*) na $2n$ vrcholech má nejvýše $2n - 1$ hran. Tudíž graf obsahuje kružnici, která je přesně hledaný podgraf, protože každý vrchol kružnice má stupeň právě dva. Pokud neznáš pojmy z tohoto řešení, zkus se podívat na PraSečí seriál Letem grafovým světem[3] ze 34. ročníku.

Poznámky:

Mnoho z Vás si s úlohou poradilo, ať už nějakým řešením podobným prvnímu, či poněkud elegantněji nějakou variací na řešení druhé. Někteří však ukázali jen to, že pro $k = 2n - 1$ to Lucka nezvládne, za což jsem udělil jeden bod, ale nedokázali, že pro $k = 2n$ to zvládne pro všechna Ondrova obarvení, nejen pro nějaké speciální případy. Dalším problémem byla chybná počáteční myšlenka, že Lucka musí obarvit políčka tvořící pravoúhelník. Ale nejčastější chybou bylo přejmenování Lucky na Lenku.

(Ondra Krabec)

Úloha 6.

Martin dostal dvě posloupnosti $a_1, \dots, a_{2020}$ a $b_1, \dots, b_{2020}$. Každá z nich je tvořena po dvou různými reálnými čísly. Aby se naučil sčítat, vypsal si tabulku součtů, a to takovým způsobem, že do políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci napsal $a_i + b_j$. Dále zjistil, že součin čísel v každém řádku je roven 1. Ukažte, že součin čísel v každém sloupci musí být roven -1.

(Danil Koževnikov)

Řešení:

Uvažme polynom

$$P(x) = \prod_{j=1}^{2020} (x + b_j) - \prod_{i=1}^{2020} (x - a_i).$$

Jelikož je P definovaný jako rozdíl dvou monických[4] polynomů stupně 2020, tak bude mít stupeň nejvýše 2019.

Ze zadání víme, že pro všechna $1 \leq i \leq 2020$ platí $\prod_{j=1}^{2020} (a_i + b_j) = 1$. Z toho plyne, že pro všechna taková i platí $P(a_i) = 1$ (první součin se rovná jedné, zatímco jeden činitel ve druhém bude zjevně nulový), takže polynom $P(x) - 1$ má 2020 po dvou různých reálných kořenů. Nenulový

[3] *https://prase.cz/archive/34/uvod1s.pdf*

[4] Polynom je monický, pokud se jeho koeficient u nejvyšší mocniny x rovná jedné.

reálný polynom stupně nejvýše 2019 však může mít nanejvýš 2019 různých kořenů, pročež musí být $P(x) - 1$ nulový polynom, neboli pro všechna reálná x platí

$$\prod_{j=1}^{2020}(x+b_j) - \prod_{i=1}^{2020}(x-a_i) = 1.$$

Speciálně tedy platí daná rovnost i pro $x = -b_j$. Tímto dosazením navíc vynulujeme první součin a dostaneme

$$1 = -\prod_{i=1}^{2020}(-b_j - a_i) = -(-1)^{2020}\prod_{i=1}^{2020}(b_j + a_i) = -\prod_{i=1}^{2020}(b_j + a_i),$$

neboli že součin čísel v j-tém sloupci je roven -1.

POZNÁMKY:
Všechna správná řešení přišla na to, že jsou někde v úloze schované polynomy. Většina z nich se ovšem místo kořenů dívala na jejich koeficienty, což vedlo na soustavu rovnic z Viètových vzorců. Ani tento postup nebylo tak těžké dotáhnout ke zdárnému konci, ale vyžadovalo to výrazně víc algebraických úprav než vzorák. Nakonec jsem se rozhodnul nestrhávat body za drobné nepřesnosti v takových řešeních (například za to, když nebylo dostatečně vysvětleno, proč platí $\prod_{j=1}^{2020}(x+b_j) - \prod_{i=1}^{2020}(x-a_i) = 1$), ale pro příště bych doporučil dávat si na takové věci pozor.

(Danil Koževnikov)

Úloha 7.

Dominik vyplnil celou tabulku $2n \times 2n$ nepřekrývajícími se dominovými kostkami 2×1 a 1×2. Potom ji podal Terce, ať obarví vrcholy mřížky třemi barvami tak, aby dva sousední vrcholy měly stejnou barvu právě tehdy, když jejich spojnice půlí některé domino. Rozhodněte, zda ke každému rozložení domin Terka dokáže najít vyhovující obarvení.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:
Vrcholy mřížky si očíslujeme v kartézských souřadnicích jako $[a, b]$ pro $0 \le a, b \le 2n$. Hrany v mřížce budeme nazývat *půlící* a *nepůlící* v závislosti na tom, jestli půlí nějaké domino.

