Projektivní geometrie I

1. seriálová série Termín odeslání: 2. prosince 2019

Úloha 1. (5 bodů)

Mějme trojúhelník ABC s těžištěm G. Označme středy stran AB a AC postupně M a N. Dále mějme na straně BC body D a E, přičemž platí $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{|BC|}{3}$. Dále nechť K je průsečík přímek AD a BN a obdobně nechť L je průsečíkem přímek AE a CM. Dokažte, že A, G a průsečík přímek DL a EK leží na jedné přímce.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť K, L, M a N jsou po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD a DA. Označme X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AD a BC. Dále nechť P je průsečík přímek XL a YM. Obdobně definujme bod Q jako průsečík přímek XN a YK. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

Úloha 3. (5 bodů)

Nechť O je v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ průsečík uhlopříček. Osy úhlů AOB, BOC, COD, DOA protínají strany čtyřúhelníku AB, BC, CD, DA postupně v bodech M, N, P, Q. Dokažte, že přímky MQ, NP a BD se protínají v jednom bodě.

Projektivní geometrie I

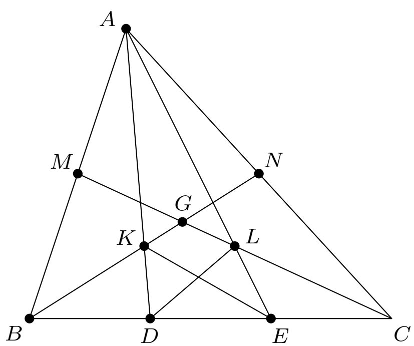
1. seriálová série — Vzorové řešení

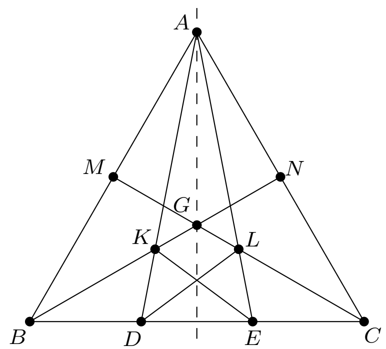
Úloha 1.

Mějme trojúhelník ABC s těžištěm G. Označme středy stran AB a AC postupně M a N. Dále mějme na straně BC body D a E, přičemž platí $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{|BC|}{3}$. Dále nechť K je průsečík přímek AD a BN a obdobně nechť L je průsečíkem přímek AE a CM. Dokažte, že A, G a průsečík přímek DL a EK leží na jedné přímce.

(Radek Olšák)

Řešení:
Ze seriálu víme, že libovolný trojúhelník umíme afinně zobrazit na rovnostranný, přičemž se nám zachovají přímky a poměry na nich. Pro rovnostranný trojúhelník je celá konfigurace symetrická podle přímky AG, proto se na ní přímky DL a EK zřejmě musí protínat. Protože A, G a průsečík leží na přímce po afinním zobrazení, musely ležet na přímce i před ním, neboť afinní zobrazení zachovávají přímky.





Poznámky:
Většina řešitelů postupovala víceméně stejně jako vzorové řešení. Našli se ale i řešitelé, kteří k důkazu využili Cevovu větu nebo úlohu řešili analyticky. *(Josef Minařík)*

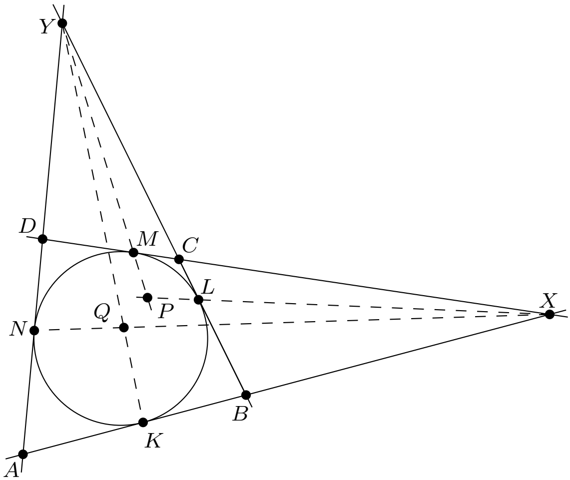
Úloha 2.

Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť K, L, M a N jsou po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD a DA. Označme X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AD a BC. Dále nechť P je průsečík přímek XL a YM. Obdobně definujme bod Q jako průsečík přímek XN a YK. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

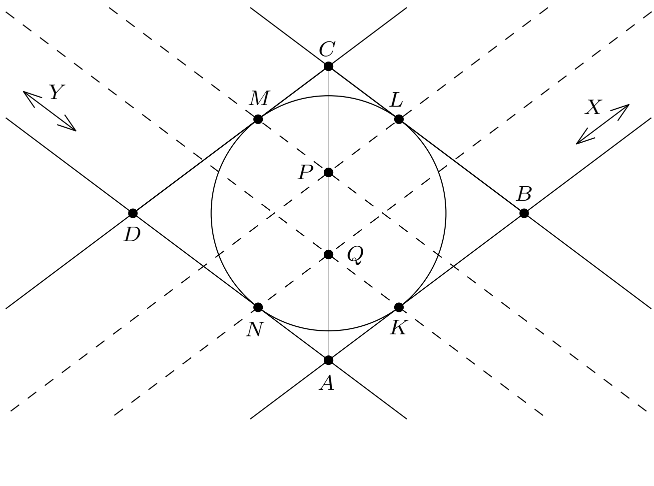
(Radek Olšák)

Řešení:

Označme p přímku XY. Nejprve ukážeme, že p neprotíná kružnici vepsanou $ABCD$. Aby přímka protínala kružnici vepsanou $ABCD$, musí protnout alespoň jednu z hran čtyřúhelníka $ABCD$. Ale průsečíky $p \cap AB = X$, $p \cap CD = X$, $p \cap AD = Y$ a $p \cap BC = Y$ leží vně úseček AB, CD, AD a BC. Takže p neprotíná kružnici vepsanou.



Proto můžeme uvážit kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici vepsanou $ABCD$. Tím se z $ABCD$ stane rovnoběžník s kružnicí vepsanou, což je kosočtverec. V něm jsou dvojice bodů (M, L), (N, K) a (X, Y) symetrické podle AC. Takže i dvojice přímek (XL, YM) a (XN, YK) jsou symetrické podle AC, neboli jejich průsečíky leží na AC. Což znamená, že A, P, Q, C leží na přímce.



Poznámky:

Většina došlých řešení se ubírala směrem toho vzorového. Rozhodl jsem se nestrhávat body za neodůvodnění, proč XY neprotíná kružnici vepsanou, protože jsme si přesně toto zobrazení v seriálu ukázali.

Někteří řešitelé se snažili úlohu řešit jen pomocí afinních zobrazení, to však kvůli kružnici v zadání nevedlo ke zdárnému konci. *(Radek Olšák)*

Úloha 3.

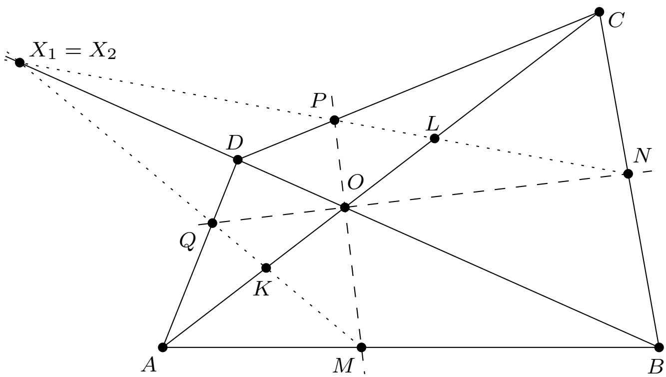
Nechť O je v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ průsečík uhlopříček. Osy úhlů AOB, BOC, COD, DOA protínají strany čtyřúhelníku AB, BC, CD, DA postupně v bodech M, N, P, Q. Dokažte, že přímky MQ, NP a BD se protínají v jednom bodě.

