Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!

Jako opožděný vánoční dárek tu pro Tebe máme druhé komentáře! Nalezneš v nich řešení druhé a třetí podzimní série a prvního dílu seriálu.

K tomu Ti posíláme zadání první jarní série a další díl seriálu o projektivní geometrii, který se opět pyšní spoustou krásných obrázků. Pokud jsi první díl seriálu vynechal a myslíš si, že už nemá cenu se do něj pouštět, věz, že tomu tak není! Za seriálové úlohy ještě můžeš získat celých 30 bodů a to určitě stojí i za zpětné dostudování prvního dílu.

Důležité je, že se nyní nacházíme uprostřed 39. ročníku, takže pro účast na podzimním soustředění nyní začínáš s „čistým bodovým štítem“. A to je prima šance pro to se dravě vrhnout do druhého kola dobývání výsledkové listiny.

Na soustředění sice tradičně jede jen hrstka řešitelů, ale naštěstí to není jediná šance, kde se PraSátka mohou setkat. Sleduj proto chat na našich stránkách, kde se píše o chystaných akcích. Těšíme se na setkání s Tebou v tomto roce, ať už na sousu, Náboji nebo při jiné příležitosti.

Radostné zimní radovánky a dobrodružné řešení úloh za všechny organizátory přeje

Zuzka Svobodová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Seriál – Projektivní geometrie II. – Naprosto nesouvisející diagramy
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Náboj

Mezinárodní týmová matematická soutěž Náboj se příští rok uskuteční již 13. března v pátek v rekordních 10 různých zemích a dohromady 17 evropských městech. Podrobnosti najdeš na stránkách Náboje[1], důležité pro Tebe ale je, že přihlašování se spouští již za dva měsíce, v pondělí 10. února v pravé poledne a registrace končí 6. března. Rozhodně je tedy na čase začít se poohlížet po nějakém týmu, protože plno bývá rychle a zájem veliký. Vždyť kolikrát se koná takováto mimořádná událost, při které řeší zároveň a s nadšením několik set lidí matematické úlohy. A když už se jednou za rok tato příležitost naskytne, tak tam nemůžeš chybět!

Soustředění

Pro čtyřiadvacet nejlepších z podzimní části letošního ročníku (která končí anglickou sérií) uspořádáme začátkem května soustředění. Místo ještě není známé, ale určitě se máte na co těšit a stojí za to o místa na soustředění zabojovat.

[1] *https://math.naboj.org/*

Posloupnosti

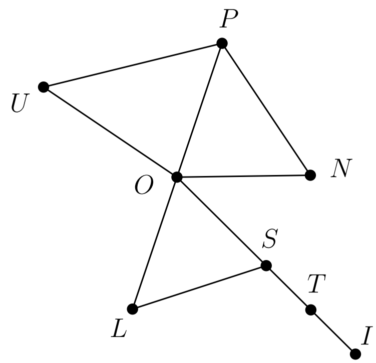
2. podzimní série Vzorové řešení

Úloha 1.

Hedvika napsala na tabuli slovo POSLOUPNOSTI. Poté každé písmenko nahradila číslicí od 1 *do* 9*, přičemž stejná písmenka nahradila stejnými číslicemi a různá různými. Mohlo se stát, že po nahrazení byl rozdíl každých dvou sousedních číslic alespoň tři?*

(Marian Poljak)

Řešení:
Slovo POSLOUPNOSTI obsahuje osm různých písmen. Pomocí následujícího diagramu si můžeme nakreslit, které písmeno ve slově sousedí se kterým. Písmena spojená čarou musí mít dle zadání rozdíl alespoň tři. Dokážeme, že písmenům umíme přiřadit vhodné číslice tak, aby to platilo.



Můžeme si všimnout, že O sousedí s pěti různými písmeny – P, S, L, U, N. Všechna tato písmena musí mít různé hodnoty. To nám ihned omezuje hodnoty O na $\{1, 2, 8, 9\}$. Kdyby totiž nabývalo O hodnoty mimo tuto množinu, už by na jeho sousedy nezbyly číslice, které by od něj byly vzdáleny o tři.

Můžeme učinit užitečné pozorování – pokud pro každé písmeno jeho hodnotu x nahradíme hodnotou $10 - x$, platnost úlohy se nezmění – sousední písmena budou mít stále ten stejný rozdíl. Proto se můžeme bez újmy na obecnosti zaměřit pouze na $O \in \{1, 2\}$

Pokud $O = 2$, musí písmena P, S, L, U, N nutně nabývat různých hodnot z množiny číslic $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. P vedle sebe potřebuje ještě U a N, se kterými musí mít rozdíl alespoň tři. P tedy nesmí být nic z $\{6, 7, 8\}$. Pro $P = 5$ musí být $\{U, N\} = \{8, 9\}$, pro $P = 9$ musí být $\{U, N\} = \{5, 6\}$. V obou z těchto případů zbudou na písmena S a L číslice, jejichž rozdíl je jedna – pro $O = 2$ tedy nelze najít řešení.

Musí tedy nutně platit $O = 1$. Nyní jsme u P1SL1UPN1STI a už není těžké úlohu dokončit téměř libovolně – můžeme např. nejdříve zvolit $P = 4$ a $S = 5$, jelikož obě písmena sousedí se třemi jinými. Pak můžeme pokračovat např. $U = 7$, $N = 8$, $L = 9$, čímž zajistíme platnost podmínky v zadání v téměř celém slově – písmena T, I jsme si nechali nakonec, můžeme dosadit např. $T = 2$ a $I = 6$.

Dostali jsme POSLOUPNOSTI = 415917481526, což skutečně vyhovuje zadání. Hedvice se to tedy podařit mohlo.

Poznámky:
Úlohu splnil každý, kdo (i bez vysvětlení) uvedl vyhovující příklad, jak se to Hedvice mohlo podařit. K úspěšnému vyřešení stačila dobrá intuice, že písmenu O chceme přiřadit nějakou extrémní hodnotu, tedy 1 nebo 9, aby co nejméně omezila zbytek. Šlo udělat další zajímavá pozorování – např. písmena U a N mají stejné množiny sousedů, hodnoty těchto písmen lze tedy v každém řešení prohodit. Jenom tak pro zajímavost – vyhovujících ohodnocení je celkově 112. Za graf v tomto vzorovém řešení děkuji *Denise Hanuškové*! :) *(Marian Poljak)*

Úloha 2.

Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$, pro kterou platí, že pokud je a_n dělitelné třemi, tak $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$. V opačném případě je $a_{n+1} = a_n - 1$. Dále víme, že a_1 je čtyřciferné číslo a $a_8 = 1$. Najděte všechna možná a_1.

(Terka Poláková)

Odhadovací řešení:
Víme, že platí $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$, nebo $a_{n+1} = a_n - 1$ a $a_8 = 1$. Jelikož je zřejmě $a_n - 1$ větší než $\frac{a_n}{3}$, platí už nutně $a_{n+1} \geq \frac{a_n}{3}$. Nejmenší čtyřciferné číslo je 1000, díky tomu můžeme odhadnout ostatní členy posloupnosti.

$$
\begin{aligned}
a_2 &\geq \frac{a_1}{3} \geq \frac{1000}{3} > 333,\\
a_3 &\geq \frac{a_2}{3} > \frac{333}{3} = 111,\\
a_4 &\geq \frac{a_3}{3} > \frac{111}{3} = 37,\\
a_5 &\geq \frac{a_4}{3} > \frac{37}{3} > 12,\\
a_6 &\geq \frac{a_5}{3} > \frac{12}{3} = 4,
\end{aligned}
$$

Nyní známe minimální hodnotu každého členu posloupnosti. Budeme postupovat od známého a_8 a zkoušet všechny možné hodnoty předchozích členů. Kdykoliv se nám objeví jako jedna z možných hodnot číslo, které je menší než tato minimální hodnota, tak dané číslo škrtneme a již z něj nepočítáme další členy posloupnosti. Takto dopočítáme všechny možné hodnoty jednotlivých členů posloupnosti včetně a_1.

$$
\begin{aligned}
a_7 &\in \{2, 3\},\\
a_6 &\in \{\cancel{3}, 6, \cancel{4}, 9\},\\
a_5 &\in \{\cancel{7}, 18, \cancel{10}, 27\},\\
a_4 &\in \{\cancel{19}, 54, \cancel{28}, 81\},\\
a_3 &\in \{\cancel{55}, 162, \cancel{82}, 243\},\\
a_2 &\in \{\cancel{163}, 486, \cancel{244}, 729\},\\
a_1 &\in \{\cancel{487}, 1458, \cancel{730}, 2187\}.
\end{aligned}
$$

Tedy jediná dvě možná řešení jsou čísla 1458 a 2187.

Řešení hledáním přesného tvaru:
Rozebereme možná řešení podle počtu přičtení jedničky v posloupnosti.

(i) Pokud jedničku nepřičítáme ani jednou, získáme největší možné a_1. To je $a_1 = 3^7 = 2187$.

(ii) Nechť nahradíme právě jedno násobení třemi přičtením jedničky. Označme k index posloupnosti takový, že $a_k = a_{k+1} + 1$. Potom spočítáme postupně

$$a_{k+1} = (3^{8-(k+1)}) = 3^{7-k}, \qquad a_k = 3^{7-k} + 1, \qquad a_1 = (3^{7-k} + 1) \cdot 3^{k-1}.$$

Roznásobíme si závorku:

$$a_1 = (3^{7-k} + 1) \cdot 3^{k-1} = 3^{7-k+k-1} + 3^{k-1} = 3^6 + 3^{k-1}.$$

Tedy čím větší je k, tím větší bude a_1. Pro $k = 7$ platí $a_1 = 3^6 + 3^6 = 2 \cdot 3^6 = 1458$. Pro $k = 6$ je

$$a_6 = 3^6 + 3^5 = 729 + 243 = 972 < 1000.$$

Tedy v tomto případě je jediné řešení $a_1 = 1458$, ostatní a_1 mohou být maximálně trojciferná.

(iii) Pokud nahradíme více než jednu z operací násobení 3 přičítáním 1, tak existuje index posloupnosti k takový, že je různý od 7 a zároveň $a_k = a_{k+1} + 1$. Nyní opět využijeme, že pro člen naší posloupnosti x platí $3 \cdot x > x + 1$, neboli vynásobením třemi dostaneme vždy vyšší číslo než přičtením jedničky. Pak tedy dokážeme a_1 zvětšit tak, že na pozicích různých od k vždy provedeme vynásobení třemi místo případného přičtení jedničky. Jelikož je k různé od sedmi, museli jsme díky předchozímu bodu zvětšit a_1 na nejvýše trojciferné číslo. To znamená, že v tomto případě nemáme žádné vyhovující a_1.

Tedy jediná dvě možná řešení jsou čísla 1458 a 2187.

Poznámky:
Většina řešení byla povedená a různorodá. Úloha měla více způsobů, jak se řešitelé mohli dobrat řešení. Kromě již výše zmíněných se našli řešitelé, co úlohu řešili pomocí funkcí či pomocí trojkové soustavy. *(Terka Poláková)*

Úloha 3.

Dokažte, že pokud rostoucí aritmetická posloupnost celých čísel obsahuje druhou mocninu přirozeného čísla, obsahuje jich nekonečně mnoho.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme d diferenci uvažované posloupnosti. Protože se jedná o rostoucí posloupnost celých čísel, je d kladné a celé.

Nechť $a_n = k^2$. Potom pro každé kladné celé ℓ je

$$a_{n+2k\ell+\ell^2 d} = a_n + \left(2k\ell + \ell^2 d\right) d = k^2 + 2k\ell d + \ell^2 d^2 = (k + \ell d)^2.$$

Člen s tímto indexem můžeme určitě uvažovat, neboť d, k a ℓ jsou kladná celá čísla. Tím v naší posloupnosti dostáváme nekonečně mnoho druhých mocnin.

Poznámky:
Většina řešení byla správně. *(Rado van Švarc)*

Úloha 4.

Uvažujme všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nenulových reálných čísel, ve kterých $a_1 = 1$ a které pro všechna přirozená n splňují

$$a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2.$$

Kolika různých hodnot může nabývat a_{2019}?

(Martin Raška)

Řešení:

Pro přirozené k si zadefinujme *trojúhelníkové číslo* T_k jako součet prvních k přirozených čísel neboli $1 + 2 + \cdots + k$.[2] T_0 buď definováno jako prázdný součet čili nula. Můžeme si všimnout, že $a_1 = T_1$ a že všechna T_k jsou navzájem různá. Dále dokážeme, že pokud $a_n = T_k$, pak jsou možnými hodnotami a_{n+1} právě T_{k+1} a T_{k-1}. Rovnice v zadání je vůči proměnné a_{n+1} kvadratická, tedy existují nejvýše dvě možné hodnoty a_{n+1}. Stejně tak platí, že je tato rovnice symetrická vůči proměnným a_n a a_{n+1}. Stačí tedy dokázat, že dvě po sobě jdoucí trojúhelníková čísla tento vztah splňují, a pak už nám sousední trojúhelníková čísla k T_k budou určovat množinu řešení. Skutečně platí

$$T_k + T_{k+1} = \Big(0 + 1 + \cdots + (k-1) + k\Big) + \Big((k+1) + k + \cdots + 2 + 1\Big) =$$
$$= \Big(0 + (k+1)\Big) + \Big(1 + k\Big) + \cdots + \Big((k-1) + 2\Big) + \Big(k + 1\Big) = (k+1)^2 = (T_{k+1} - T_k)^2.$$

Právě jsme dokázali, že pokud $a_n = T_k$, tak je a_{n+1} rovno T_{k+1}, nebo T_{k-1}. Jedinou výjimkou je případ $k = 1$. Pak $T_{k-1} = T_0 = 0$, což je ze zadání zakázáno. Posloupnost splňující zadání si tedy můžeme představit tak, že začínáme T_1 a v každém kroku přeskočíme na sousední trojúhelníkové číslo, s tím, že nikdy nemůžeme skočit na T_0. Vidíme, že při každém skoku se změní parita indexu u trojúhelníkového čísla – v lichých pozicích v posloupnosti tak vždy budeme na lichém trojúhelníkovém čísle (myšleno ve významu T_k pro liché k). Zároveň ve 2018 skocích vystoupáme nejvýše na T_{2019}. Souhrnem může a_{2019} být pouze liché trojúhelníkové číslo mezi T_1 a T_{2019} – těch je právě 1010. Zbývá ukázat, že každého takového T_k lze dosáhnout. Jako příklad posloupnosti se nabízí vystoupat v prvních $k - 1$ krocích na T_k a ve zbytku posloupnosti skákat mezi T_{k+1} a T_k.

Člen a_{2019} tedy může nabývat právě 1010 různých hodnot.