Nyní obarvíme vrcholy mřížky barvami 0, 1 a 2. Barvu bodu $[x, y]$ si označíme $b(x, y)$. Mřížku obarvíme tak, aby platilo:

(i) $b(0, 0) = 0$.

(ii) Pokud dva body sousedí přes půlící hranu, mají stejnou barvu.

(iii) Pokud dva body $[x, y]$ a $[x+1, y]$ sousedí přes nepůlící hranu, pak

$$b(x+1, y) \equiv b(x, y) + (-1)^{x+y} \pmod{3}.$$

(iv) Pokud dva body $[x, y]$ a $[x, y+1]$ sousedí přes nepůlící hranu, pak

$$b(x, y+1) \equiv b(x, y) - (-1)^{x+y} \pmod{3}.$$

Je jasné, že pokud zvládneme body obarvit tímto způsobem, bude to skutečně hledané obarvení. Zbývá dokázat, že toto obarvení skutečně lze sestrojit. Pro každé nezáporné celé k ukážeme, že to lze pro všechna $[x, y]$ s $0 \le x, y \le 2n$ a $x + y \le k$. Pak to speciálně bude platit pro $k = 4n$ a jsme hotovi.

Pro $k = 0$ to určitě platí.

Nyní pro spor nechť $k > 0$ je nejmenší takové, že to pro něj nejde. Protože lze obarvit vrcholy se součtem souřadnic nanejvýš $k - 1$, nejde toto obarvení rozšířit. Tedy existují x, y taková, že barva, kterou dostane $[x+1, y+1]$ přiřazenou od $[x, y+1]$, je jiná než ta, kterou dostane přiřazenou od $[x+1, y]$.

Políčko tvořeno $[x, y]$, $[x+1, y]$, $[x, y+1]$ a $[x+1, y+1]$ má přesně jednu z hran půlící. Protože když obejdeme toto políčku po směru hodinových ručiček, barva jednou zůstane konstantní a třikrát se změní (vždy na stejnou stranu), musí barva $b(x+1, y+1)$ vyjít z obou stran stejně. Řečeno pořádněji:

(i) Pokud je hrana mezi $[x, y]$ a $[x, y+1]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu

$$b(x+1, y) - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) + (-1)^{x+y} - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) + 2(-1)^{x+y}$$

a od $[x, y+1]$ barvu $b(x, y+1) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - (-1)^{x+y}$, což je ale modulo tři to samé.

(ii) Pokud je hrana mezi $[x, y]$ a $[x+1, y]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu

$$b(x+1, y) - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - (-1)^{x+y+1}$$

a od $[x, y+1]$ barvu $b(x, y+1) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - 2(-1)^{x+y}$, což je ale modulo tři to samé.

(iii) Pokud je hrana mezi $[x+1, y]$ a $[x+1, y+1]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu $b(x+1, y) = b(x, y) + (-1)^{x+y}$ a od $[x, y+1]$ barvu

$$b(x, y+1) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - 2(-1)^{x+y},$$

což je ale modulo tři to samé.

(iv) Pokud je hrana mezi $[x, y+1]$ a $[x+1, y+1]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu

$$b(x+1, y) - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) + 2(-1)^{x+y}$$

a od $[x, y+1]$ barvu $b(x, y+1) = b(x, y) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - (-1)^{x+y}$, což je ale modulo tři to samé.

To ale znamená, že vrchol $[x+1, y+1]$ jde obarvit v souladu s našimi požadavky, což je spor.

POZNÁMKY:

Mnoho z došlých řešení utrpělo na nedostatečnou přesnost. Nestačí jen říct „opakuji a opakuji, a protože to vyjde kolem jednoho domina, bude to vycházet pořád“, je potřeba to diskutovat řádněji – obvykle nejlépe pomocí indukce.

