Posloupnosti

2. podzimní série Termín odeslání: 4. listopadu 2019

K této sérii Ti spolu s prvními komentáři 39. ročníku přijde text, ve kterém budou vysvětleny základní pojmy a značení nutné k pochopení tohoto zadání. O něco dříve ho najdeš na našich stránkách na adrese http://mks.mff.cuni.cz/commentary.

Úloha 1. (3 body)
Hedvika napsala na tabuli slovo POSLOUPNOSTI. Poté každé písmenko nahradila číslicí od 1 do 9, přičemž stejná písmenka nahradila stejnými číslicemi a různá různými. Mohlo se stát, že po nahrazení byl rozdíl každých dvou sousedních číslic alespoň tři?

Úloha 2. (3 body)
Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$, pro kterou platí, že pokud je a_n dělitelné třemi, tak $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$. V opačném případě je $a_{n+1} = a_n - 1$. Dále víme, že a_1 je čtyřciferné číslo a $a_8 = 1$. Najděte všechna možná a_1.

Úloha 3. (3 body)
Dokažte, že pokud rostoucí aritmetická posloupnost celých čísel obsahuje druhou mocninu přirozeného čísla, obsahuje jich nekonečně mnoho.

Úloha 4. (5 bodů)
Uvažujme všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nenulových reálných čísel, ve kterých $a_1 = 1$ a které pro všechna přirozená n splňují

$$a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2.$$

Kolika různých hodnot může nabývat a_{2019}?

Úloha 5. (5 bodů)
Radeček si napsal na papír všech 2^{2019} různých posloupností plus a mínus jedniček o délce 2019. Poté v každé z nich sečetl všechny její prvky a tento součet umocnil na druhou, čímž dostal 2^{2019} výsledků. Jaký je jejich průměr?

Úloha 6. (5 bodů)
Pro která kladná reálná čísla b existuje posloupnost kladných reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_{n+2} = \sqrt{b \cdot a_{n+1} - a_n}$ pro všechna přirozená n?

Úloha 7. (5 bodů)
Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n. Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $\frac{a_k}{b_k} = 2019$.

Úloha 8. (5 bodů)
Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že $a_1 = 1$ a pro všechna přirozená n větší než 1 je a_n nejmenší přirozené číslo, které je různé od všech předchozích prvků posloupnosti a které je nesoudělné s jejich součtem. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje všechna přirozená čísla.

Posloupnosti

2. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

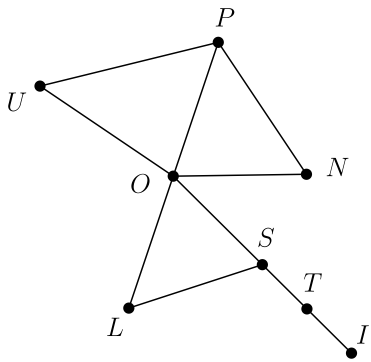
Úloha 1.

Hedvika napsala na tabuli slovo POSLOUPNOSTI. Poté každé písmenko nahradila číslicí od 1 *do* 9*, přičemž stejná písmenka nahradila stejnými číslicemi a různá různými. Mohlo se stát, že po nahrazení byl rozdíl každých dvou sousedních číslic alespoň tři?*

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Slovo POSLOUPNOSTI obsahuje osm různých písmen. Pomocí následujícího diagramu si můžeme nakreslit, které písmeno ve slově sousedí se kterým. Písmena spojená čarou musí mít dle zadání rozdíl alespoň tři. Dokážeme, že písmenům umíme přiřadit vhodné číslice tak, aby to platilo.



Můžeme si všimnout, že O sousedí s pěti různými písmeny – P, S, L, U, N. Všechna tato písmena musí mít různé hodnoty. To nám ihned omezuje hodnoty O na $\{1, 2, 8, 9\}$. Kdyby totiž nabývalo O hodnoty mimo tuto množinu, už by na jeho sousedy nezbyly číslice, které by od něj byly vzdáleny o tři.

Můžeme učinit užitečné pozorování – pokud pro každé písmeno jeho hodnotu x nahradíme hodnotou $10 - x$, platnost úlohy se nezmění – sousední písmena budou mít stále ten stejný rozdíl. Proto se můžeme bez újmy na obecnosti zaměřit pouze na $O \in \{1, 2\}$

Pokud $O = 2$, musí písmena P, S, L, U, N nutně nabývat různých hodnot z množiny číslic $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. P vedle sebe potřebuje ještě U a N, se kterými musí mít rozdíl alespoň tři. P tedy nesmí být nic z $\{6, 7, 8\}$. Pro $P = 5$ musí být $\{U, N\} = \{8, 9\}$, pro $P = 9$ musí být $\{U, N\} = \{5, 6\}$. V obou z těchto případů zbudou na písmena S a L číslice, jejichž rozdíl je jedna – pro $O = 2$ tedy nelze najít řešení.