Poznámky:

Asi polovina řešitelů si všimla, že čísla v posloupnostech vycházejí takto pěkně, a s tímto pozorováním úlohu typicky bez problému dořešila. K řešení úlohy to nicméně nutné nebylo a sešlo se i hodně správných řešení, která se pouze dívala na strukturu posloupností a z ní vyvozovala stejné závěry. U těchto řešení bylo nicméně třeba správně odargumentovat více věcí a zbavit se možných problémů, které nastávají, když člověk nemá členy explicitně vyjádřené. Dalším nešvarem byl velký počet řešení, která si pouze všimla, jak se dané posloupnosti budou chovat, a pak bez dostatečných důkazů poslali výsledek. *(Martin Raška)*

Úloha 5.

Radeček si napsal na papír všech 2^{2019} různých posloupností plus a mínus jedniček o délce 2019. Poté v každé z nich sečetl všechny její prvky a tento součet umocnil na druhou, čímž dostal 2^{2019} výsledků. Jaký je jejich průměr?

(Marian Poljak)

[2] Tato aritmetická řada jde dobře sečíst – platí $T_k = \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$.

Řešení indukcí:

Představme si, že bychom měli všechny posloupnosti plus a mínus jedniček délky n. Prvky každé posloupnosti sečteme a umocníme na druhou. Nazvěme *plusmínus průměrem* aritmetický průměr daných druhých mocnin a označme ho P_n. Zadání se nás ptá na P_{2019}. Indukcí dokážeme, že $P_n = n$.

(i) **Indukční předpoklad:** Ověříme indukční předpoklad pro $n = 1$. Dané posloupnosti délky jedna jsou pouze dvě a to $+1$ a -1, tedy jejich plusmínus průměr je $\frac{1^2+(-1)^2}{2} = 1$.

(ii) **Indukční krok:** Mějme všechny posloupnosti plus a mínus jedniček délky $n+1$ a rozdělme je do disjunktních dvojic tak, že vždy popárujeme dvě posloupnosti, které mají prvních n čísel stejných (liší se tedy pouze posledním členem, který je pro jednu posloupnost roven plus jedné a pro druhou mínus jedné). Označme x_i součet prvních n členů v dvojici i. Pak součet hodnot těchto dvou posloupností umocněných na druhou je $(x_i + 1)^2 + (x_i - 1)^2 = 2x_i^2 + 2$. Plusmínus průměr všech 2^n posloupností je tedy roven:

$$\frac{(2x_1^2 + 2) + (2x_2^2 + 2) + \cdots + (2x_{2^n}^2 + 2)}{2^{n+1}} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2^n}^2}{2^n} + 1 = n + 1.$$

V posledním kroku jsme využili indukční předpoklad, že plusmínus průměr všech posloupností délky n je roven n a tím je indukční krok hotov. Pro $n = 2019$ je pak $P_{2019} = 2019$.

Řešení počítáním:

Pokud máme posloupnost, ve které se vyskytuje i mínus jedniček, tak součet takovéto posloupnosti je $n - 2i$. Zároveň počet posloupností, které obsahují právě i mínus jedniček, je stejně jako počet způsobů, kolika můžeme vybrat i prvků z n prvků, tedy $\binom{n}{i}$. Daný průměr tak můžeme vyjádřit jako

$$\frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^2\right) = \frac{1}{2^n}\left(n^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - 4n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i + 4\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2\right).$$

Dále použijeme buď známé vzorce, nebo si je odvodíme. Dokážeme, že:

(i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$

Tato rovnost počítá počet podmnožin n-prvkové množiny. Počet podmnožin velikosti i je $\binom{n}{i}$, pokud toto sečteme přes všechna i, dostaneme požadovaný počet podmnožin. Obdobně pravá strana počítá to samé, jen z jiného úhlu pohledu. Pro každý prvek si můžeme vždy zvolit dvě možnosti – buď ho do dané podmnožiny přidáme, anebo ne. Přes všechny prvky je pak počet podmnožin roven 2^n, tedy pravé straně.

(ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i = n\cdot 2^{n-1}$

Představme si, že chceme vybrat z n-prvkové množiny lidí nějaký „tým“ lidí a zvolit jednoho jejich kapitána. To můžeme udělat dvěma způsoby. Buď nejprve vybereme danou podmnožinu lidí – tým s i lidmi a z nich pak i způsoby můžeme vybrat jejich kapitána (to znázorňuje levá strana). Nebo můžeme nejdříve vybrat kapitána (n způsoby) a pak se pro každého ze zbylých $n - 1$ lidí rozhodnout, zda je do týmu vybereme nebo ne (to můžeme udělat 2^{n-1} způsoby), což nám dá pravou stranu.

(iii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2 = n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}$

Představa bude podobná jako v předchozím případě, jen teď kromě kapitána chceme také vybírat předsedu týmu, přičemž předsedou může být i kapitán. Buď zase nejprve vybereme tým o i lidech a poté z nich i způsoby vybereme kapitána a opět i způsoby vybereme předsedu, což udává levá strana. Nebo rozlišíme dva případy podle toho, zda je předseda zároveň kapitánem či nikoliv. Pokud je předseda a kapitán jiný člověk, tak můžeme n způsoby vybrat kapitána, poté $n - 1$ způsoby vybrat předsedu a poté se pro každého ze zbylých $n-2$ lidí rozhodnout, zda je v týmu chceme nebo ne. Nebo je předseda a kapitán tentýž člověk a poté stačí n způsoby vybrat člověka, který bude jak kapitán tak předseda a pak se pro každého z $n-1$ lidí rozhodnout, zda v týmu budou. Sečtením těchto dvou hodnot získáme pravou stranu rovnice.

Dokázané rovnosti nyní můžeme použít k úpravě výrazu, který jsme získali dříve:

$$\frac{1}{2^n}\left(n^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - 4n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i + 4\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2^n}\Big(n^2\cdot 2^n - 4n\cdot n\cdot 2^{n-1} + 4(n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1})\Big) =$$
$$= n^2 - 2n^2 + n^2 - n + 2n = n.$$

Pro $n = 2019$ tak hodnota daného výrazu skutečně vyjde 2019.

Řešení pravděpodobnostním magic trikem:
Mějme některou z daných 2^{2019} posloupností plus a mínus jedniček. Její prvky označme postupně $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$. Rozmysleme si, jak vypadá součet prvků této posloupnosti umocněný na druhou:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019})^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2019}^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_{2018}x_{2019}) =$$
$$= 2019 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_{2018}x_{2019}).$$

Poslední úprava platí, protože každé z čísel x_1 až x_{2019} je buď plus nebo mínus jednička, tedy na druhou je vždy rovno jedné. Nyní se podívejme na členy tvaru x_ix_j. Pokud vybereme libovolné x_i a x_j, pak obě jsou s poloviční pravděpodobností rovny plus jedné a s poloviční pravděpodobností rovny mínus jedné. Uvědomme si navíc, že dané dvě pravděpodobnosti jsou na sobě nezávislé. Platí tedy, že dohromady je pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že mají tyto dvě čísla stejné znaménko (tedy součin bude 1) a stejně tak mají pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že mají různé znaménko (tedy součin bude -1). Průměrná hodnota x_ix_j je tedy rovna 0. (Zde využíváme linearitu střední hodnoty. Zdá se to intuitivní, ale pokud by ses chtěl dozvědět více nebo podívat na důkaz, najdeš ho v textu druhého dílu loňského seriálu o pravděpodobnosti[3].) Takže druhá mocnina součtu členů jedné z posloupností bude v průměru 2019. A důkaz je hotov.

Poznámky:
Většina došlých řešení postupovala podobně jako v tom vzorovém, buď počítáním, nebo indukcí, s četností přibližně půl na půl. Za dvě řešení, která postupovala s využitím pravděpodobnostního triku, jsem udělila plus i. Poměrně dost řešitelů přišlo na vyjádření daného průměru sumou jako v počítacím řešení, jenže pak daný výraz vyčíslili za pomoci počítače (typicky s využitím programu Wolfram alpha). Takovým přístupem sice dospěli ke správnému řešení, ale vzhledem k tomu, že nikdo pořádně netuší, jak Wolfram uvnitř vlastně funguje a jak tyto věci počítá, jsem za tato řešení strhávala jeden bod a udělovala mínus i. Obecně v řešeních použití počítače vidíme dost neradi. Je samozřejmě v pořádku použít počítač k tomu, aby člověk například zjistil, jaký daný výsledek je a úloha se mu pak řešila snáz. Měl by ale být schopen zdůvodnit správnost svého řešení i bez něj. Úloha se dala také nahlédnout, pokud si člověk uvědomil, že daný výraz (plusmínus průměr) je vlastně rozptyl náhodné veličiny odpovídající dvojnásobku počtu panen při hodu 2019-ti mincemi. Na to ale bohužel nikdo z řešitelů nepřišel. *(Lenka Kopfová)*

[3] Viz *http://prase.cz/archive/38/uvod2s.pdf*.

Úloha 6.

Pro která kladná reálná čísla b existuje posloupnost kladných reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_{n+2} = \sqrt{b \cdot a_{n+1} - a_n}$ pro všechna přirozená n?

(Kuba Löwit)

Řešení:
Pro $b > 1$ uvažme konstantní posloupnost $\{b-1\}_{n=1}^{\infty}$. Jelikož b je větší než jedna, tak jsou členy této posloupnosti kladná reálná čísla. Není těžké ověřit, že podmínka ze zadání je splněna:

$$b - 1 = \sqrt{b \cdot (b-1) - (b-1)}.$$

Pro $b \leq 1$ dokážeme sporem, že žádná taková posloupnost neexistuje. Aby byl člen posloupnosti a_{n+2} kladný reálný, musí být výraz pod odmocninou kladný, tedy pro každé přirozené n je splněna nerovnost $b \cdot a_{n+1} > a_n$. Z volby b vyplývá, že $a_{n+1} \geq b \cdot a_{n+1}$. Zkombinováním těchto dvou nerovností získáváme $a_{n+1} > a_n$, a tedy posloupnost je rostoucí.

Dále ukážeme, že posloupnost je shora omezená hodnotou 1. Pro spor předpokládejme, že existuje člen a_n, který je větší než 1. Díky již dokázané monotonii máme $a_{n+1} > 1$. Platí tedy

$$a_{n+2}^2 = b \cdot a_{n+1} - a_n < b \cdot a_{n+1} \leq a_{n+1} < a_{n+1}^2.$$

Odmocněním obdrženého vztahu $a_{n+2}^2 < a_{n+1}^2$ získáváme kýžený spor s tím, že naše posloupnost je rostoucí.

Použitím monotonie a předpokladu, že $b \leq 1$, dostáváme

$$a_1^2 < a_{n+2}^2 = b \cdot a_{n+1} - a_n \leq a_{n+1} - a_n.$$

Rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti je větší než fixní kladné číslo a_1^2. Z toho plyne, že posloupnost po konečně mnoha krocích přesáhne hodnotu 1, což je spor. Posloupnost splňující podmínku ze zadání tak pro $b \leq 1$ neexistuje.

Poznámky:
S případem, kdy je b větší než jedna, si drtivá většina řešitelů poradila bez problémů (často vyzkoušením konstantní posloupnosti). V důkazu, že pro $b \leq 1$ taková posloupnost neexistuje, se postupy velmi lišily. Často řešitelé nahlédli, že kdyby taková posloupnost existovala, tak by bylo $a_{n+1} > a_n/b$. Z toho plyne, že posloupnost roste rychleji než geometrická posloupnost s počátečním členem a_1 a koeficientem $1/b \geq 1$, což pro $b < 1$ svědčí o její neomezenosti. Pak ukázali její omezenost shora a došli ke sporu. Někteří však bohužel však neošetřili případ, kdy $b = 1$ a argument s geometrickou posloupností neplatí. V takovém případě jsem uděloval 3 body. Několik řešitelů ve svých řešeních použilo pojem limity posloupnosti a někteří z nich i větu, že shora omezená rostoucí posloupnost musí mít limitu. *(Lucien Šíma)*

Úloha 7.

Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n. Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $\frac{a_k}{b_k} = 2019$.

(Kuba Löwit)

Řešení:
Zaveďme posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ pro všechna přirozená n. Ze zadání je jasné, že c_n je posloupnost přirozených čísel. Naším cílem je dokázat, že existuje přirozené k takové, že $c_k = 2019$. Ukážeme postupně, že pro všechna přirozená n platí $c_{n+1} - c_n \leq 1$, že je tato posloupnost shora neomezená a že existuje přirozené ℓ, pro které $c_\ell = 1$. Když se nám povede tato tvrzení dokázat, budeme již vědět, že se v posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytují všechna přirozená čísla

(a tedy i 2019), neboť se od jedničky dostane k libovolně velkým přirozeným číslům aniž by některé z nich vynechala.

Platí $a_{n+1} = a_n + b_n = c_n b_n + b_n = (c_n + 1)b_n$. Jelikož je b_{n+1} součin všech různých prvočísel, které dělí a_{n+1}, jistě platí $b_n \mid b_{n+1}$. Přičemž $b_n \neq b_{n+1}$ právě tehdy, když existuje prvočíslo p takové, že $p \mid c_n + 1$ a zároveň $p \nmid b_n$. Nyní můžeme spočítat

$$c_{n+1}b_{n+1} = a_{n+1} = (c_n + 1)b_n \leq (c_n + 1)b_{n+1},$$

z čehož po vydělení b_{n+1} vidíme, že $c_{n+1} \leq c_n + 1$, což je první z věcí, kterou jsme chtěli ukázat. Všimněme si také, že $c_{n+1} < c_n + 1$ právě tehdy, když je $c_n + 1$ dělitelné prvočíslem, které nedělí b_n.

Abychom ukázali, že je $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ shora neomezená, stačí ukázat, že pro všechna $C > c_1$ existuje k takové, že $c_k \geq C$.

Označme $\pi(C)$ počet prvočísel menších než nebo rovných C. Ukážeme, že pokud by posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nikdy nedosáhla hodnoty C, znamenalo by to, že nevzrostla maximálně $\pi(C)$-krát. Nevzrůst posloupnosti je vždy způsoben pouze existencí prvočísla, které dělí $c_k + 1$, ale nedělí b_k. Toto prvočíslo je jistě menší nebo rovno C, neboť $c_k + 1 \leq C$, a zároveň bude takto použito maximálně jednou, protože dělí b_{k+1} a tedy i všechny další členy posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Proto pokud by posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nikdy nedosáhla hodnoty C, musela by mít maximálně $C(\pi(C)+1)$ členů. Jelikož je ale nekonečná, hodnoty C určitě dosáhne.

Víme tedy již, že posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nabývá všech přirozených hodnot větších nebo rovných c_1. Zvolme nějaké prvočíslo p větší než c_1, které nedělí b_1. A nechť ℓ je nejmenší přirozené číslo takové, že $c_\ell = p - 1$. Aby prvočíslo p dělilo b_ℓ, muselo by dělit $c_k + 1$ pro nějaké $k < \ell$, což ale nemůže, neboť $c_k + 1 \leq c_\ell < p$ pro všechna taková k. Proto platí

$$c_{\ell+1} = \frac{a_{\ell+1}}{b_{\ell+1}} = \frac{a_\ell + b_\ell}{pb_\ell} = \frac{(p-1)b_\ell + b_\ell}{pb_\ell} = 1,$$

což je poslední věc, kterou jsme potřebovali dokázat.