(Lenka Kopfová)

Řešení promítáním dvojpoměrů:

Označme $K = AC \cap MQ$ a $L = AC \cap NP$, dále buď $X_1 = BD \cap MQ$ a $X_2 = BD \cap NP$. Budeme chtít dokázat, že $X_1 = X_2$. Nejprve si uvědomme, že osou úhlů AOD a BOC je ta samá přímka a totéž platí pro osu úhlů AOB a COD. Navíc AOB a BOC jsou úhly vedlejší, a tudíž jejich osy svírají $90°$. Ze seriálového tvrzení *dvě ze tří* tak plyne, že přímky AO, MO, BO a NO tvoří harmonický svazek. Víme, že pokud harmonický svazek protneme nějakou přímkou, pak čtyři vzniklé průsečíky tvoří harmonickou čtveřici. Tedy platí, že $(M, K, Q, X_1) = -1$ a stejně tak $(N, L, P, X_2) = -1$. Z promítacího tvrzení platí

$$(M, K, Q, X_1) \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} (B, O, D, X_1) = -1,$$
$$(N, L, P, X_2) \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} (B, O, D, X_2) = -1.$$



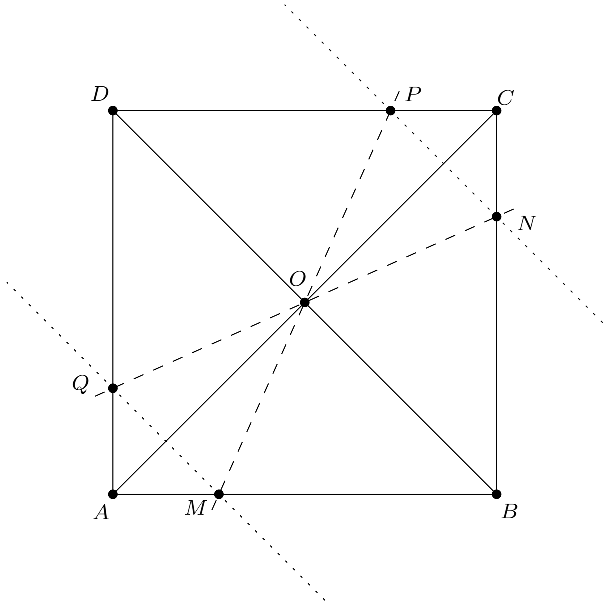
Dohromady dostáváme

$$(B, O, D, X_1) = (B, O, D, X_2) = -1.$$

Z jednoznačnosti dvojpoměrů na přímce už plyne $X_1 = X_2$, což jsme chtěli dokázat.

Řešení zkosením do čtverce:

Opět si nejprve všimneme, že přímky AO, MO, BO a NO tvoří harmonický svazek. Dále uvažujme kolineaci takovou, která nám čtyřúhelník $ABCD$ zobrazí na čtverec. Víme, že kolineace zachovává dvojpoměry, tedy i po kolineaci přímky AO, MO, BO a NO tvoří harmonický svazek. Ve čtverci ale platí, že úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Z tvrzení *dvě ze tří* v novém obrázku tak vyplývá, že AO a BO jsou osami úhlů, které svírají přímky MO a NO. Platí tedy, že nová konfigurace je celá osově souměrná podle AC, z čehož už plyne $MQ \parallel BD \parallel NP$. Dané přímky se tedy protínají v jednom (nevlastním) bodě, z čehož plyne, že se musely protínat i v původním čtyřúhelníku.



Poznámky:
Přibližně polovina došlých řešení byla správně a vesměs se ubírala jedním ze dvou vzorových řešení. Našly se ale i výjimky, které přišly na řešení pomocí poměrů s použitím Menelaovy věty a angle bisector theoremu. Většina řešitelů přišla na harmonický svazek, za což jsem udělovala dva body. Poté ale častým kamenem úrazu bylo použití nějaké kolineace a neuvědomění si, že kolineace nezachovává úhly, takže osy úhlů se po kolineaci nezobrazí nutně zase na osy úhlů. *(Lenka Kopfová)*