Musí tedy nutně platit $O = 1$. Nyní jsme u P1SL1UPN1STI a už není těžké úlohu dokončit téměř libovolně – můžeme např. nejdříve zvolit $P = 4$ a $S = 5$, jelikož obě písmena sousedí se třemi jinými. Pak můžeme pokračovat např. $U = 7$, $N = 8$, $L = 9$, čímž zajistíme platnost podmínky v zadání v téměř celém slově – písmena T, I jsme si nechali nakonec, můžeme dosadit např. $T = 2$ a $I = 6$.

Dostali jsme POSLOUPNOSTI = 415917481526, což skutečně vyhovuje zadání. Hedvice se to tedy podařit mohlo.

Poznámky:
Úlohu splnil každý, kdo (i bez vysvětlení) uvedl vyhovující příklad, jak se to Hedvice mohlo podařit. K úspěšnému vyřešení stačila dobrá intuice, že písmenu O chceme přiřadit nějakou extrémní hodnotu, tedy 1 nebo 9, aby co nejméně omezila zbytek. Šlo udělat další zajímavá pozorování – např. písmena U a N mají stejné množiny sousedů, hodnoty těchto písmen lze tedy v každém řešení prohodit. Jenom tak pro zajímavost – vyhovujících ohodnocení je celkově 112. Za graf v tomto vzorovém řešení děkuji *Denise Hanuškové*! :) *(Marian Poljak)*

Úloha 2.

Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$, pro kterou platí, že pokud je a_n dělitelné třemi, tak $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$. V opačném případě je $a_{n+1} = a_n - 1$. Dále víme, že a_1 je čtyřciferné číslo a $a_8 = 1$. Najděte všechna možná a_1.

(Terka Poláková)

Odhadovací řešení:
Víme, že platí $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$, nebo $a_{n+1} = a_n - 1$ a $a_8 = 1$. Jelikož je zřejmě $a_n - 1$ větší než $\frac{a_n}{3}$, platí už nutně $a_{n+1} \geq \frac{a_n}{3}$. Nejmenší čtyřciferné číslo je 1000, díky tomu můžeme odhadnout ostatní členy posloupnosti.

$$
\begin{aligned}
a_2 &\geq \frac{a_1}{3} \geq \frac{1000}{3} > 333,\\
a_3 &\geq \frac{a_2}{3} > \frac{333}{3} = 111,\\
a_4 &\geq \frac{a_3}{3} > \frac{111}{3} = 37,\\
a_5 &\geq \frac{a_4}{3} > \frac{37}{3} > 12,\\
a_6 &\geq \frac{a_5}{3} > \frac{12}{3} = 4,
\end{aligned}
$$

Nyní známe minimální hodnotu každého členu posloupnosti. Budeme postupovat od známého a_8 a zkoušet všechny možné hodnoty předchozích členů. Kdykoliv se nám objeví jako jedna z možných hodnot číslo, které je menší než tato minimální hodnota, tak dané číslo škrtneme a již z něj nepočítáme další členy posloupnosti. Takto dopočítáme všechny možné hodnoty jednotlivých členů posloupnosti včetně a_1.

$$
\begin{aligned}
a_7 &\in \{2, 3\},\\
a_6 &\in \{\cancel{3}, 6, \cancel{4}, 9\},\\
a_5 &\in \{\cancel{7}, 18, \cancel{10}, 27\},\\
a_4 &\in \{\cancel{19}, 54, \cancel{28}, 81\},\\
a_3 &\in \{\cancel{55}, 162, \cancel{82}, 243\},\\
a_2 &\in \{\cancel{163}, 486, \cancel{244}, 729\},\\
a_1 &\in \{\cancel{487}, 1458, \cancel{730}, 2187\}.
\end{aligned}
$$

Tedy jediná dvě možná řešení jsou čísla 1458 a 2187.

Řešení hledáním přesného tvaru:
Rozebereme možná řešení podle počtu přičtení jedničky v posloupnosti.

(i) Pokud jedničku nepřičítáme ani jednou, získáme největší možné a_1. To je $a_1 = 3^7 = 2187$.