Poznámky:
Většina řešitelů měla správné myšlenky, ale občas chyběly některé nutné části řešení. Nejčastější chybou bývalo špatné zdůvodnění toho, že v posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ se někdy vyskytne jednička. Třeba neuvědomění si, že tato posloupnost může někdy klesat i jinak než rovnou na jedničku. To se stane v případě, kdy $c_n + 1$ je dělitelné prvočíslem, které nedělí b_n, ale i nějakým prvočíslem, které b_n dělí. Za jinak správné řešení s podobnými chybami jsem dával nejčastěji 3 body.

(Filip Bialas)

Úloha 8.

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že $a_1 = 1$ a pro všechna přirozená n větší než 1 je a_n nejmenší přirozené číslo, které je různé od všech předchozích prvků posloupnosti a které je nesoudělné s jejich součtem. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje všechna přirozená čísla.

(Pavel Hudec)

Řešení:
Začněme tím, že si dokážeme několik pomocných tvrzení o nesoudělnosti určitých dvojic výrazů. Nechť $n \in \mathbb{N}$. V celém řešení budeme největšího společného dělitele čísel $a, b \in \mathbb{Z}$ značit (a, b).

(i) Čísla $8n^2+10n+4$ a $4n+5$ jsou nesoudělná. Tvrzení dokážeme pomocí Euklidova algoritmu, platí

$$(8n^2 + 10n + 4, 4n + 5) = (8n^2 + 10n + 4 - 2n(4n + 5), 4n + 5) =$$
$$= (4, 4n + 5) = 1.$$

(ii) Čísla $8n^2 + 14n + 9$ a $4n + 2$ jsou nesoudělná. Dokážeme podobně jako v předchozím případě, tedy

$$\begin{aligned}(8n^2 + 14n + 9, 4n + 2) &= (8n^2 + 14n + 9 - (2n + 2)(4n + 2), 4n + 2) = \\ &= (2n + 5, 4n + 2) = (2n + 5, -8) = 1.\end{aligned}$$

(iii) Čísla $8n^2 + 18n + 11$ a $4n + 4$ jsou nesoudělná,

$$\begin{aligned}(8n^2 + 18n + 11, 4n + 4) &= (8n^2 + 18n + 11 - (2n + 2)(4n + 4), 4n + 4) = \\ &= (2n + 3, 4n + 4) = (2n + 3, -2) = 1.\end{aligned}$$

(iv) Čísla $8n^2 + 22n + 15$ a $4n + 7$ jsou nesoudělná,

$$\begin{aligned}(8n^2 + 22n + 15, 4n + 7) &= (8n^2 + 22n + 15 - (2n + 2)(4n + 7), 4n + 7) = \\ &= (1, 4n + 7) = 1.\end{aligned}$$

Najděme několik nejmenších členů posloupnosti, snadno spočítáme $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 3$, $a_5 = 7$ a $a_6 = 5$. Můžeme si všimnout, že prvních 6 členů obsahuje čísla od 1 do 7, ale chybí tam 6.

Teď použijeme matematickou indukci a dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ prvních $4n + 2$ členů posloupnosti obsahuje všechna čísla od 1 do $4n + 3$ kromě $4n + 2$. Předpokládejme platnost tohoto pro n a dokažme jej i pro $n + 1$.

Součet prvních $4n + 2$ členů posloupnosti je $\frac{(4n+3)(4n+4)}{2} - (4n + 2) = 8n^2 + 10n + 4$, což je sudé číslo. Nejmenší liché číslo, které v posloupnosti ještě není, je $4n + 5$. Jak jsme ukázali výše, $4n + 5$ je se součtem nesoudělné, a proto $a_{4n+3} = 4n + 5$.

Aktuální součet se zvýšil na $8n^2 + 14n + 9$, nejmenší nepoužité číslo je $4n + 2$ a je s $8n^2 + 14n + 9$ nesoudělné. Získáváme $a_{4n+4} = 4n + 2$.

Členy posloupnosti nyní dávají sumu $8n^2 + 18n + 11$ a dosud nejmenší nevyskytující se číslo $4n + 4$ je s ním nesoudělné, tudíž $a_{4n+5} = 4n + 4$.

Teď je součet $8n^2 + 22n + 15 = (2n + 3)(4n + 5)$ a nejmenší nepoužité číslo $4n + 6 = 2(2n + 3)$ je s ním zjevně soudělné. Další číslo, které v posloupnosti ještě není, je $4n + 7$ a to už se součtem nesoudělné je, takže $a_{4n+6} = 4n + 7$.

Tím je indukce dokončena a řešení hotovo, protože posloupnost nyní zřejmě obsahuje všechna přirozená čísla.

Poznámky:

Úloha se nakonec ukázala být jednodušší, než jsme očekávali, a dostali jsme poměrně velké množství správných řešení. Většina jich až na drobné změny postupovala stejně jako to vzorové. Našli se ovšem i řešitelé, kteří použili indukci podle počtu prvočísel v rozkladu každého čísla – nejprve ukázali, že posloupnost obsahuje všechna prvočísla a prvočíselné mocniny, potom čísla co jsou dělitelná dvěma různými prvočísly atd. *(Josef Minařík)*

Mřížky a tabulky

3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Pepa vyplnil tabulku 3×3 čísly 1 až 9 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i na hlavních diagonálách[4] byl dělitelný devíti. Muselo pak být číslo v prostředním poli násobek tří?

(Terka Poláková)

ŘEŠENÍ:

Pokud je součet dělitelný devíti, je dělitelný i třemi. Pro trojici čísel, jejichž součet je dělitelný třemi, existují dvě možnosti, jaké zbytky po dělení třemi mohou tato čísla dávat: První možností je, že mají všechna čísla stejný zbytek. A druhá je, že má každé z čísel jiný zbytek.

Prostředním políčkem procházejí dvě diagonály, jeden sloupec a jeden řádek. Tedy čtyři součty v sobě obsahují prostřední políčko. Pokud by všechny tyto součty byly tvořeny čísly dávajícími tři různé zbytky, pak by žádné jiné číslo v tabulce nemohlo dávat stejný zbytek po dělení třemi jako číslo v prostředním políčku. Z toho plyne, že alespoň jeden z těchto součtů je tvořen čísly dávajícími stejné zbytky po dělení třemi. Takové trojice mohou být pouze $2+5+8=15$, $1+4+7=12$ nebo $3+6+9=18$. Nicméně čísla 15 a 12 nejsou dělitelná devíti. Z toho důvodu musí být na prostředním políčku číslo dělitelné třemi.

POZNÁMKY:

Úloha byla bezproblémová, většina zaslaných řešení byla správná. *(Terka Poláková)*

Úloha 2.

Radeček umístil do tabulky 9×9 v nějakém pořadí čísla 1 až 81. Potom Matějovi řekl, aby našel takové i, že součin čísel v i-tém řádku není roven součinu čísel v i-tém sloupci. Dokažte, že to Matěj zvládl nehledě na rozmístění čísel.

(Jáchym Solecký)

ŘEŠENÍ:

Podíváme se, kde se nachází prvočísla 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 a 79. Jedná se o prvočísla, která jsou menší než 81, zato jejich další násobky jsou větší. Těchto prvočísel je deset, ale hlavní diagonála[5] tabulky má pouze devět políček, takže alespoň jedno z těchto čísel na diagonále neleží. To znamená, že toto číslo pro nějaké i leží v i-tém řádku, ale ne v i-tém sloupci. Protože je to prvočíslo, které se nevyskytuje v prvočíselném rozkladu žádného jiného čísla v tabulce, vyskytuje se v prvočíselném rozkladu součinu i-tého řádku, ale nevyskytuje se v prvočíselném rozkladu součinu i-tého sloupce. Tudíž se součin čísel v i-tém řádku nerovná součinu v i-tém sloupci. Matějovi tedy stačí vybrat toto i.

[4] *Hlavní diagonála* tabulky 3×3 je tvořena dvěma protilehlými rohovými a prostředním políčkem.

[5] Hlavní diagonálou tabulky myslíme políčka, která pro nějaké i leží zároveň v i-tém sloupci i v i-tém řádku.

Poznámky:

Většina řešení byla správná a podobná vzorovému. Překvapivé množství řešitelů špatně spočítalo počet prvočísel mezi 41 a 81, za což jsem body nestrhávala, pokud i přesto důkaz korektně dokončili. Řešitelé, kteří se úlohu pokoušeli řešit úplně jinak, obvykle nedospěli ke zdárnému konci.

(Anna Mlezivová)

Úloha 3.

Pavel si vyrobil krabici o rozměrech $9 \times 8 \times 8$ a chce do ní uskladnit svých 32 oblíbených kvádrů o rozměrech $2 \times 3 \times 3$ tak, aby jejich stěny byly rovnoběžné se stěnami krabice a žádný nevyčníval ven. Ukažte, že se mu to nepovede.

(Pavel Hudec)

Řešení:

Objem krabice je stejný jako součet objemů kvádrů, takže v krabici nesmí být žádné volné místo. Proto musí být i každá ze stěn krabice beze zbytku pokryta stěnami kvádrů. Víme, že kvádry mají stěny s obsahy $3 \times 2 = 6$ a $3 \times 3 = 9$, což jsou obě čísla dělitelná třemi. Z toho už nutně plyne, že stěna 8×8 se pokrýt nedá, neboť 64 není dělitelné třemi, a tedy se 64 nedá vyjádřit jako součet násobků 6 a 9.

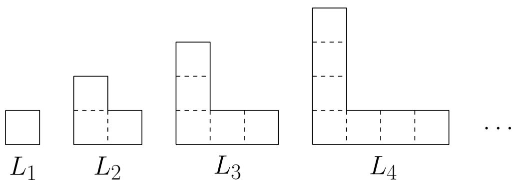
Poznámky:

Více než polovina řešitelů postupovala stejně jako vzorové řešení. Někteří z nich ovšem zapomněli zmínit (zřejmé) pozorování o rovnosti objemů, bez nějž jejich řešení nebyla kompletní.

Našlo se také dost lidí, kteří se úlohu pokoušeli řešit tak, že začnou kvádry do krabice skládat „nejlepším možným způsobem“, a pak ukážou, že to nevyjde. Taková řešení nemáme rádi (neboť většinou nefungují), protože autorovi se opravdu málokdy povede dostatečně zdůvodnit, že jeho způsob je opravdu *nejlepší* možný a že jiný způsob také fungovat nebude. *(Michal Töpfer)*

Úloha 4.

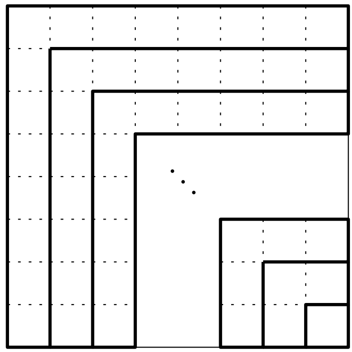
Lenka chce vydlaždičkovat čtvercovou podlahu koupelny o rozměru $n \times n$. V místním obchodě ale prodávají pouze dlaždičky typu L_k, které mají dvě ramena tvořená k čtverečky (viz obrázek) a stojí k korun. Dlaždičky se nesmí překrývat ani lámat. Jak má Lenka nakoupit, aby zaplatila co nejméně?



(Rado van Švarc)

Řešení:

Pro Lenku je nejvýhodnější koupit od každého druhu jednu dlaždičku, celkem tedy n dlaždiček. Nejprve ukážeme, jak plochu za pomoci n dlaždiček pokrýt, a pak ukážeme, že jich nemůže být méně. Dlaždičky vložíme do čtverce $n \times n$ tak, že začneme s dlaždičkou L_n, aby její rohové pole bylo v levém horním rohu. Poté nám bude zbývat čtverec s délkou strany o jedna menší, kde zase dáme dlaždičku L_{n-1} do levého horního rohu a tak dále, až dojdeme k L_1.



Nyní ukážeme, že dlaždiček nemůže být méně. Podívejme se na cenu k, za kterou pokryjeme $x = 2k - 1$ čtverečků jednou dlaždicí typu L_k na naší dané ploše. Pak $k = \frac{x+1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, neboli zaplatíme vždy stejně za pokrytou jednotku obsahu plus jedna polovina za každou použitou destičku. Nechť jsme koupili d dlaždiček, kterými jsme pokryli celý čtverec $n \times n$. Pak víme, že *celková cena* $= \frac{n^2}{2} + \frac{d}{2}$. Tedy chceme minimalizovat počet použitých dlaždiček.

Označme rohové pole, které má každá dlaždička právě jedno, jako *střed*. Nechť každý řádek nebo každý sloupec obsahuje alespoň jeden střed. Pokud tomu tak je, vyhráli jsme a máme alespoň n dlaždiček. Pro spor předpokládejme, že existuje řádek i sloupec, který neobsahuje žádný střed. Podívejme se na jejich průnik. Tento čtvereček nemůže být pokrytý, protože aby byl čtvereček pokrytý, musí ležet na jednom rameni nějaké dlaždičky. Tedy její střed musí být buď ve stejném sloupci, nebo ve stejném řádku jako on sám. Což je však spor s předpokladem, že tento řádek ani sloupec žádný střed neobsahuje. Proto je naše konstrukce optimální.

Poznámky:
Všichni řešitelé, kteří poslali svá řešení, napsali správně alespoň konstrukci, čímž si vysloužili jeden bod. Spousta řešitelů se snažila dokázat, že je nejlepší použít co největší dlaždičky, ale ve svém řešení použili jak velké, tak malé dlaždičky, a proto nebylo jasné, proč by nemohlo existovat řešení lepší. Několik řešitelů našlo správný argument, že chceme minimalizovat počet dlaždiček, ale nebylo jich mnoho. Pár zavrávoralo u obhájení, že jich je alespoň n, ale vcelku už to nebyly žádné velké chyby, které je stály nanejvýš jeden bod. *(Fíla Čermák)*

Úloha 5.

Ondra s Luckou našli bílou tabulku $n \times n$ a číslo k. Potom hráli následující hru: Ondra vybere k políček a obarví je červeně. Lucka pak několik červených políček (alespoň jedno) přebarví na zelenou. Pro jaké nejmenší k může vždy políčka přebarvit tak, že v každém řádku i sloupci bude sudý počet zelených políček?

(Danil Koževnikov)

Řešení (podle Jana Brady):
Dokážeme, že hledané k je rovno $2n$. Pro $k = 2n - 1$ to zřejmě Lucka nemůže zvládnout, protože Ondra může obarvit například celý jeden řádek a jeden sloupec.

Nyní indukcí podle n dokážeme, že pro $k = 2n$ to už vždy zvládne. Pro $n = 1$ úloha nemá smysl, pro $n = 2$ má triviální řešení, kdy oba obarví všechna čtyři políčka.