Václav Janáček dostal $+i$ za pěkné řešení, které spočívalo v tom, že domina obarvoval jen tak, aby byla symetrická podle půlící čáry. Pak si rozmyslel, že pro tabulku vyplněnou jen svislými dominy to jde. Následně ukázal, že kdykoliv máme pro nějaké rozložení vyhovující obarvení, umíme vyhovujícím způsobem vybarvit i mřížku vzniklou tak, že jednu dvojici domin sousedících delší hranou otočíme o 90°. A nakonec řekl, že každé rozložení domin lze těmito operacemi získat z tabulky jen ze svislých domin. *(Rado van Švarc)*

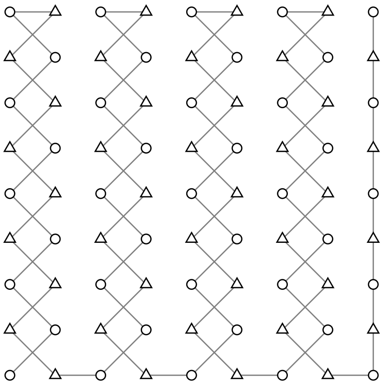
Úloha 8.

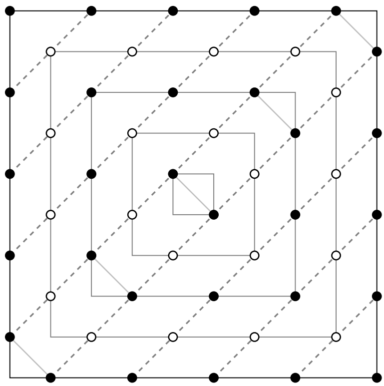
Verča dostala mřížku $n \times n$. Do ní si nakreslila cestu procházející po hranách nebo diagonálách jednotlivých čtverečků. Cesta prochází každým vrcholem právě jednou a diagonály se v ní můžou křížit. Určete maximální možný počet diagonál ve Verčině cestě.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:
Maximální počet diagonál vyjde n^2 pro sudé n a n^2+n pro n liché. Nejdříve dokážeme tyto horní odhady maximálního počtu diagonál a na závěr najdeme konstrukci.

Vrcholy mřížky rozdělme do dvou skupin (kolečka a trojúhelníky) jako šachovnici (tedy vrcholy sousedící hranou jsou v různých skupinách) například tak, aby levý horní roh byl kolečko. Platí, že hrany spojují vrcholy různého typu a diagonály naopak vrcholy stejného typu. Vrcholů v mřížce $n\times n$ je právě $(n+1)^2$ a cesta má vždy právě n^2+2n úseků, stačí tedy minimalizovat počet použitých hran. Z pohledu rozdělení to znamená, že chceme typ vrcholu změnit co nejméněkrát. Podívejme se na naší cestě pouze na diagonály, které vedou mezi kolečky. Ty tvoří dohromady několik menších souvislých cestiček[5], které spolu disjunktně pokrývají všechna kolečka. Hlavní myšlenka tedy bude odhadnout, kolika nejméně disjunktními cestičkami jsme schopni kolečka pokrýt – to nám následně dá i dolní odhad na to, kolikrát musíme změnit typ vrcholu.





Podívejme se nyní pouze na kolečka (označme jejich počet zatím m) a předpokládejme, že je umíme pokrýt pomocí k disjunktních cestiček. Každá cestička má o jeden úsek méně, než kolika prochází vrcholy, a všechny cestičky dohromady pokrývají všechny vrcholy. Obsahují tedy dohromady $m-k$ úseků. Bude proto stačit, když odhadneme, kolik nejvíce úseků může obsahovat disjunktní pokrytí všech koleček. K tomuto odhadu se nám bude hodit obarvit si kolečka dvěma barvami – černou a bílou, a to takovým způsobem, že si rozdělíme vrcholy do vrstev podle toho, jakou mají vzdálenost od nejbližší strany velkého čtverce, který tvoří okraje mřížky. Vrcholy, které jsou na okraji, obarvíme černě, vrcholy o vrstvu níž se vzdáleností 1 obarvíme bíle, vrcholy se vzdáleností 2 černě a takto budeme střídavě pokračovat. Nyní už rozlišíme situaci podle toho, jestli je n sudé, nebo liché.

(a) Nechť n je liché. V tomto případě je koleček stejně jako trojúhelníčků, tedy $\frac{(n+1)^2}{2}$, a situace je pro oba typy vrcholů symetrická. Koukněme se na naše černobílé obarvení koleček a spočítejme počet bílých vrcholů. Když se ve velkém čtverci podíváme na ty diagonální příčky zleva doprava nahoru, které obsahují kolečka, tak na každé je vždy o jeden černý bod více než bílých (dohromady je tam lichý počet a postupně střídáme sousední vrstvy, tedy i barvy). Takovýchto diagonálních příček je dohromady $n+1$, tedy mřížka obsahuje o $n+1$ víc černých vrcholů. Z toho už je bílých vrcholů právě $\frac{n^2-1}{4}$. Mějme nyní nějaké vyhovující pokrytí cestičkami. Z každého bílého vrcholu vychází nejvýše dva úseky, dohromady tedy existuje nejvýše $\frac{n^2-1}{2}$ úseků spojujících buď dva bílé vrcholy, nebo jeden bílý a jeden černý vrchol. Zbývá odhadnout ještě počet úseků mezi dvěma černými vrcholy.