(ii) Nechť nahradíme právě jedno násobení třemi přičtením jedničky. Označme k index posloupnosti takový, že $a_k = a_{k+1} + 1$. Potom spočítáme postupně

$$a_{k+1} = (3^{8-(k+1)}) = 3^{7-k}, \qquad a_k = 3^{7-k} + 1, \qquad a_1 = (3^{7-k} + 1) \cdot 3^{k-1}.$$

Roznásobíme si závorku:

$$a_1 = (3^{7-k} + 1) \cdot 3^{k-1} = 3^{7-k+k-1} + 3^{k-1} = 3^6 + 3^{k-1}.$$

Tedy čím větší je k, tím větší bude a_1. Pro $k = 7$ platí $a_1 = 3^6 + 3^6 = 2 \cdot 3^6 = 1458$. Pro $k = 6$ je

$$a_6 = 3^6 + 3^5 = 729 + 243 = 972 < 1000.$$

Tedy v tomto případě je jediné řešení $a_1 = 1458$, ostatní a_1 mohou být maximálně trojciferná.

(iii) Pokud nahradíme více než jednu z operací násobení 3 přičítáním 1, tak existuje index posloupnosti k takový, že je různý od 7 a zároveň $a_k = a_{k+1} + 1$. Nyní opět využijeme, že pro člen naší posloupnosti x platí $3 \cdot x > x + 1$, neboli vynásobením třemi dostaneme vždy vyšší číslo než přičtením jedničky. Pak tedy dokážeme a_1 zvětšit tak, že na pozicích různých od k vždy provedeme vynásobení třemi místo případného přičtení jedničky. Jelikož je k různé od sedmi, museli jsme díky předchozímu bodu zvětšit a_1 na nejvýše trojciferné číslo. To znamená, že v tomto případě nemáme žádné vyhovující a_1.

Tedy jediná dvě možná řešení jsou čísla 1458 a 2187.

Poznámky:
Většina řešení byla povedená a různorodá. Úloha měla více způsobů, jak se řešitelé mohli dobrat řešení. Kromě již výše zmíněných se našli řešitelé, co úlohu řešili pomocí funkcí či pomocí trojkové soustavy. *(Terka Poláková)*

Úloha 3.

Dokažte, že pokud rostoucí aritmetická posloupnost celých čísel obsahuje druhou mocninu přirozeného čísla, obsahuje jich nekonečně mnoho.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme d diferenci uvažované posloupnosti. Protože se jedná o rostoucí posloupnost celých čísel, je d kladné a celé.

Nechť $a_n = k^2$. Potom pro každé kladné celé ℓ je

$$a_{n+2k\ell+\ell^2 d} = a_n + \left(2k\ell + \ell^2 d\right) d = k^2 + 2k\ell d + \ell^2 d^2 = (k + \ell d)^2.$$

Člen s tímto indexem můžeme určitě uvažovat, neboť d, k a ℓ jsou kladná celá čísla. Tím v naší posloupnosti dostáváme nekonečně mnoho druhých mocnin.

Poznámky:
Většina řešení byla správně. *(Rado van Švarc)*

Úloha 4.

Uvažujme všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nenulových reálných čísel, ve kterých $a_1 = 1$ a které pro všechna přirozená n splňují

$$a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2.$$

Kolika různých hodnot může nabývat a_{2019}?

(Martin Raška)

Řešení:

Pro přirozené k si zadefinujme *trojúhelníkové číslo* T_k jako součet prvních k přirozených čísel neboli $1 + 2 + \cdots + k$.[1] T_0 buď definováno jako prázdný součet čili nula. Můžeme si všimnout, že $a_1 = T_1$ a že všechna T_k jsou navzájem různá. Dále dokážeme, že pokud $a_n = T_k$, pak jsou možnými hodnotami a_{n+1} právě T_{k+1} a T_{k-1}. Rovnice v zadání je vůči proměnné a_{n+1} kvadratická, tedy existují nejvýše dvě možné hodnoty a_{n+1}. Stejně tak platí, že je tato rovnice symetrická vůči proměnným a_n a a_{n+1}. Stačí tedy dokázat, že dvě po sobě jdoucí trojúhelníková čísla tento vztah splňují, a pak už nám sousední trojúhelníková čísla k T_k budou určovat množinu řešení. Skutečně platí

$$T_k + T_{k+1} = \Big(0 + 1 + \cdots + (k-1) + k\Big) + \Big((k+1) + k + \cdots + 2 + 1\Big) =$$
$$= \Big(0 + (k+1)\Big) + \Big(1 + k\Big) + \cdots + \Big((k-1) + 2\Big) + \Big(k + 1\Big) = (k+1)^2 = (T_{k+1} - T_k)^2.$$