Indukční krok: Předpokládejme, že pro všechna Ondrova obarvení pro rozměr tabulky n to Lucka zvládne. S libovolným obarvením tabulky $(n + 1) \times (n + 1)$ nyní provedeme následující: najdeme řádek nebo sloupec, BÚNO po případném otočení tabulky řádek, s minimálním počtem obarvených políček, ty jsou nejvýše dvě. Pokud mají všechny řádky i sloupce právě dvě obarvená políčka, má Lucka úkol snadný, stačí přebarvit všechna políčka a je hotovo.

V opačném případě má tento řádek 0 nebo 1 obarvené políčko. Tento řádek přeškrtneme a najdeme i sloupec s nejméně obarvenými políčky. Pokud má 0 nebo 1 políčko obarvené, vyškrtneme ho také. Jinak mají všechny sloupce 2 obarvená políčka a v takovém případě záleží na tom, zda má přeškrtnutý řádek 0 nebo 1 obarvené políčko. Pokud má jedno obarvené políčko, přeškrtneme sloupec, ve kterém se nachází. Pokud nemá žádné obarvené, přeškrtneme libovolný sloupec. Nyní se tedy v přeškrtnutém řádku a sloupci nachází maximálně celkem 2 obarvená pole. Pokud tedy spojíme zbylé oblasti do čtverce, vznikne nám čtverec $n \times n$ s minimálně $2(n+1)-2 = 2n+2-2 = 2n$ obarvenými poli. Pro tento čtverec ale z indukce Lucka vždy nalezne obarvení, které zřejmě funguje i pro náš čtverec, tudíž máme dokázáno.

Řešení pomocí teorie grafů:
Dokážeme, že hledané k je rovno $2n$. Pro $k = 2n - 1$ to zřejmě Lucka nemůže zvládnout, protože Ondra může obarvit například celý jeden řádek a jeden sloupec.

Tabulku si představíme jako bipartitní graf, kde vrcholy jsou řádky a sloupce. V jedné partitě jsou vrcholy odpovídající řádkům a ve druhé sloupcům. Mezi řádkem a sloupcem vede hrana právě tehdy, když Ondra červeně obarvil políčko ležící právě v tomto sloupci i v tomto řádku. Naším úkolem je tedy najít neprázdný podgraf, ve kterém má každý vrchol sudý stupeň, hrany tohoto podgrafu pak odpovídají výběru políček, které má Lucka obarvit zeleně.

Pro $k = 2n$ takovýto podgraf jistě existuje, protože náš graf má $2n$ vrcholů a $2n$ hran, a víme, že acyklický graf (*les*) na $2n$ vrcholech má nejvýše $2n - 1$ hran. Tudíž graf obsahuje kružnici, která je přesně hledaný podgraf, protože každý vrchol kružnice má stupeň právě dva. Pokud neznáš pojmy z tohoto řešení, zkus se podívat na PraSečí seriál Letem grafovým světem[6] ze 34. ročníku.

Poznámky:
Mnoho z Vás si s úlohou poradilo, ať už nějakým řešením podobným prvnímu, či poněkud elegantněji nějakou variací na řešení druhé. Někteří však ukázali jen to, že pro $k = 2n - 1$ to Lucka nezvládne, za což jsem udělil jeden bod, ale nedokázali, že pro $k = 2n$ to zvládne pro všechna Ondrova obarvení, nejen pro nějaké speciální případy. Dalším problémem byla chybná počáteční myšlenka, že Lucka musí obarvit políčka tvořící pravoúhelník. Ale nejčastější chybou bylo přejmenování Lucky na Lenku. *(Ondra Krabec)*

Úloha 6.

Martin dostal dvě posloupnosti $a_1, \ldots, a_{2020}$ a $b_1, \ldots, b_{2020}$. Každá z nich je tvořena po dvou různými reálnými čísly. Aby se naučil sčítat, vypsal si tabulku součtů, a to takovým způsobem, že do políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci napsal $a_i + b_j$. Dále zjistil, že součin čísel v každém řádku je roven 1. Ukažte, že součin čísel v každém sloupci musí být roven -1.

(Danil Koževnikov)

Řešení:
Uvažme polynom

$$P(x) = \prod_{j=1}^{2020} (x + b_j) - \prod_{i=1}^{2020} (x - a_i).$$

Jelikož je P definovaný jako rozdíl dvou monických[7] polynomů stupně 2020, tak bude mít stupeň nejvýše 2019.

Ze zadání víme, že pro všechna $1 \leq i \leq 2020$ platí $\prod_{j=1}^{2020} (a_i + b_j) = 1$. Z toho plyne, že pro všechna taková i platí $P(a_i) = 1$ (první součin se rovná jedné, zatímco jeden činitel ve druhém bude zjevně nulový), takže polynom $P(x) - 1$ má 2020 po dvou různých reálných kořenů. Nenulový

[6] *https://prase.cz/archive/34/uvod1s.pdf*

[7] Polynom je monický, pokud se jeho koeficient u nejvyšší mocniny x rovná jedné.

reálný polynom stupně nejvýše 2019 však může mít nanejvýš 2019 různých kořenů, pročež musí být $P(x)-1$ nulový polynom, neboli pro všechna reálná x platí

$$\prod_{j=1}^{2020}(x+b_j)-\prod_{i=1}^{2020}(x-a_i)=1.$$

Speciálně tedy platí daná rovnost i pro $x=-b_j$. Tímto dosazením navíc vynulujeme první součin a dostaneme

$$1=-\prod_{i=1}^{2020}(-b_j-a_i)=-(-1)^{2020}\prod_{i=1}^{2020}(b_j+a_i)=-\prod_{i=1}^{2020}(b_j+a_i),$$

neboli že součin čísel v j-tém sloupci je roven -1.

Poznámky:
Všechna správná řešení přišla na to, že jsou někde v úloze schované polynomy. Většina z nich se ovšem místo kořenů dívala na jejich koeficienty, což vedlo na soustavu rovnic z Viètových vzorců. Ani tento postup nebylo tak těžké dotáhnout ke zdárnému konci, ale vyžadovalo to výrazně víc algebraických úprav než vzorák. Nakonec jsem se rozhodnul nestrhávat body za drobné nepřesnosti v takových řešeních (například za to, když nebylo dostatečně vysvětleno, proč platí $\prod_{j=1}^{2020}(x+b_j)-\prod_{i=1}^{2020}(x-a_i)=1$), ale pro příště bych doporučil dávat si na takové věci pozor.

(Danil Koževnikov)

Úloha 7.

Dominik vyplnil celou tabulku $2n\times 2n$ nepřekrývajícími se dominovými kostkami 2×1 a 1×2. Potom ji podal Terce, ať obarví vrcholy mřížky třemi barvami tak, aby dva sousední vrcholy měly stejnou barvu právě tehdy, když jejich spojnice půlí některé domino. Rozhodněte, zda ke každému rozložení domin Terka dokáže najít vyhovující obarvení.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Vrcholy mřížky si očíslujeme v kartézských souřadnicích jako $[a,b]$ pro $0\le a,b\le 2n$. Hrany v mřížce budeme nazývat *půlící* a *nepůlící* v závislosti na tom, jestli půlí nějaké domino.

Nyní obarvíme vrcholy mřížky barvami 0, 1 a 2. Barvu bodu $[x,y]$ si označíme $b(x,y)$. Mřížku obarvíme tak, aby platilo:

(i) $b(0,0)=0$.
(ii) Pokud dva body sousedí přes půlící hranu, mají stejnou barvu.
(iii) Pokud dva body $[x,y]$ a $[x+1,y]$ sousedí přes nepůlící hranu, pak

$$b(x+1,y)\equiv b(x,y)+(-1)^{x+y}\pmod 3.$$

(iv) Pokud dva body $[x,y]$ a $[x,y+1]$ sousedí přes nepůlící hranu, pak

$$b(x,y+1)\equiv b(x,y)-(-1)^{x+y}\pmod 3.$$

Je jasné, že pokud zvládneme body obarvit tímto způsobem, bude to skutečně hledané obarvení. Zbývá dokázat, že toto obarvení skutečně lze sestrojit. Pro každé nezáporné celé k ukážeme, že to lze pro všechna $[x,y]$ s $0\le x,y\le 2n$ a $x+y\le k$. Pak to speciálně bude platit pro $k=4n$ a jsme hotovi.

Pro $k=0$ to určitě platí.

Nyní pro spor nechť $k>0$ je nejmenší takové, že to pro něj nejde. Protože lze obarvit vrcholy se součtem souřadnic nanejvýš $k-1$, nejde toto obarvení rozšířit. Tedy existují x,y taková, že barva, kterou dostane $[x+1, y+1]$ přiřazenou od $[x, y+1]$, je jiná než ta, kterou dostane přiřazenou od $[x+1, y]$.

Políčko tvořeno $[x, y]$, $[x+1, y]$, $[x, y+1]$ a $[x+1, y+1]$ má přesně jednu z hran půlící. Protože když obejdeme toto políčku po směru hodinových ručiček, barva jednou zůstane konstantní a třikrát se změní (vždy na stejnou stranu), musí barva $b(x+1, y+1)$ vyjít z obou stran stejně. Řečeno pořádněji:

(i) Pokud je hrana mezi $[x, y]$ a $[x, y+1]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu

$$b(x+1, y) - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) + (-1)^{x+y} - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) + 2(-1)^{x+y}$$

a od $[x, y+1]$ barvu $b(x, y+1) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - (-1)^{x+y}$, což je ale modulo tři to samé.

(ii) Pokud je hrana mezi $[x, y]$ a $[x+1, y]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu

$$b(x+1, y) - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - (-1)^{x+y+1}$$

a od $[x, y+1]$ barvu $b(x, y+1) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - 2(-1)^{x+y}$, což je ale modulo tři to samé.

(iii) Pokud je hrana mezi $[x+1, y]$ a $[x+1, y+1]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu $b(x+1, y) = b(x, y) + (-1)^{x+y}$ a od $[x, y+1]$ barvu

$$b(x, y+1) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - 2(-1)^{x+y},$$

což je ale modulo tři to samé.

(iv) Pokud je hrana mezi $[x, y+1]$ a $[x+1, y+1]$ půlící, pak $[x+1, y+1]$ dostane od $[x+1, y]$ barvu

$$b(x+1, y) - (-1)^{x+y+1} = b(x, y) + 2(-1)^{x+y}$$

a od $[x, y+1]$ barvu $b(x, y+1) = b(x, y) + (-1)^{x+y+1} = b(x, y) - (-1)^{x+y}$, což je ale modulo tři to samé.

To ale znamená, že vrchol $[x+1, y+1]$ jde obarvit v souladu s našimi požadavky, což je spor.

Poznámky:

Mnoho z došlých řešení utrpělo na nedostatečnou přesnost. Nestačí jen říct „opakuji a opakuji, a protože to vyjde kolem jednoho domina, bude to vycházet pořád“, je potřeba to diskutovat řádněji – obvykle nejlépe pomocí indukce.

Václav Janáček dostal $+i$ za pěkné řešení, které spočívalo v tom, že domina obarvoval jen tak, aby byla symetrická podle půlící čáry. Pak si rozmyslel, že pro tabulku vyplněnou jen svislými dominy to jde. Následně ukázal, že kdykoliv máme pro nějaké rozložení vyhovující obarvení, umíme vyhovujícím způsobem vybarvit i mřížku vzniklou tak, že jednu dvojici domin sousedících delší hranou otočíme o 90°. A nakonec řekl, že každé rozložení domin lze těmito operacemi získat z tabulky jen ze svislých domin. *(Rado van Švarc)*

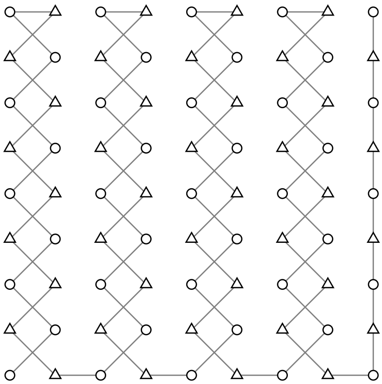
Úloha 8.

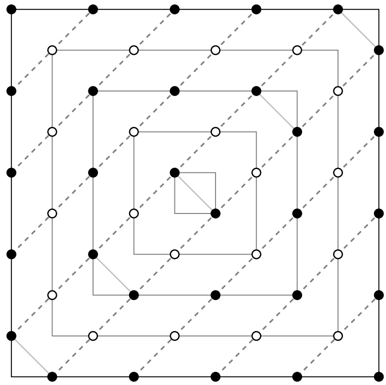
Verča dostala mřížku $n \times n$. Do ní si nakreslila cestu procházející po hranách nebo diagonálách jednotlivých čtverečků. Cesta prochází každým vrcholem právě jednou a diagonály se v ní můžou křížit. Určete maximální možný počet diagonál ve Verčině cestě.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Maximální počet diagonál vyjde n^2 pro sudé n a $n^2 + n$ pro n liché. Nejdříve dokážeme tyto horní odhady maximálního počtu diagonál a na závěr najdeme konstrukci.

Vrcholy mřížky rozdělme do dvou skupin (kolečka a trojúhelníky) jako šachovnici (tedy vrcholy sousedící hranou jsou v různých skupinách) například tak, aby levý horní roh byl kolečko. Platí, že hrany spojují vrcholy různého typu a diagonály naopak vrcholy stejného typu. Vrcholů v mřížce $n\times n$ je právě $(n+1)^2$ a cesta má vždy právě n^2+2n úseků, stačí tedy minimalizovat počet použitých hran. Z pohledu rozdělení to znamená, že chceme typ vrcholu změnit co nejméněkrát. Podívejme se na naší cestě pouze na diagonály, které vedou mezi kolečky. Ty tvoří dohromady několik menších souvislých cestiček[8], které spolu disjunktně pokrývají všechna kolečka. Hlavní myšlenka tedy bude odhadnout, kolika nejméně disjunktními cestičkami jsme schopni kolečka pokrýt – to nám následně dá i dolní odhad na to, kolikrát musíme změnit typ vrcholu.





Podívejme se nyní pouze na kolečka (označme jejich počet zatím m) a předpokládejme, že je umíme pokrýt pomocí k disjunktních cestiček. Každá cestička má o jeden úsek méně, než kolika prochází vrcholy, a všechny cestičky dohromady pokrývají všechny vrcholy. Obsahují tedy dohromady $m - k$ úseků. Bude proto stačit, když odhadneme, kolik nejvíce úseků může obsahovat disjunktní pokrytí všech koleček. K tomuto odhadu se nám bude hodit obarvit si kolečka dvěma barvami – černou a bílou, a to takovým způsobem, že si rozdělíme vrcholy do vrstev podle toho, jakou mají vzdálenost od nejbližší strany velkého čtverce, který tvoří okraje mřížky. Vrcholy, které jsou na okraji, obarvíme černě, vrcholy o vrstvu níž se vzdáleností 1 obarvíme bíle, vrcholy se vzdáleností 2 černě a takto budeme střídavě pokračovat. Nyní už rozlišíme situaci podle toho, jestli je n sudé, nebo liché.