[5]Cestička může být i triviální, tedy délky nula, začínající i končící ve stejném vrcholu.

Takový úsek by musel vést mezi dvěma body ze stejné vrstvy a tam jsou body dostatečně blízko pouze ve dvojicích podél hlavní diagonály (zleva doprava nahoru). Takovýchto černých dvojic bodů je tam právě $\frac{n+1}{2}$. Dohromady je tedy v naší konfiguraci cestiček právě $\frac{n^2+2n+1}{2}$ vrcholů a nejvýše $\frac{n^2+n}{2}$ úseků. Z diskuze výše tedy vyplývá, že cestiček musí být alespoň

$$\frac{n^2+2n+1}{2} - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n+1}{2},$$

bychom neměli dostatek úseků. Analogická situace ze symetrie nastává pro pokrytí trojúhelníčků. Typ vrcholu musíme změnit pokaždé, když přecházíme mezi cestičkami, a vzhledem k tomu, že cestiček je alespoň $n+1$, tak jej musíme změnit alespoň n-krát. Diagonál tedy použijeme nejvýše $n^2 + 2n - n = n^2 + n$.

(b) Nechť n je sudé. Tentokrát situace není symetrická a tabulka obsahuje více koleček. Konkrétně se počet koleček po řádcích střídá mezi $\frac{n+2}{2}$ a $\frac{n}{2}$, dohromady jich je

$$\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+2}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + n + 1.$$

Opět se podíváme na počet diagonál spojujících kolečka. Bílých vrcholů je ze stejných důvodů o $n+1$ méně než černých, tedy právě $\frac{n^2}{4}$, takže diagonál využívajících alespoň jeden bílý vrchol je nejvýše $\frac{n^2}{2}$. Tentokrát si ale můžeme všimnout, že neexistuje diagonála, která by vedla mezi dvěma černými vrcholy. Vyplývá to z toho, že všechny vrcholy v černé vrstvě jsou teď vzdálené alespoň o 2, protože černé vrcholy vždy padnou do vrcholu čtverce určujícího danou vrstvu. Úseků je tedy celkově nejvýše $\frac{n^2}{2}$, cestiček pokrývajících kolečka alespoň $n+1$. Situaci pro trojúhelníky (kterých je méně) nemusíme vyšetřovat, neboť správný odhad plyne už z následující úvahy. Pokaždé když se chceme přesunout mezi dvěma disjunktními cestičkami pokrývající kolečka, musíme právě dvakrát změnit typ vrcholu, dohromady tedy musíme změnit typ alespoň $2n$-krát. Diagonál lze tedy nejvýše použít $n^2 + 2n - 2n = n^2$.

Jako konstrukce se nabízí jít postupně po dvojicích sloupců. V každé dvojici nejdříve vystoupáme nahoru po diagonálách, pak změníme barvu a sestoupíme po diagonálách dolů a přejdeme na další dvojici. Pro sudá n máme lichý počet sloupců, takže nelze sloupce přesně spárovat a poslední sloupec například můžeme projít celý po hranách. Tím jsou obě části důkazu hotovy.

Poznámky:

Většina došlých řešení správně nalezla konstrukci, nicméně potom nebyla schopna podat korektní důkaz odhadu a snažila se typicky říct, že jejich způsob projití mřížky je nejvýhodnější. Taková argumentace nicméně nikdy nevedla ke správnému cíli, protože obvykle vyšetřovala optimum jenom lokálně, neuvažovala všechny možné cesty nebo si úlohu nějak jinak implicitně zjednodušila. Tato řešení si vysloužila jeden bod, jediné kompletní řešení přišlo od *Magdalény Mišinové*.

Samotná myšlenka šachovnicového obarvování je v kombinatorice velmi běžná a hodí se ji umět používat. Hlavní trik byl v konstrukci černobílého obarvení na odhad počtu úseků, které je pro lichá n poněkud atypické – nicméně pro sudá n degeneruje do klasického šachovnicového obarvení.

(Martin Raška)