Právě jsme dokázali, že pokud $a_n = T_k$, tak je a_{n+1} rovno T_{k+1}, nebo T_{k-1}. Jedinou výjimkou je případ $k = 1$. Pak $T_{k-1} = T_0 = 0$, což je ze zadání zakázáno. Posloupnost splňující zadání si tedy můžeme představit tak, že začínáme T_1 a v každém kroku přeskočíme na sousední trojúhelníkové číslo, s tím, že nikdy nemůžeme skočit na T_0. Vidíme, že při každém skoku se změní parita indexu u trojúhelníkového čísla – v lichých pozicích v posloupnosti tak vždy budeme na lichém trojúhelníkovém čísle (myšleno ve významu T_k pro liché k). Zároveň ve 2018 skocích vystoupáme nejvýše na T_{2019}. Souhrnem může a_{2019} být pouze liché trojúhelníkové číslo mezi T_1 a T_{2019} – těch je právě 1010. Zbývá ukázat, že každého takového T_k lze dosáhnout. Jako příklad posloupnosti se nabízí vystoupat v prvních $k - 1$ krocích na T_k a ve zbytku posloupnosti skákat mezi T_{k+1} a T_k.

Člen a_{2019} tedy může nabývat právě 1010 různých hodnot.

Poznámky:

Asi polovina řešitelů si všimla, že čísla v posloupnostech vycházejí takto pěkně, a s tímto pozorováním úlohu typicky bez problému dořešila. K řešení úlohy to nicméně nutné nebylo a sešlo se i hodně správných řešení, která se pouze dívala na strukturu posloupností a z ní vyvozovala stejné závěry. U těchto řešení bylo nicméně třeba správně odargumentovat více věcí a zbavit se možných problémů, které nastávají, když člověk nemá členy explicitně vyjádřené. Dalším nešvarem byl velký počet řešení, která si pouze všimla, jak se dané posloupnosti budou chovat, a pak bez dostatečných důkazů poslali výsledek. *(Martin Raška)*

Úloha 5.

Radeček si napsal na papír všech 2^{2019} různých posloupností plus a mínus jedniček o délce 2019. Poté v každé z nich sečetl všechny její prvky a tento součet umocnil na druhou, čímž dostal 2^{2019} výsledků. Jaký je jejich průměr?

(Marian Poljak)

[1] Tato aritmetická řada jde dobře sečíst – platí $T_k = \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$.

Řešení indukcí:

Představme si, že bychom měli všechny posloupnosti plus a mínus jedniček délky n. Prvky každé posloupnosti sečteme a umocníme na druhou. Nazvěme *plusmínus průměrem* aritmetický průměr daných druhých mocnin a označme ho P_n. Zadání se nás ptá na P_{2019}. Indukcí dokážeme, že $P_n = n$.

(i) **Indukční předpoklad:** Ověříme indukční předpoklad pro $n = 1$. Dané posloupnosti délky jedna jsou pouze dvě a to $+1$ a -1, tedy jejich plusmínus průměr je $\frac{1^2+(-1)^2}{2} = 1$.

(ii) **Indukční krok:** Mějme všechny posloupnosti plus a mínus jedniček délky $n+1$ a rozdělme je do disjunktních dvojic tak, že vždy popárujeme dvě posloupnosti, které mají prvních n čísel stejných (liší se tedy pouze posledním členem, který je pro jednu posloupnost roven plus jedné a pro druhou mínus jedné). Označme x_i součet prvních n členů v dvojici i. Pak součet hodnot těchto dvou posloupností umocněných na druhou je $(x_i+1)^2 + (x_i-1)^2 = 2x_i^2 + 2$. Plusmínus průměr všech 2^n posloupností je tedy roven:

$$\frac{(2x_1^2+2) + (2x_2^2+2) + \cdots + (2x_{2^n}^2+2)}{2^{n+1}} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2^n}^2}{2^n} + 1 = n + 1.$$

V posledním kroku jsme využili indukční předpoklad, že plusmínus průměr všech posloupností délky n je roven n a tím je indukční krok hotov. Pro $n = 2019$ je pak $P_{2019} = 2019$.