(a) Nechť n je liché. V tomto případě je koleček stejně jako trojúhelníčků, tedy $\frac{(n+1)^2}{2}$, a situace je pro oba typy vrcholů symetrická. Koukněme se na naše černobílé obarvení koleček a spočítejme počet bílých vrcholů. Když se ve velkém čtverci podíváme na ty diagonální příčky zleva doprava nahoru, které obsahují kolečka, tak na každé je vždy o jeden černý bod více než bílých (dohromady je tam lichý počet a postupně střídáme sousední vrstvy, tedy i barvy). Takovýchto diagonálních příček je dohromady $n + 1$, tedy mřížka obsahuje o $n + 1$ víc černých vrcholů. Z toho už je bílých vrcholů právě $\frac{n^2-1}{4}$. Mějme nyní nějaké vyhovující pokrytí cestičkami. Z každého bílého vrcholu vychází nejvýše dva úseky, dohromady tedy existuje nejvýše $\frac{n^2-1}{2}$ úseků spojujících buď dva bílé vrcholy, nebo jeden bílý a jeden černý vrchol. Zbývá odhadnout ještě počet úseků mezi dvěma černými vrcholy.

[8]Cestička může být i triviální, tedy délky nula, začínající i končící ve stejném vrcholu.

Takový úsek by musel vést mezi dvěma body ze stejné vrstvy a tam jsou body dostatečně blízko pouze ve dvojicích podél hlavní diagonály (zleva doprava nahoru). Takovýchto černých dvojic bodů je tam právě $\frac{n+1}{2}$. Dohromady je tedy v naší konfiguraci cestiček právě $\frac{n^2+2n+1}{2}$ vrcholů a nejvýše $\frac{n^2+n}{2}$ úseků. Z diskuze výše tedy vyplývá, že cestiček musí být alespoň

$$\frac{n^2+2n+1}{2} - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n+1}{2},$$

bychom neměli dostatek úseků. Analogická situace ze symetrie nastává pro pokrytí trojúhelníčků. Typ vrcholu musíme změnit pokaždé, když přecházíme mezi cestičkami, a vzhledem k tomu, že cestiček je alespoň $n+1$, tak jej musíme změnit alespoň n-krát. Diagonál tedy použijeme nejvýše $n^2+2n-n = n^2+n$.

(b) Nechť n je sudé. Tentokrát situace není symetrická a tabulka obsahuje více koleček. Konkrétně se počet koleček po řádcích střídá mezi $\frac{n+2}{2}$ a $\frac{n}{2}$, dohromady jich je

$$\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+2}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + n + 1.$$

Opět se podíváme na počet diagonál spojujících kolečka. Bílých vrcholů je ze stejných důvodů o $n+1$ méně než černých, tedy právě $\frac{n^2}{4}$, takže diagonál využívajících alespoň jeden bílý vrchol je nejvýše $\frac{n^2}{2}$. Tentokrát si ale můžeme všimnout, že neexistuje diagonála, která by vedla mezi dvěma černými vrcholy. Vyplývá to z toho, že všechny vrcholy v černé vrstvě jsou teď vzdálené alespoň o 2, protože černé vrcholy vždy padnou do vrcholu čtverce určujícího danou vrstvu. Úseků je tedy celkově nejvýše $\frac{n^2}{2}$, cestiček pokrývajících kolečka alespoň $n+1$. Situaci pro trojúhelníky (kterých je méně) nemusíme vyšetřovat, neboť správný odhad plyne už z následující úvahy. Pokaždé když se chceme přesunout mezi dvěma disjunktními cestičkami pokrývající kolečka, musíme právě dvakrát změnit typ vrcholu, dohromady tedy musíme změnit typ alespoň $2n$-krát. Diagonál lze tedy nejvýše použít $n^2+2n-2n = n^2$.

Jako konstrukce se nabízí jít postupně po dvojicích sloupců. V každé dvojici nejdříve vystoupáme nahoru po diagonálách, pak změníme barvu a sestoupíme po diagonálách dolů a přejdeme na další dvojici. Pro sudá n máme lichý počet sloupců, takže nelze sloupce přesně spárovat a poslední sloupec například můžeme projít celý po hranách. Tím jsou obě části důkazu hotovy.

Poznámky:

Většina došlých řešení správně nalezla konstrukci, nicméně potom nebyla schopna podat korektní důkaz odhadu a snažila se typicky říct, že jejich způsob projití mřížky je nejvýhodnější. Taková argumentace nicméně nikdy nevedla ke správnému cíli, protože obvykle vyšetřovala optimum jenom lokálně, neuvažovala všechny možné cesty nebo si úlohu nějak jinak implicitně zjednodušila. Tato řešení si vysloužila jeden bod, jediné kompletní řešení přišlo od *Magdalény Mišinové*.

Samotná myšlenka šachovnicového obarvování je v kombinatorice velmi běžná a hodí se ji umět používat. Hlavní trik byl v konstrukci černobílého obarvení na odhad počtu úseků, které je pro lichá n poněkud atypické – nicméně pro sudá n degeneruje do klasického šachovnicového obarvení.

(Martin Raška)

Projektivní geometrie I

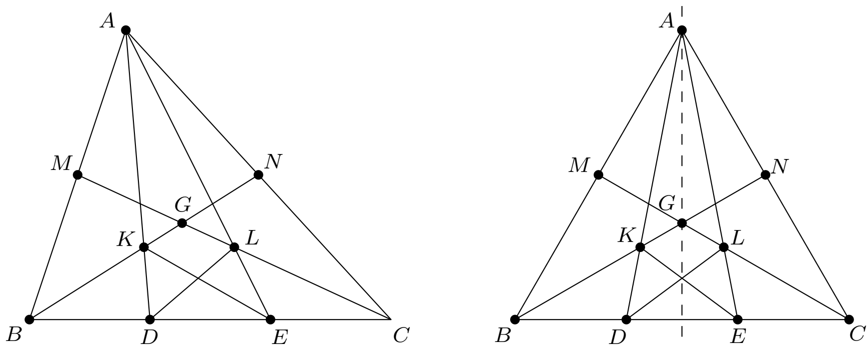
1. SERIÁLOVÁ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Mějme trojúhelník ABC s těžištěm G. Označme středy stran AB a AC postupně M a N. Dále mějme na straně BC body D a E, přičemž platí $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{|BC|}{3}$. Dále nechť K je průsečík přímek AD a BN a obdobně nechť L je průsečíkem přímek AE a CM. Dokažte, že A, G a průsečík přímek DL a EK leží na jedné přímce.

(Radek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Ze seriálu víme, že libovolný trojúhelník umíme afinně zobrazit na rovnostranný, přičemž se nám zachovají přímky a poměry na nich. Pro rovnostranný trojúhelník je celá konfigurace symetrická podle přímky AG, proto se na ní přímky DL a EK zřejmě musí protínat. Protože A, G a průsečík leží na přímce po afinním zobrazení, musely ležet na přímce i před ním, neboť afinní zobrazení zachovávají přímky.



POZNÁMKY:
Většina řešitelů postupovala víceméně stejně jako vzorové řešení. Našli se ale i řešitelé, kteří k důkazu využili Cevovu větu nebo úlohu řešili analyticky. *(Josef Minařík)*

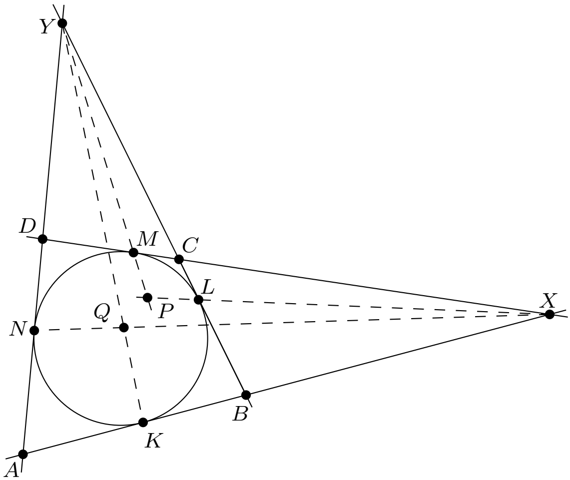
Úloha 2.

Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť K, L, M a N jsou po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD a DA. Označme X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AD a BC. Dále nechť P je průsečík přímek XL a YM. Obdobně definujme bod Q jako průsečík přímek XN a YK. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

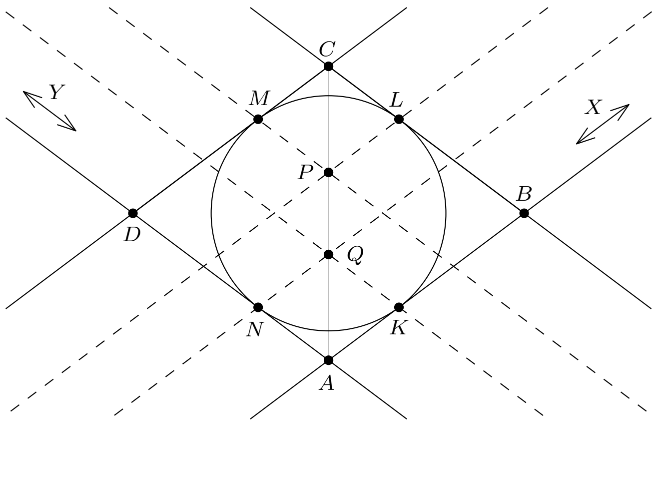
(Radek Olšák)

Řešení:

Označme p přímku XY. Nejprve ukážeme, že p neprotíná kružnici vepsanou $ABCD$. Aby přímka protínala kružnici vepsanou $ABCD$, musí protnout alespoň jednu z hran čtyřúhelníka $ABCD$. Ale průsečíky $p \cap AB = X$, $p \cap CD = X$, $p \cap AD = Y$ a $p \cap BC = Y$ leží vně úseček AB, CD, AD a BC. Takže p neprotíná kružnici vepsanou.



Proto můžeme uvážit kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici vepsanou $ABCD$. Tím se z $ABCD$ stane rovnoběžník s kružnicí vepsanou, což je kosočtverec. V něm jsou dvojice bodů (M, L), (N, K) a (X, Y) symetrické podle AC. Takže i dvojice přímek (XL, YM) a (XN, YK) jsou symetrické podle AC, neboli jejich průsečíky leží na AC. Což znamená, že A, P, Q, C leží na přímce.



Poznámky:

Většina došlých řešení se ubírala směrem toho vzorového. Rozhodl jsem se nestrhávat body za neodůvodnění, proč XY neprotíná kružnici vepsanou, protože jsme si přesně toto zobrazení v seriálu ukázali.

Někteří řešitelé se snažili úlohu řešit jen pomocí afinních zobrazení, to však kvůli kružnici v zadání nevedlo ke zdárnému konci. *(Radek Olšák)*

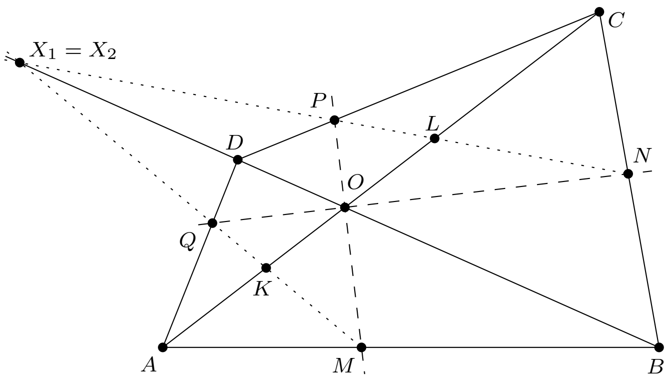
Úloha 3.

Nechť O je v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ průsečík uhlopříček. Osy úhlů AOB, BOC, COD, DOA protínají strany čtyřúhelníku AB, BC, CD, DA postupně v bodech M, N, P, Q. Dokažte, že přímky MQ, NP a BD se protínají v jednom bodě.

(Lenka Kopfová)

Řešení promítáním dvojpoměrů:
Označme $K = AC \cap MQ$ a $L = AC \cap NP$, dále buď $X_1 = BD \cap MQ$ a $X_2 = BD \cap NP$. Budeme chtít dokázat, že $X_1 = X_2$. Nejprve si uvědomme, že osou úhlů AOD a BOC je ta samá přímka a totéž platí pro osu úhlů AOB a COD. Navíc AOB a BOC jsou úhly vedlejší, a tudíž jejich osy svírají $90°$. Ze seriálového tvrzení *dvě ze tří* tak plyne, že přímky AO, MO, BO a NO tvoří harmonický svazek. Víme, že pokud harmonický svazek protneme nějakou přímkou, pak čtyři vzniklé průsečíky tvoří harmonickou čtveřici. Tedy platí, že $(M, K, Q, X_1) = -1$ a stejně tak $(N, L, P, X_2) = -1$. Z promítacího tvrzení platí

$$(M, K, Q, X_1) \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} (B, O, D, X_1) = -1,$$
$$(N, L, P, X_2) \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} (B, O, D, X_2) = -1.$$

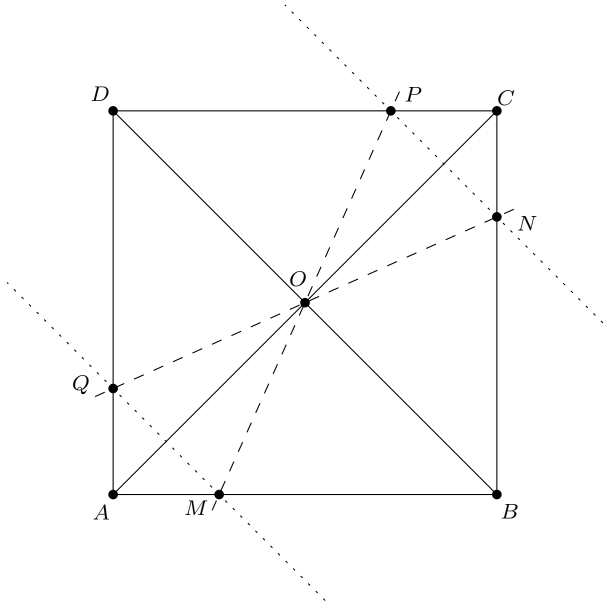


Dohromady dostáváme

$$(B, O, D, X_1) = (B, O, D, X_2) = -1.$$

Z jednoznačnosti dvojpoměrů na přímce už plyne $X_1 = X_2$, což jsme chtěli dokázat.

Řešení zkosením do čtverce:
Opět si nejprve všimneme, že přímky AO, MO, BO a NO tvoří harmonický svazek. Dále uvažujme kolineaci takovou, která nám čtyřúhelník $ABCD$ zobrazí na čtverec. Víme, že kolineace zachovává dvojpoměry, tedy i po kolineaci přímky AO, MO, BO a NO tvoří harmonický svazek. Ve čtverci ale platí, že úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Z tvrzení *dvě ze tří* v novém obrázku tak vyplývá, že AO a BO jsou osami úhlů, které svírají přímky MO a NO. Platí tedy, že nová konfigurace je celá osově souměrná podle AC, z čehož už plyne $MQ \parallel BD \parallel NP$. Dané přímky se tedy protínají v jednom (nevlastním) bodě, z čehož plyne, že se musely protínat i v původním čtyřúhelníku.



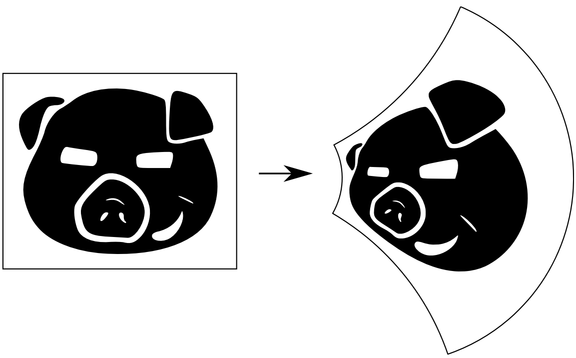
Poznámky:
Přibližně polovina došlých řešení byla správně a vesměs se ubírala jedním ze dvou vzorových řešení. Našly se ale i výjimky, které přišly na řešení pomocí poměrů s použitím Menelaovy věty a angle bisector theoremu. Většina řešitelů přišla na harmonický svazek, za což jsem udělovala dva body. Poté ale častým kamenem úrazu bylo použití nějaké kolineace a neuvědomění si, že kolineace nezachovává úhly, takže osy úhlů se po kolineaci nezobrazí nutně zase na osy úhlů. *(Lenka Kopfová)*

Projektivní geometrie II – Naprosto nesouvisející diagramy

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává druhý díl seriálu o projektivní geometrii. V prvním díle jsme se seznámili s afinními zobrazeními, dvojpoměry a s tím, jaké to je, když se na obrázek koukáme z jiného úhlu pohledu – pomocí perspektivy a kolineace. V tomto díle si ukážeme, že se nemusíme omezovat jen na koukání se na obrázek jinak, ale že někdy jej můžeme úplně celý překreslit. Začneme trochu komplexněji, poté si ukážeme, že inverzí možno mínit je i něco jiného než slov pořadí ve větě špatné. Dále se vydáme na výpravu až k pólům a následně zavedeme dualitu. Zjistíme, že ve správném slova smyslu přímky a kružnice můžeme považovat za ten samý objekt. A že zase v jiném kontextu můžeme zaměňovat přímky za body a naopak.



Také bychom rádi upozornili na fakt, že druhý a třetí díl se budou zabývat dosti odlišnými tématy, a tedy k pochopení třetího dílu nebude potřeba pochopit díl druhý a naopak. Ale samozřejmě nic Ti nebrání pochopit díly oba :).

Úvod do komplexních čísel

Komplexní čísla si zavedeme trochu netradičně, a to pomocí jejich geometrické představy.[1] Komplexní čísla jsou rozšířením čísel reálných a ty si můžeme představit na číselné ose. Každý bod na této ose pak představuje jedno reálné číslo. Pokud reálná čísla leží na přímce, přirozeným rozšířením se zdá být tedy rovina. Libovolný bod v této rovině pak představuje komplexní číslo, přičemž počátek bude odpovídat číslu 0. S čísly bychom ale chtěli umět dělat i nějaké operace, například je sčítat, násobit a podobně. Je tedy trochu otázkou, jak tyto operace zavést pro body v rovině. Můžeme se inspirovat u reálných čísel.

Sčítání komplexních čísel

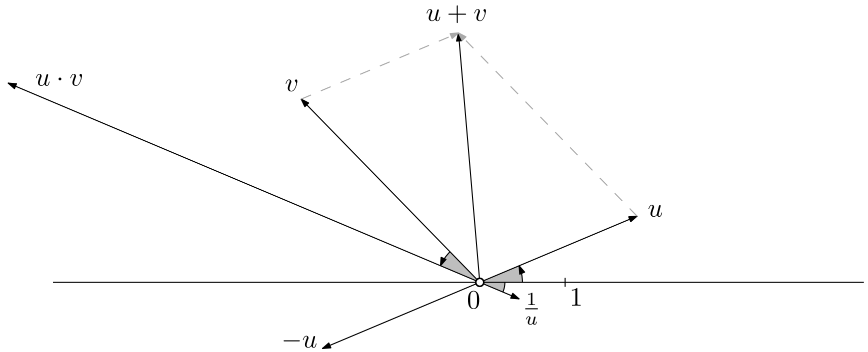
Zamysleme se nad tím, jak se sčítají reálná čísla. Jak jsme si už řekli, reálná čísla si můžeme představit jako body na číselné ose. Na to, abychom je sečetli, si můžeme představit, že z počátku vede do každého z nich šipka[2]. Součet pak získáme jednoduše tak, že dané šipky přiložíme za sebe a výsledný bod, na kterém druhá šipka skončí, pak nazveme součtem. Naprosto obdobně si můžeme definovat sčítání na komplexních číslech. Představíme si šipky vedoucí z počátku do daných dvou bodů v rovině a za jejich součet budeme považovat bod, který dostaneme, pokud položíme dané dvě šipky za sebe. Když už umíme komplexní čísla sčítat, naprosto obdobně se můžeme podívat na odčítání. V reálných číslech si můžeme všimnout, že rozdíl dvou reálných čísel získáme, když druhou šipku připojíme za první ale tentokrát jejím „koncem se šipkou“. A stejně tak to bude platit i v komplexních číslech.

Poznámka 1. Vidíme, že šipky a body v komplexní rovině spolu souvisí. Každý bod jednoznačně určuje šipku od počátku do tohoto bodu. Analogicky každá šipka od počátku určuje svůj koncový bod. Dále uvedené vlastnosti tak platí i pro vektory i pro body, záleží jen, jak se na to zrovna koukáme. Pro rozlišení těchto dvou pohledů se vektory běžně značí malými písmeny a body písmeny velkými.

---

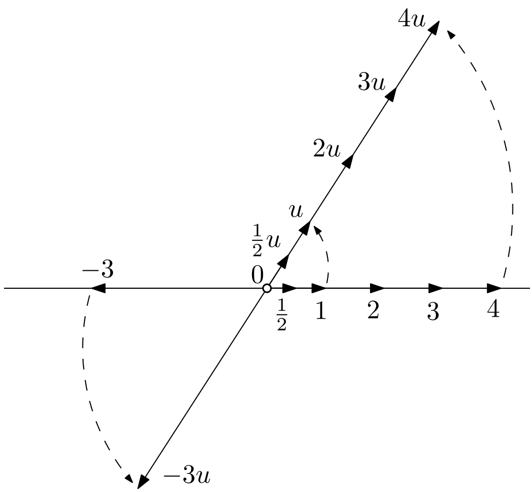
[1] Doporučujeme se podívat na video *Mirka Olšáka* (již vysloužilého organizátora MKS) na toto téma. Najdeš ho na odkaze
youtube.com/watch?v=Ip69mJyF-8s.

[2] Odborně pak můžeme potkat tuto šipku pod krycím názvem *vektor*.



Násobení komplexních čísel

Násobení je už trochu zajímavější. Rozmysleme si nejprve, jak by mělo fungovat násobení komplexního čísla reálným. Mějme nějaké komplexní číslo u. Z naší definice sčítaní komplexních čísel už umíme říct, jak by tento součin měl vypadat. Například $2u = u + u$, tedy $2u$, vznikne „natáhnutím" šipky odpovídající u dvakrát. Obdobně $3u$, $4u$, $\frac{1}{2}u$, $-3u$ by bylo natáhnutím šipky u tolikrát, kde natáhnutí -3krát si můžeme představit jako překlopení šipky podle počátku a pak „natažení" příslušnou již kladnou reálnou konstantou – v tomto případě 3.



Už tedy víme, jak se násobí komplexní číslo reálným. Díky komutativitě se na to můžeme podívat z druhé strany. Místo toho, abychom se na dané násobení dívali jako násobení komplexního čísla s reálným, podívejme se, co se děje, když vynásobíme reálné číslo komplexním? No nejprve se šipka určující dané reálné číslo otočí kolem počátku o úhel, který komplexní číslo u svírá s reálnou osou, a poté se vynásobí velikostí u. Z toho už můžeme odvodit, jak bude fungovat obecné násobení dvou komplexních čísel. Mějme komplexní číslo v a chceme ho vynásobit číslem u. Pak toto násobení bude s šipkou v dělat to samé jako předtím násobení reálného čísla číslem u. Tedy nejprve šipku do v otočí o úhel mezi u a kladnou reálnou poloosou a poté šipku velikosti v vynásobí velikostí u. Obecně tedy pro násobení dvou komplexních čísel platí, že násobení sčítá úhly, které dané dvě šipky svírají s reálnou osou, a násobí velikosti. Obdobně dělení bude odčítat úhly a dělit velikosti.

Definice 2. Mějme komplexní číslo x, pak symbolem $\overline{x}$ značíme *komplexně sdružené číslo* k x a jde o komplexní číslo, které dostaneme překlopením x v osové souměrnosti podle reálné osy.

Poznámka 3. Můžeš si rozmyslet, že komplexní sdružování je distributivní prakticky na všem. Například pro komplexní čísla u a v platí, že $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$ nebo $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$.

Cvičení 4. Rozmysli si, že reálná čísla jsou právě ta, pro která platí $x = \overline{x}$. A že součin $x\overline{x}$ je vždy kladný reálný.

Definice 5. (velikost komplexního čísla) *Velikostí* komplexního čísla z nazveme[3] $\sqrt{z\overline{z}}$ a budeme ji značit $|z|$ (z předchozího cvičení víme, že odmocňovaná hodnota je vždy kladné reálné číslo).

Poznámka 6. Pokud jsi se už dříve setkal(a) s komplexními čísly, tato geometrická definice Ti může přijít trochu matoucí. Běžněji (například na středních školách) se komplexní čísla zavádějí pomocí imaginární jednotky i, která je definována jako řešení rovnice $x^2 = -1$. Přestože toto zavedení k pochopení seriálu potřeba nebude a vystačíme si pouze s geometrickou představou komplexních čísel, nastíníme alespoň, jak spolu dané dva pohledy souvisejí a že se vlastně jedná o tutéž věc. Pokud bychom si v naší komplexní rovině definovali souřadnicový systém, pak imaginární jednotka i by se nacházela na souřadnicích $[0, 1]$. Ve škole se zavádí komplexní čísla jako všechna čísla ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla. Čísla a, b tak odpovídají souřadnicím komplexního čísla v dané komplexní rovině. Dále se typicky definují algebraické vlastnosti komplexní čísel – například platí, že $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ nebo $(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$. Tyto vlastnosti si již dokazovat nebudeme, protože pro nás nebudou potřebné. Ale můžeš si rozmyslet, že z geometrické definice komplexních čísel plynou i tyto vlastnosti.

Komplexní dvojpoměr

V prvním díle seriálu jsme si definovali dvojpoměr na různých objektech. Zkusme dvojpoměr bodů na přímce zapsat v řeči komplexních čísel. Mějme čtyři různá kom-

[3] Můžeš si všimnout, že velikost komplexního čísla tak odpovídá velikostí vektoru, který dané komplexní číslo určuje.

plexní čísla A, B, C, D na přímce, pak dvojpoměr (A, B, C, D) je roven

$$\frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}.$$

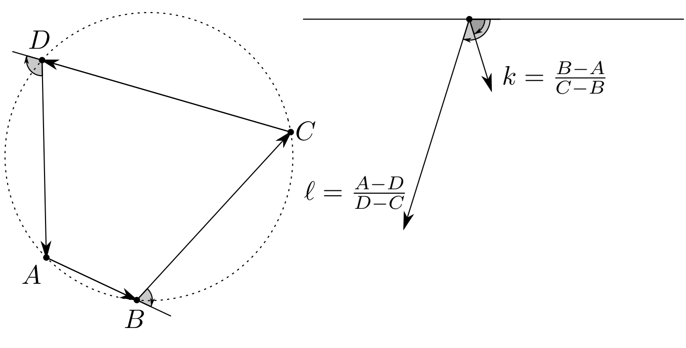
Pokud A, B, C, D leží na přímce, pak velikost výsledného komplexního čísla bude rovna standardnímu dvojpoměru. Zároveň všechna čísla $B-A$, $D-C$, $C-B$, $A-D$ svírají s reálnou osou stejný úhel α. Výsledné komplexní číslo bude tedy s reálnou osou svírat úhel $2\alpha - 2\alpha = 0$, takže bude reálné. Orientace rozdílů je stejná jako orientace úseček v definici z prvního dílu, takže znaménko se také shoduje. Na přímce se tedy komplexní dvojpoměr úplně shoduje se standardním.

Tím, že využíváme komplexní čísla, se už nebudeme omezovat na body na přímce. Tímto výrazem tedy značíme *komplexní dvojpoměr* obecné čtveřice komplexních čísel. Zkus si rozmyslet, že tyto dvojpoměry jsou i v komplexním tvaru jednoznačné, takže $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, právě když $X = Y$.

Pro body, co neleží na přímce, bude hodnota jejich dvojpoměru rovna nějakému komplexnímu číslu. Nás ale bude víc zajímat, kdy může hodnota dvojpoměru vyjít reálné číslo. Už víme, že to platí pro čtyři body na přímce. Pojďme se podívat kdy jindy.

Tvrzení 7. *Reálnou hodnotu dvojpoměru mají čtyři komplexní čísla, právě když leží všechny na jedné přímce nebo kružnici.*

Důkaz. Všimni si, že komplexní číslo $X - Y$ určuje směr přímky XY. Označme podíly $k = \frac{B-A}{C-B}$ a $\ell = \frac{D-C}{A-D}$. Pokud vynásobíme číslo $C - B$ číslem k, dostaneme komplexní číslo $B - A$. Takže z násobení komplexních čísel svírá k s reálnou přímkou stejný úhel, jako je úhel mezi přímkami BC a AB. Aby výsledný dvojpoměr byl reálný, musí svírat k a ℓ s reálnou přímkou úhly α, respektive β takové, že $\alpha + \beta = 0$ modulo $180°$. Takže tato podmínka je ekvivalentní s tím, že v čtyřúhelníku $ABCD$ je součet protilehlých úhlů $180°$, tedy $ABCD$ z obvodového úhlu leží na kružnici nebo na přímce. □



Poznámka 8. Zbylé případy pořadí bodů se dají vyřešit analogicky, nebo celý problém úhlit orientovaně.

V další části seriálu se nám právě z tohoto důvodu bude hodit vnímat kružnice a přímky dohromady jako ten samý objekt.

Různá rozšíření rovin

V prvním díle jsme si zadefinovali rozšíření roviny $\mathbb{R}^2$. V tomto díle se budeme zabývat podobným rozšířením komplexní roviny. K této rovině přidáme jeden *nevlastní bod* v nekonečnu, budeme ho značit ∞. Všechny přímky pak budou tímto bodem procházet. Rovnoběžné přímky se tedy „dotýkají“ v tomto nevlastním bodě. Toto rozšíření nazveme *projektivní komplexní čísla*[4].