Řešení počítáním:

Pokud máme posloupnost, ve které se vyskytuje i mínus jedniček, tak součet takovéto posloupnosti je $n - 2i$. Zároveň počet posloupností, které obsahují právě i mínus jedniček, je stejně jako počet způsobů, kolika můžeme vybrat i prvků z n prvků, tedy $\binom{n}{i}$. Daný průměr tak můžeme vyjádřit jako

$$\frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^2\right) = \frac{1}{2^n}\left(n^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - 4n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i + 4\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2\right).$$

Dále použijeme buď známé vzorce, nebo si je odvodíme. Dokážeme, že:

(i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$

Tato rovnost počítá počet podmnožin n-prvkové množiny. Počet podmnožin velikosti i je $\binom{n}{i}$, pokud toto sečteme přes všechna i, dostaneme požadovaný počet podmnožin. Obdobně pravá strana počítá to samé, jen z jiného úhlu pohledu. Pro každý prvek si můžeme vždy zvolit dvě možnosti – buď ho do dané podmnožiny přidáme, anebo ne. Přes všechny prvky je pak počet podmnožin roven 2^n, tedy pravé straně.

(ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i = n\cdot 2^{n-1}$

Představme si, že chceme vybrat z n-prvkové množiny lidí nějaký „tým“ lidí a zvolit jednoho jejich kapitána. To můžeme udělat dvěma způsoby. Buď nejprve vybereme danou podmnožinu lidí – tým s i lidmi a z nich pak i způsoby můžeme vybrat jejich kapitána (to znázorňuje levá strana). Nebo můžeme nejdříve vybrat kapitána (n způsoby) a pak se pro každého ze zbylých $n-1$ lidí rozhodnout, zda je do týmu vybereme nebo ne (to můžeme udělat 2^{n-1} způsoby), což nám dá pravou stranu.

(iii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2 = n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}$

Představa bude podobná jako v předchozím případě, jen teď kromě kapitána chceme také vybírat předsedu týmu, přičemž předsedou může být i kapitán. Buď zase nejprve vybereme tým o i lidech a poté z nich i způsoby vybereme kapitána a opět i způsoby vybereme předsedu, což udává levá strana. Nebo rozlišíme dva případy podle toho, zda je předseda zároveň kapitánem či nikoliv. Pokud je předseda a kapitán jiný člověk, tak můžeme n způsoby vybrat kapitána, poté $n-1$ způsoby vybrat předsedu a poté se pro každého ze zbylých $n-2$ lidí rozhodnout, zda je v týmu chceme nebo ne. Nebo je předseda a kapitán tentýž člověk a poté stačí n způsoby vybrat člověka, který bude jak kapitán tak předseda a pak se pro každého z $n-1$ lidí rozhodnout, zda v týmu budou. Sečtením těchto dvou hodnot získáme pravou stranu rovnice.

Dokázané rovnosti nyní můžeme použít k úpravě výrazu, který jsme získali dříve:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^n}\left(n^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}-4n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i+4\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2\right)=\\&=\frac{1}{2^n}\Big(n^2\cdot 2^n-4n\cdot n\cdot 2^{n-1}+4(n(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1})\Big)=\\&=n^2-2n^2+n^2-n+2n=n.\end{aligned}$$

Pro $n=2019$ tak hodnota daného výrazu skutečně vyjde 2019.

Řešení pravděpodobnostním magic trikem:
Mějme některou z daných 2^{2019} posloupností plus a mínus jedniček. Její prvky označme postupně $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$. Rozmysleme si, jak vypadá součet prvků této posloupnosti umocněný na druhou:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\cdots+x_{2019})^2&=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2019}^2+2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots x_{2018}x_{2019})=\\&=2019+2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots x_{2018}x_{2019}).\end{aligned}$$

Poslední úprava platí, protože každé z čísel x_1 až x_{2019} je buď plus nebo mínus jednička, tedy na druhou je vždy rovno jedné. Nyní se podívejme na členy tvaru x_ix_j. Pokud vybereme libovolné x_i a x_j, pak obě jsou s poloviční pravděpodobností rovny plus jedné a s poloviční pravděpodobností rovny mínus jedné. Uvědomme si navíc, že dané dvě pravděpodobnosti jsou na sobě nezávislé. Platí tedy, že dohromady je pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že mají tyto dvě čísla stejné znaménko (tedy součin bude 1) a stejně tak mají pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že mají různé znaménko (tedy součin bude -1). Průměrná hodnota x_ix_j je tedy rovna 0. (Zde využíváme linearitu střední hodnoty. Zdá se to intuitivní, ale pokud by ses chtěl dozvědět více nebo podívat na důkaz, najdeš ho v textu druhého dílu loňského seriálu o pravděpodobnosti[2].) Takže druhá mocnina součtu členů jedné z posloupností bude v průměru 2019. A důkaz je hotov.