Přímky tak můžeme vnímat jako kružnice se středem v nekonečnu. Může se Ti zdát divné, že střed takové kružnice pak na ní leží. To je tím, že v projektivním světě střed kružnice není bodem, který by byl pro kružnici zajímavý.

Dodefinujeme si jak se komplexní sdružení chová s nevlastním bodem $\overline{\infty} = \infty$.

Poznámka 9. Existuje důvod, proč jsme teď přidali jen jeden bod, ale v prvním díle celou přímku. Obecně k prostoru dimenze d potřebujeme přidat prostor dimenze $d-1$, aby se z něj stal projektivní. V prvním díle jsme měli rovinu, kde je každý bod dán dvojicí reálných čísel neboli má dimenzi dva. Tady si sice kreslíme komplexní čísla zase do roviny, ale každý bod nám určuje jedno komplexní číslo, má tedy dimenzi jedna.

Poznámka 10. Doplníme si, jak se chová komplexní dvojpoměr s nevlastním bodem. Analogicky jako v prvním díle zdegeneruje do poměru

$$(A, B, C, \infty) = -\frac{B-A}{C-B} = \frac{A-B}{C-B}.$$

Dávej pozor, že opravdu využíváme jiné rozšíření než v prvním díle. Taky se může stát, že budeme rozšíření kombinovat. Nejdříve si třeba přidáme jeden nevlastní bod, pak chvíli budeme pracovat s tímhle rozšířením, následně ho smažeme a přidáme nevlastní přímku. Takové přidávání a odebírání bodů je většinou v pořádku, jen je občas potřeba si dát pozor, že tím opravdu neztrácíme žádné informace. Třeba když by úloha tvrdila, že nějaké čtyři nevlastní body tvoří harmonickou čtveřici, tak si ji musíme nejdříve někam promítnout, než na ty body zapomeneme.

Přímky a kružnice v tomto novém světě budou tak moc podobné, že si zavedeme pojem pro objekt, který je přímkou nebo kružnicí. Takové objekty budeme nazývat *kružímky*[5]. Všimni si, že kdykoli máme trojici bodů, tak existuje právě jedna kružímka, která jimi prochází. Z předchozího tvrzení ještě navíc víme, že čtyři body mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru, právě když leží na kružímce. Z toho plyne následující tvrzení.

---

[4] Také se občas nazývá *invertivní rovina* či *komplexní projektivní přímka.*

[5] Anglicky se nazývají *clines.*

Tvrzení 11. *Mějme zobrazení f projektivních komplexních čísel takové, že čtyři body mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru, právě tehdy, když jejich obrazy mají reálnou hodnotu komplexního dvojpoměru. Pak toto zobrazení zobrazuje kružímky na kružímky. Speciálně pokud nějaké zobrazení zachovává dvojpoměry, tak zobrazuje kružímky na kružímky.*

Důkaz. Označme A, B, C tři body v komplexní rovině. Pak body X, pro které (A, B, C, X) je reálné, jsou právě ty body, které leží na kružímce procházející body A, B, C. Pro každé takové X tedy platí, že $(f(A), f(B), f(C), f(X))$ je reálné. Z toho ale plyne, že $f(X)$ leží na kružímce určené body $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$. Takže obrazy všech bodů na původní kružímce leží na nové kružímce. Ale protože jsme chtěli, aby byl reálný právě tehdy, tak můžeme tento argument aplikovat i obráceně. Začneme cílovou kružímkou a zobrazíme ji zpět. Tím dostaneme, že výsledkem tohoto zobrazení je opravdu celá kružímka, a ne jen její část. □

Möbiovská zobrazení

Některá standardní zobrazení v rovině se dají snadno popsat pomocí komplexních čísel.

(i) **Posunutí** je jen přičtení nějakého komplexního čísla. Takže $f(x) = x + c$, kde c je komplexní.
(ii) **Stejnolehlost** se středem v počátku je vynásobení reálným číslem. Takže $f(x) = rx$, kde r je reálné.
(iii) **Rotace** se středem v počátku je vynásobení nějakým komplexním číslem, které má velikost jedna. Takže $f(x) = kx$, kde $|k| = 1$.
(iv) **Spirální podobnost** se středem v počátku je vynásobení obecným komplexním číslem. Takže $f(x) = cx$ pro c komplexní.

Rozmysli si, že všechna zatím zmíněná zobrazení zachovávají komplexní dvojpoměry. Zaměříme se ještě na jednu funkci v komplexních číslech. Konkrétně na *komplexní inverz*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Toto zobrazení není definované pro x rovné počátku nebo nevlastnímu bodu, takže si ho rozšíříme tak, že $f(0) = \infty$ a $f(\infty) = 0$.

Tvrzení 12. *Komplexní inverz zachovává dvojpoměry.*

Důkaz. Do vzorce pro výpočet komplexního dvojpoměru dosadíme čtveřici $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$:

$$\frac{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D}\right)} = \frac{\left(\frac{A-B}{A\cdot B}\right)\left(\frac{C-D}{C\cdot D}\right)}{\left(\frac{B-C}{B\cdot C}\right)\left(\frac{D-A}{D\cdot A}\right)} = \frac{(A-B)(C-D)}{(B-C)(D-A)} = \frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}.$$

Takže pro každé čtyři body A, B, C, D platí $(A,B,C,D) = \left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}\right)$. Pro úplné dokončení důkazu je potřeba si rozmyslet, že tuto vlastnost splňuje, i když jeden z bodů je nevlastní. □

Z tohoto tvrzení, jak už víme, plyne, že komplexní inverz zobrazuje kružímky na kružímky. To nám dává lepší geometrickou představu, jak se komplexní inverz chová.

Prohlédněme si nyní náš arzenál komplexních funkcí, které zachovávají dvojpoměry, a tedy i kružímky:

(i) $f_1(x) = x + c$,
(ii) $f_2(x) = cx$,
(iii) $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

Komplexní číslo c zde může být libovolné. Všechny funkce, které vzniknou jejich složením, pak také zachovávají dvojpoměry i kružímky. Těmto funkcím se říká *Möbiovská zobrazení*[6].

Tvrzení 13. *Všechna Möbiovská zobrazení se dají zapsat ve tvaru lineární lomené funkce $\frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou komplexní čísla. A všechna zobrazení tohoto tvaru, která jsou bijektivní, určují Möbiovská zobrazení.*

Tvrzení 14. *Mějme komplexní čísla A, B, C, A', B', C'. Pak existuje právě jedno Möbiovské zobrazení, které zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$ a $C \to C'$.*

Důkaz. Takové zobrazení musí zachovávat dvojpoměry neboli pro všechna X platí, že $(A,B,C,X) = (A',B',C',X')$. Z jednoznačnosti dvojpoměrů existuje nanejvýš jedno zobrazení, které tuto podmínku splňuje. Vyjádříme X' ze vztahů

$$(A,B,C,X) = (A',B',C',X'),$$
$$\frac{(B-A)(X-C)}{(C-B)(A-X)} = \frac{(B'-A')(X'-C')}{(C'-B')(A'-X')}.$$

Komplexní čísla A, B, C, A', B', C' jsou pro nás nějaké konstanty. Převedeme oba zlomky na stejnou stranu. Po roznásobení výrazu jmenovateli a roznásobení závorek tedy dostaneme výraz ve tvaru:

$$u_1XX' + u_2X + u_3X' + u_4 = 0,$$

kde u_1, u_2, u_3 a u_4 jsou nějaké konstanty v komplexních číslech, protože vznikly násobením a sčítáním konstant. To ale umíme upravit do tvaru

$$v_1(X+v_2)(X'+v_3) - v_4 = 0$$

pro nějaká konstantní v_1, v_2, v_3, v_4. Z toho už umíme vyjádřit X':

$$(X'+v_3) = \frac{v_4}{v_1(X+v_2)},$$
$$X' = \frac{v_4}{v_1X - v_1} - v_3,$$

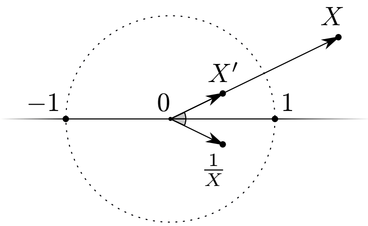
[6] Pro geometrickou představu doporučujeme video *youtube.com/watch?v=0z1fIsUNhO4*.

což je tvar nějaké lineární lomené funkce, takže se jedná o Möbiovské zobrazení. □

Dokonce všechna prostá zobrazení zachovávající dvojpoměry v komplexních číslech jsou Möbiovská. Rozmysli si, že z tvrzení 14 plyne, že pokud se dvě Möbiovská zobrazení shodují na obrazu tří různých bodů, tak už se shodují na všech bodech.

Inverze

Podívejme se znovu na zobrazení $\frac{1}{x}$. To každému komplexnímu číslu přiřadí jiné komplexní číslo, které svírá s reálnou přímkou opačný úhel. Takže pokud toto zobrazení složíme s překlopením podle reálné přímky, bude navíc splňovat, že přímka vedená body x a $f(x)$ vždy prochází počátkem. Toto zobrazení si ještě obohatíme o stejnolehlost se středem v počátku, výsledným zobrazením se stane *inverze.* Protože vznikne složením s komplexním sdružením, nejedná se již o Möbiovské zobrazení.



Definice 15. *Inverzí* nazveme zobrazení projektivních komplexních čísel ve tvaru

$$f(x) = \overline{\left(\frac{k}{x}\right)} = k/\overline{x},$$

kde k je reálné číslo, kterému říkáme *koeficient inverze.* Protože si můžeme počátek vždy umístit v rovině, kam chceme, zadefinujeme si *střed inverze* jako bod, který budeme považovat za počátek.

Všimni si, že pokud je koeficient ve tvaru $a \cdot b$, pak inverze zobrazí komplexní číslo o velikosti a na komplexní číslo o velikosti b a obráceně.

Tvrzení 16. *Mějme inverzi s kladným koeficientem k, pak množina pevných bodů je kružnice.*

Důkaz. Hledáme všechna X taková, že $k/\overline{X} = \overline{\left(\frac{k}{X}\right)} = X$ neboli $X\overline{X} = k$. Číslo $X\overline{X}$ je rovno $|X|^2$, takže $|X| = \sqrt{k}$. Množina všech takových X tedy leží na kružnici se středem 0 a poloměrem $\sqrt{k}$. Rozmysleme si, že pro každý bod této kružnice už pak platí, že se zobrazí sám na sebe a množinou všech takovýchto bodů je skutečně celá kružnice. □

Z tohoto důvodu se inverzi často říká *kruhová inverze.* A často se nedefinuje svým středem, ale právě touto kružnicí. Oba pohledy na inverzy mají různá využití. Všimni si, že kruhová inverze se omezuje jen na kladné koeficienty. Na druhou stranu se dá rozšířit kruhová inverze o inverzi podle přímky. Chceme nějaké Möbiovské zobrazení s komplexním sdružením, které bude mít jako množinu pevných bodů přímku. Tím je překlopení podle dané přímky. Pokud tedy budeme mluvit o inverzi podle kružímky, může daná kružímka být i přímkou a pak se jedná o překlopení.

Všimni si, že teď pod pojmem inverze myslíme dvě zobrazení. Jedno je inverze daná středem a koeficientem. Ta neumí inverzi podle přímky. Druhá je inverze podle kružímky. Ta pro změnu nepovoluje inverze se záporným koeficientem.

Tvrzení 17. *Inverze zobrazuje kružímky na kružímky.*

Důkaz. Stačí si všimnout, že k/x zobrazuje kružímky na kružímky a překlopení také.

Zkusme si ale rozmyslet, co se děje s dvojpoměry po inverzi. Zobrazení $\frac{k}{x}$ je zachová. Zbývá aplikovat komplexní sdružení. Tím se akorát na výsledný dvojpoměr aplikuje komplexní sdružení. To znamená, že inverze zachovává reálné hodnoty komplexních dvojpoměrů a komplexní hodnoty komplexně sdruží. □

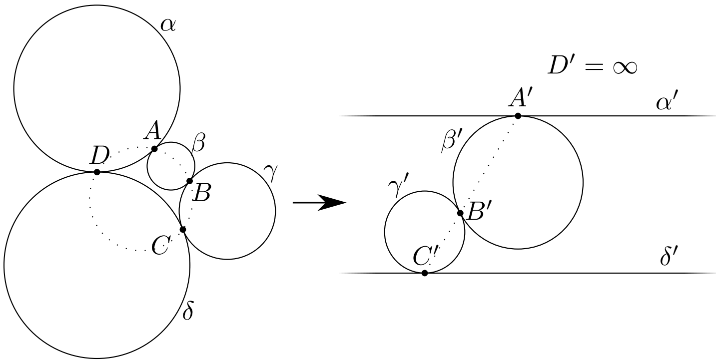
Pozorování 18. *V inverzi je obrazem kružnice procházející počátkem přímka, protože se zobrazí na kružímku procházející nevlastním bodem.*

Tohle pozorování je jeden ze základů, k čemu se inverze běžně v geometrii dá použít. Pokud úloha obsahuje příliš mnoho kružnic procházejících jedním bodem, tak je inverzí můžeme se středem v daném bodě změnit na přímky. Pojďme si to ukázat!

Příklad 19. Mějme čtyři kružnice α, β, γ, δ takové, že žádné dvě se neprotínají a α se dotýká β v A. Obdobně se β dotýká γ v B, kružnice γ se dotýká δ v C a konečně δ se dotýká α v D. Dokaž, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Řešení. Úlohu zinvertujeme se středem v D. Z kružnic α a δ se stanou přímky. Protože se dotýkají, stanou se z nich rovnoběžné přímky α' a δ'. Kružnice β se zobrazí na kružnici, co se dotýká α' v A'. Kružnice γ se zobrazí na kružnici, která se dotýká δ' v C' a β' v B'. Chceme ukázat, že A', B', C', D' leží na jedné kružímce, ale D' je nevlastní, takže chceme, aby A', B', C' ležely na přímce.

Uvážíme stejnolehlost se středem v B' zobrazující β' na γ'. Stejnolehlost zachovává rovnoběžky, takže zobrazí α' na δ'. Takže zobrazí i A' na C'. To ale znamená, že B' leží na přímce $A'C'$, což jsme chtěli dokázat.



Úloha 20. Mějme dvě kolmé přímky p, q s průsečíkem O. Kružnice ω_1 a ω_3 mají střed na p a prochází O. Kružnice ω_2 a ω_4 mají střed na q a prochází O. Označme průsečíky různé od O kružnic $A = \omega_1 \cap \omega_2$, $B = \omega_2 \cap \omega_3$, $C = \omega_3 \cap \omega_4$ a $D = \omega_4 \cap \omega_1$. Dokaž, že A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Úloha 21. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

(i) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,

(ii) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Dokaž, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají.