Poznámky:
Většina došlých řešení postupovala podobně jako v tom vzorovém, buď počítáním, nebo indukcí, s četností přibližně půl na půl. Za dvě řešení, která postupovala s využitím pravděpodobnostního triku, jsem udělila plus i. Poměrně dost řešitelů přišlo na vyjádření daného průměru sumou jako v počítacím řešení, jenže pak daný výraz vyčíslili za pomoci počítače (typicky s využitím programu Wolfram alpha). Takovým přístupem sice dospěli ke správnému řešení, ale vzhledem k tomu, že nikdo pořádně netuší, jak Wolfram uvnitř vlastně funguje a jak tyto věci počítá, jsem za tato řešení strhávala jeden bod a udělovala mínus i. Obecně v řešeních použití počítače vidíme dost neradi. Je samozřejmě v pořádku použít počítač k tomu, aby člověk například zjistil, jaký daný výsledek je a úloha se mu pak řešila snáz. Měl by ale být schopen zdůvodnit správnost svého řešení i bez něj. Úloha se dala také nahlédnout, pokud si člověk uvědomil, že daný výraz (plusmínus průměr) je vlastně rozptyl náhodné veličiny odpovídající dvojnásobku počtu panen při hodu 2019-ti mincemi. Na to ale bohužel nikdo z řešitelů nepřišel. *(Lenka Kopfová)*

[2] Viz *http://mks.mff.cuni.cz/archive/38/uvod2s.pdf*.

Úloha 6.

Pro která kladná reálná čísla b existuje posloupnost kladných reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_{n+2} = \sqrt{b \cdot a_{n+1} - a_n}$ pro všechna přirozená n?

(Kuba Löwit)

ŘEŠENÍ:

Pro $b > 1$ uvažme konstantní posloupnost $\{b-1\}_{n=1}^{\infty}$. Jelikož b je větší než jedna, tak jsou členy této posloupnosti kladná reálná čísla. Není těžké ověřit, že podmínka ze zadání je splněna:

$$b - 1 = \sqrt{b \cdot (b-1) - (b-1)}.$$

Pro $b \leq 1$ dokážeme sporem, že žádná taková posloupnost neexistuje. Aby byl člen posloupnosti a_{n+2} kladný reálný, musí být výraz pod odmocninou kladný, tedy pro každé přirozené n je splněna nerovnost $b \cdot a_{n+1} > a_n$. Z volby b vyplývá, že $a_{n+1} \geq b \cdot a_{n+1}$. Zkombinováním těchto dvou nerovností získáváme $a_{n+1} > a_n$, a tedy posloupnost je rostoucí.

Dále ukážeme, že posloupnost je shora omezená hodnotou 1. Pro spor předpokládejme, že existuje člen a_n, který je větší než 1. Díky již dokázané monotonii máme $a_{n+1} > 1$. Platí tedy

$$a_{n+2}^2 = b \cdot a_{n+1} - a_n < b \cdot a_{n+1} \leq a_{n+1} < a_{n+1}^2.$$

Odmocněním obdrženého vztahu $a_{n+2}^2 < a_{n+1}^2$ získáváme kýžený spor s tím, že naše posloupnost je rostoucí.

Použitím monotonie a předpokladu, že $b \leq 1$, dostáváme

$$a_1^2 < a_{n+2}^2 = b \cdot a_{n+1} - a_n \leq a_{n+1} - a_n.$$

Rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti je větší než fixní kladné číslo a_1^2. Z toho plyne, že posloupnost po konečně mnoha krocích přesáhne hodnotu 1, což je spor. Posloupnost splňující podmínku ze zadání tak pro $b \leq 1$ neexistuje.

POZNÁMKY:

S případem, kdy je b větší než jedna, si drtivá většina řešitelů poradila bez problémů (často vyzkoušením konstantní posloupnosti). V důkazu, že pro $b \leq 1$ taková posloupnost neexistuje, se postupy velmi lišily. Často řešitelé nahlédli, že kdyby taková posloupnost existovala, tak by bylo $a_{n+1} > a_n/b$. Z toho plyne, že posloupnost roste rychleji než geometrická posloupnost s počátečním členem a_1 a koeficientem $1/b \geq 1$, což pro $b < 1$ svědčí o její neomezenosti. Pak ukázali její omezenost shora a došli ke sporu. Někteří však bohužel však neošetřili případ, kdy $b = 1$ a argument s geometrickou posloupností neplatí. V takovém případě jsem uděloval 3 body. Několik řešitelů ve svých řešeních použilo pojem limity posloupnosti a někteří z nich i větu, že shora omezená rostoucí posloupnost musí mít limitu.

(Lucien Šíma)

Úloha 7.

Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n. Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $\frac{a_k}{b_k} = 2019$.

(Kuba Löwit)

ŘEŠENÍ:

Zaveďme posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ pro všechna přirozená n. Ze zadání je jasné, že c_n je posloupnost přirozených čísel. Naším cílem je dokázat, že existuje přirozené k takové, že $c_k = 2019$. Ukážeme postupně, že pro všechna přirozená n platí $c_{n+1} - c_n \leq 1$, že je tato posloupnost shora neomezená a že existuje přirozené ℓ, pro které $c_\ell = 1$. Když se nám povede tato tvrzení dokázat, budeme již vědět, že se v posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytují všechna přirozená čísla (a tedy i 2019), neboť se od jedničky dostane k libovolně velkým přirozeným číslům aniž by některé z nich vynechala.

Platí $a_{n+1} = a_n + b_n = c_n b_n + b_n = (c_n + 1)b_n$. Jelikož je b_{n+1} součin všech různých prvočísel, které dělí a_{n+1}, jistě platí $b_n \mid b_{n+1}$. Přičemž $b_n \neq b_{n+1}$ právě tehdy, když existuje prvočíslo p takové, že $p \mid c_n + 1$ a zároveň $p \nmid b_n$. Nyní můžeme spočítat

$$c_{n+1}b_{n+1} = a_{n+1} = (c_n + 1)b_n \leq (c_n + 1)b_{n+1},$$

z čehož po vydělení b_{n+1} vidíme, že $c_{n+1} \leq c_n + 1$, což je první z věcí, kterou jsme chtěli ukázat. Všimněme si také, že $c_{n+1} < c_n + 1$ právě tehdy, když je $c_n + 1$ dělitelné prvočíslem, které nedělí b_n.

Abychom ukázali, že je $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ shora neomezená, stačí ukázat, že pro všechna $C > c_1$ existuje k takové, že $c_k \geq C$.

Označme $\pi(C)$ počet prvočísel menších než nebo rovných C. Ukážeme, že pokud by posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nikdy nedosáhla hodnoty C, znamenalo by to, že nevzrostla maximálně $\pi(C)$-krát. Nevzrůst posloupnosti je vždy způsoben pouze existencí prvočísla, které dělí $c_k + 1$, ale nedělí b_k. Toto prvočíslo je jistě menší nebo rovno C, neboť $c_k + 1 \leq C$, a zároveň bude takto použito maximálně jednou, protože dělí b_{k+1} a tedy i všechny další členy posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Proto pokud by posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nikdy nedosáhla hodnoty C, musela by mít maximálně $C(\pi(C)+1)$ členů. Jelikož je ale nekonečná, hodnoty C určitě dosáhne.

Víme tedy již, že posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nabývá všech přirozených hodnot větších nebo rovných c_1. Zvolme nějaké prvočíslo p větší než c_1, které nedělí b_1. A nechť ℓ je nejmenší přirozené číslo takové, že $c_\ell = p - 1$. Aby prvočíslo p dělilo b_ℓ, muselo by dělit $c_k + 1$ pro nějaké $k < \ell$, což ale nemůže, neboť $c_k + 1 \leq c_\ell < p$ pro všechna taková k. Proto platí

$$c_{\ell+1} = \frac{a_{\ell+1}}{b_{\ell+1}} = \frac{a_\ell + b_\ell}{pb_\ell} = \frac{(p-1)b_\ell + b_\ell}{pb_\ell} = 1,$$

což je poslední věc, kterou jsme potřebovali dokázat.

Poznámky:
Většina řešitelů měla správné myšlenky, ale občas chyběly některé nutné části řešení. Nejčastější chybou bývalo špatné zdůvodnění toho, že v posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ se někdy vyskytne jednička. Třeba neuvědomení si, že tato posloupnost může někdy klesat i jinak než rovnou na jedničku. To se stane v případě, kdy $c_n + 1$ je dělitelné prvočíslem, které nedělí b_n, ale i nějakým prvočíslem, které b_n dělí. Za jinak správné řešení s podobnými chybami jsem dával nejčastěji 3 body.

(Filip Bialas)

Úloha 8.

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že $a_1 = 1$ a pro všechna přirozená n větší než 1 je a_n nejmenší přirozené číslo, které je různé od všech předchozích prvků posloupnosti a které je nesoudělné s jejich součtem. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje všechna přirozená čísla.

(Pavel Hudec)

Řešení:
Začněme tím, že si dokážeme několik pomocných tvrzení o nesoudělnosti určitých dvojic výrazů. Nechť $n \in \mathbb{N}$. V celém řešení budeme největšího společného dělitele čísel a, $b \in \mathbb{Z}$ značit (a, b).

(i) Čísla $8n^2+10n+4$ a $4n+5$ jsou nesoudělná. Tvrzení dokážeme pomocí Euklidova algoritmu, platí

$$(8n^2 + 10n + 4, 4n + 5) = (8n^2 + 10n + 4 - 2n(4n + 5), 4n + 5) = \\ = (4, 4n + 5) = 1.$$

(ii) Čísla $8n^2 + 14n + 9$ a $4n + 2$ jsou nesoudělná. Dokážeme podobně jako v předchozím případě, tedy

$$\begin{aligned}(8n^2 + 14n + 9, 4n + 2) &= (8n^2 + 14n + 9 - (2n + 2)(4n + 2), 4n + 2) = \\ &= (2n + 5, 4n + 2) = (2n + 5, -8) = 1.\end{aligned}$$

(iii) Čísla $8n^2 + 18n + 11$ a $4n + 4$ jsou nesoudělná,

$$\begin{aligned}(8n^2 + 18n + 11, 4n + 4) &= (8n^2 + 18n + 11 - (2n + 2)(4n + 4), 4n + 4) = \\ &= (2n + 3, 4n + 4) = (2n + 3, -2) = 1.\end{aligned}$$

(iv) Čísla $8n^2 + 22n + 15$ a $4n + 7$ jsou nesoudělná,

$$\begin{aligned}(8n^2 + 22n + 15, 4n + 7) &= (8n^2 + 22n + 15 - (2n + 2)(4n + 7), 4n + 7) = \\ &= (1, 4n + 7) = 1.\end{aligned}$$

Najděme několik nejmenších členů posloupnosti, snadno spočítáme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 3$, $a_5 = 7$ a $a_6 = 5$. Můžeme si všimnout, že prvních 6 členů obsahuje čísla od 1 do 7, ale chybí tam 6.

Teď použijeme matematickou indukci a dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ prvních $4n + 2$ členů posloupnosti obsahuje všechna čísla od 1 do $4n + 3$ kromě $4n + 2$. Předpokládejme platnost tohoto pro n a dokažme jej i pro $n + 1$.

Součet prvních $4n + 2$ členů posloupnosti je $\frac{(4n+3)(4n+4)}{2} - (4n + 2) = 8n^2 + 10n + 4$, což je sudé číslo. Nejmenší liché číslo, které v posloupnosti ještě není, je $4n + 5$. Jak jsme ukázali výše, $4n + 5$ je se součtem nesoudělné, a proto $a_{4n+3} = 4n + 5$.

Aktuální součet se zvýšil na $8n^2 + 14n + 9$, nejmenší nepoužité číslo je $4n + 2$ a je s $8n^2 + 14n + 9$ nesoudělné. Získáváme $a_{4n+4} = 4n + 2$.

Členy posloupnosti nyní dávají sumu $8n^2 + 18n + 11$ a dosud nejmenší nevyskytující se číslo $4n + 4$ je s ním nesoudělné, tudíž $a_{4n+5} = 4n + 4$.

Teď je součet $8n^2 + 22n + 15 = (2n + 3)(4n + 5)$ a nejmenší nepoužité číslo $4n + 6 = 2(2n + 3)$ je s ním zjevně soudělné. Další číslo, které v posloupnosti ještě není, je $4n + 7$ a to už se součtem nesoudělné je, takže $a_{4n+6} = 4n + 7$.

Tím je indukce dokončena a řešení hotovo, protože posloupnost nyní zřejmě obsahuje všechna přirozená čísla.

Poznámky:

Úloha se nakonec ukázala být jednodušší, než jsme očekávali, a dostali jsme poměrně velké množství správných řešení. Většina jich až na drobné změny postupovala stejně jako to vzorové. Našli se ovšem i řešitelé, kteří použili indukci podle počtu prvočísel v rozkladu každého čísla – nejprve ukázali, že posloupnost obsahuje všechna prvočísla a prvočíselné mocniny, potom čísla co jsou dělitelná dvěma různými prvočísly atd. *(Josef Minařík)*