Tvrzení 22. *Pokud je P středem inverze a čárkami značíme obrazy bodů, pak platí $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle B'A'P|$.*[7]

Důkaz. Zapíšeme úhel pomocí dvojpoměru s nevlastním bodem. Komplexní číslo $(A, B, P, \infty) = \frac{A-B}{P-B}$ svírá s reálnou přímkou úhel $\sphericalangle ABP$. Po inverzi se dvojpoměr komplexně sdruží, takže

$$(A, B, P, \infty) = \overline{(A', B', \infty, P)}.$$

Následně využijeme permutování dvojpoměrů z prvního dílu a nakonec upravíme znovu pomocí dvojpoměru s nevlastním bodem

$$\overline{(A', B', \infty, P)} = \overline{\left(\frac{1}{(P, A', B', \infty)}\right)} = \overline{\left(\frac{B' - A'}{P - A'}\right)}.$$

Komplexní sdružení nemění velikost svíraného úhlu. Výsledné komplexní číslo tak svírá s reálnou osou úhel $\sphericalangle B'A'P$. Takže $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle B'A'P|$. □

Poznámka 23. Všimni si, že z toho plyne, že body A, B, A', B' leží na kružnici pro všechna A, B.

[7] Standardní důkaz tohoto tvrzení je přímočaré využití mocnosti, protože ji ale v seriálu moc nevyužíváme, ukážeme si méně tradiční důkaz.

Poznámka 24. Všimni si, že z předchozího důkazu se dá zjistit vlastnosti nějakých poměrů po inverzi. Protože k dokázání úhlu využíváme silnější podmínku.

Toto tvrzení o inverzi z ní dělá ještě silnější nástroj, protože umožňuje přenášet úhly. Občas se už může dokonce vyplatit využít inverzi, i když v zadání žádná kružnice není. Při invertování se hodí si rozmyslet, kolik tak kružnic navíc nám z přímek vznikne a jestli spíš pomůžou, nebo uškodí. Přímky, na kterých leží jen dva body, jako třeba strany trojúhelníka invertovat nemusíme, protože nám nedávají žádnou informaci navíc.

Úloha 25. Mějme kružnice ω_1 a ω_2, které se protínají v bodech A, B. Na přímce AB leží bod O. Kružnici se středem O a poloměrem $|OA|$ označíme Ω. Dále nechť Ω protíná ω_1 v bodech A, X_0. Přímka X_0A protne ω_2 v X_1. Analogicky, Ω protne ω_2 v A, Y_0. Přímka Y_0A protne ω_1 v Y_1. Průsečík Ω s přímkou AB různý od A označíme Z. Dokaž, že $|\sphericalangle ZX_1A| = |\sphericalangle ZY_1A|$.

Úloha 26. (Shooting lemma) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB. střed oblouku AB označíme $\check{S}$. Uvažme dvě přímky p, q procházející $\check{S}$. Přímka p protne ω podruhé v X_0 a BC v X_1. Obdobně q protne ω podruhé v Y_0 a BC v Y_1. Dokaž, že X_0, X_1, Y_0 a Y_1 leží na kružnici.

Úloha 27. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a uvnitř jeho stran AC, BC po řadě body D, E. Dokaž, že paty výšek z bodu C na přímky AB, AE, BD, DE leží na jedné kružnici.

Úloha 28. Nechť se kružnice k, l se středy S, T protínají ve dvou různých bodech A, B. Nechť přímka AS protíná l v bodě $C \neq A$. Nechť přímka AT protíná k v bodě $D \neq A$. Dokaž, že přímka AB prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ACD

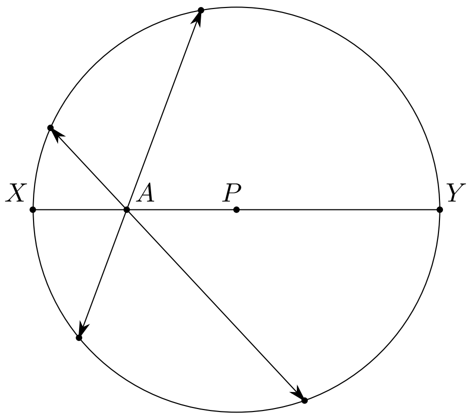
Úloha 29. (IMO 1996) Nechť P je bod uvnitř ABC takový, že

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Dokaž, že osy úhlů $\sphericalangle ABP$ a $\sphericalangle ACP$ protínají přímku AP v jednom bodě.

Tvrzení 30. *Mějme v rovině kružnici ω a bod A, který na ni neleží. Pak existuje inverze se středem v A taková, že obraz ω je znovu ω. Neboli že existuje inverze, která kružnici ω „překlápí“ skrz bod A.*

Důkaz. Označme P střed ω. Uvažme přímku procházející skrz body PA. Ta protne ω v bodech X, Y. Pak existuje inverze, se středem A a koeficientem $|AX| \cdot |AY|$ zobrazující $X \to Y$. Kružnice ω je symetrická podle přímky AP. Protože P na téhle přímce leží, bude i výsledná kružnice ω' symetrická podle AP. Takže i výsledná kružnice je kružnice nad průměrem XY. □



Poznámka 31. Koeficientu takové inverze se středem v A, která ω „překlápí“, se také říká *mocnost* bodu A ke kružnici ω.

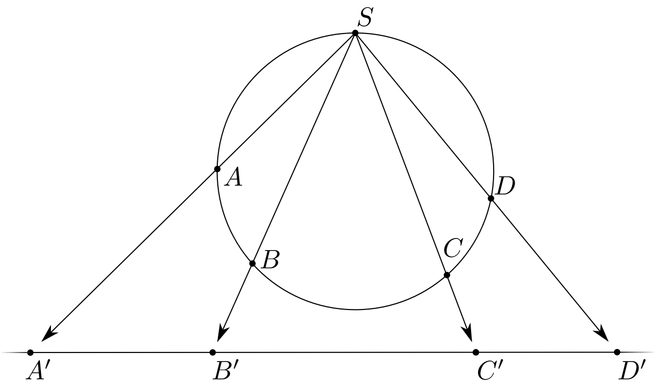
Dvojpoměry na kružnicích

Komplexní dvojpoměr jsme navrhli tak, aby se shodoval se standardním dvojpoměrem na přímce. Jenže v prvním díle jsme si definovali dvojpoměr i na kružnici. Komplexní dvojpoměr na kružnici nám vyšel reálný, ale chovají se obě definice na kružnici opravdu stejně? Jen pro rozlišení v této části budeme značit na chvíli definici dvojpoměru z prvního dílu pomocí hranatých závorek $[A, B, C, D]$.

Uvažme čtyři komplexní čísla A, B, C, D ležící na kružnici. Pak libovolná inverze se středem S na ω zobrazí ω na nějakou přímku. Na této přímce víme, že se naše dvě definice chovají stejně. Označíme-li tedy čárkami obrazy v této inverzi, pak $(A', B', C', D') = [A', B', C', D']$. Protože inverze zachovává reálné hodnoty komplexních dvojpoměrů, tak platí $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$. Z prvního dílu víme, že dvojpoměr na kružnici získáme pomocí projekce nějakého dvojpoměru na přímce skrz bod na kružnici. Neboli

$$[A', B', C', D'] = [SA', SB', SC', SD'] = [A, B, C, D].$$

Poslední rovnost plyne z toho, že v inverzi platí, že S, X a X' leží na přímce. Takže $[A, B, C, D] = (A, B, C, D)$. $\square$



Takže už můžeme v klidu používat dvojpoměry na kružnicích a nemusíme se odkazovat na to které, protože se obě definice chovají stejně. Pojďme se s tímto novým vzhledem znovu podívat na harmonické čtyřúhelníky.

Jak už z prvního dílu víme, harmonické čtyřúhelníky jsou ty, které mají hodnotu dvojpoměru rovnou -1. Pojďme se podívat, co nového o nich víme, když využijeme komplexní dvojpoměr.

Tvrzení 32. *Pro harmonický čtyřúhelník platí $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$.*

Důkaz. To, že je daný čtyřúhelník harmonický, znamená, že hodnota komplexního dvojpoměru je rovna -1 neboli

$$\frac{(B-A)\cdot(D-C)}{(C-B)\cdot(A-D)} = -1.$$

Takže

$$\frac{|B-A|\cdot|D-C|}{|C-B|\cdot|A-D|} = 1,$$

což po pronásobení $|C-B|\cdot|A-D|$ dává přesně rovnost, kterou jsme chtěli ukázat. □

Skládáme inverze

Tvrzení 33. *Složení dvou inverzí, které mohou mít různé středy, je Möbiovské zobrazení.*

Důkaz. Inverzi se středem v P můžeme zapsat v rovině s počátkem 0 jako

$$\overline{\left(\frac{k}{x-P}\right)} + P.$$

Když složíme dvě taková zobrazení, tak se dvě komplexní sdružení vyruší a zbyde nějaká lineární lomená funkce neboli Möbiovské zobrazení. □

Lemma 34. (Kouzelné inverzní lemma – KIL) *Řekneme, že konfigurace je* hezká, *pokud obsahuje kružímku k a body A, B, které jsou svoje inverzy podle k. Pak pokud zobrazíme hezkou konfiguraci pomocí jakékoli inverze f, dostaneme znovu hezkou konfiguraci.*

Důkaz. Čárkou značíme obrazy v inverzi f.

Označme g_k inverzi podle k a $g_{k'}$ inverzi podle k zobrazeného pomocí f. Dále označme $A' = f(A)$ a $B' = f(B)$. Zobrazení $f(g_k(X))$ je Möbiovské, protože se jedná o složení dvou inverzí. Obdobně zobrazení $g_{k'}(f(X))$ je Möbiovské. Podíváme se na obraz nějakého bodu M ležícího na k.

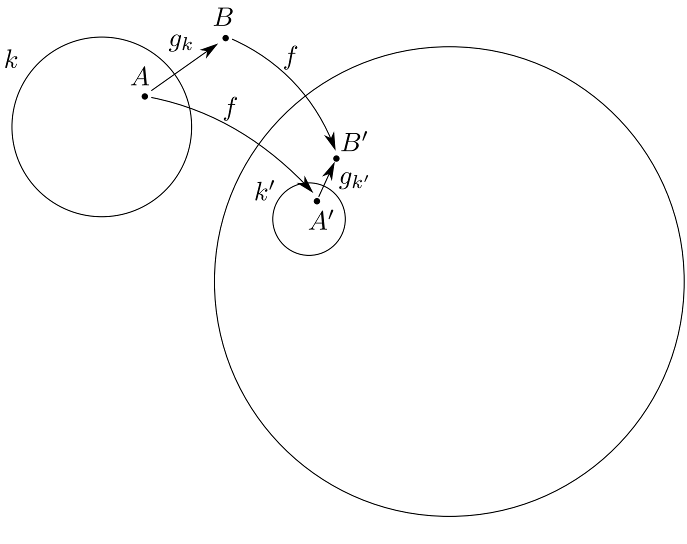
(i) Nejprve se podívejme na zobrazení $f(g_k(X))$. Protože M leží na k, tak se zobrazí pomocí $g_k(X)$ sám na sebe. Takže v tomto zobrazení $M' = f(M)$.

(ii) Podle $g_{k'}(f(X))$ nejdříve zobrazíme M pomocí f. Tím dostaneme $M' = f(M)$. Pak zobrazíme M' podle $g_{k'}$. Ale protože M' leží na k', tak se zobrazí sám na sebe.

Obě zobrazení se shodují na obrazech alespoň tří bodů na k a jsou Möbiovská, takže už se shodují na všech bodech. Tedy

$$\begin{aligned} f(g_k(A)) &= g_{k'}(f(A)), \\ f(B) &= g_{k'}(A'), \\ B' &= g_{k'}(A'). \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že B' je opravdu obraz A' podle k'. Neboli tvoří hezkou konfiguraci. □



Příklad 35. Mějme kružnici ω se středem O a bod A vně této kružnice. Kružnice δ se středem A a poloměrem $|AO|$ protne ω v bodech P, Q. Označme A' invertované A podle kružnice ω. Dokažte, že PQ je osa úsečky $A'O$.

Řešení. Konstrukce tvořená kružnicí δ, bodem A a bodem v nekonečnu ∞ tvoří hezkou konfiguraci. Tu zinvertujeme podle ω. Z δ se stane přímka, protože prochází středem ω, konkrétně přímka PQ. Z bodu A se stane A' a z ∞ se stane O. Takže z tvrzení *KIL* je O obraz A' podle PQ. To ale už víme, že je překlopení. Takže PQ je osa $A'O$.

Poznámka 36. Z tvrzení *KIL* obecně plyne, že pokud se úloha zabývá jen otázkou inverzů, můžeme ji jakkoli zinvertovat a dostaneme ekvivalentní úlohu.

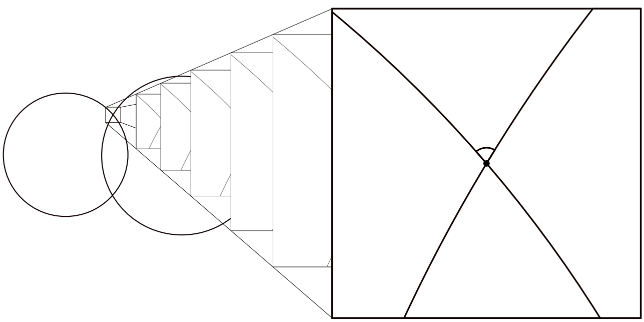
Úloha 37. V trojúhelníku ABC označme ω kružnici se středem A a poloměrem $|AB|$. Dále nechť je D inverzí bodu C podle ω. Jako X označme překlopené A podle přímky DB. Nakonec budiž O inverzí X podle ω. Dokaž, že O je středem kružnice opsané ABC.

Úloha 38. Mějme harmonický čtyřúhelník $ABPC$. Označme ω kružnici procházející A a dotýkající se BC v B. Analogicky Ω je kružnice procházející A a dotýkající se BC v C. Druhý průsečík ω a Ω označíme X. Dokaž, že X a P jsou osově souměrné podle BC.

Úhly mezi kružímkami

Zadefinujeme si úhel mezi dvěma kružnicemi, které se protínají, jako úhel svíraný jejich tečnami ze společného bodu. Představme si to tak, že se podíváme opravdu blízko jejich průsečíku. Při přiblížení vypadají skoro jako přímky, takže svírají nějaký úhel. Analogicky úhel mezi kružnicí a přímkou je úhel mezi tečnou v průsečíku s danou přímkou.

Všimni si, že pokud se dvě kružnice protínají ve dvou bodech, tak v obou mají mezi sebou stejný úhel.



Tvrzení 39. *Möbiovská zobrazení zachovávají úhly mezi kružímkami.*

Pozorování 40. *Z předchozího tvrzení plyne, že inverze úhly mezi kružímkami překlápí, takže také zachovává jejich velikost.*

Formální důkaz tohoto tvrzení je nad rámec seriálu. Ukážeme si ale náhled, proč by něco takového mělo platit. Velikost úhlu je lokální vlastnost neboli velikost úhlu umíme poznat, ať se na bod díváme jakkoli blízko, nezajímá nás vzdálené okolí v obrázku. Když se podíváme na Möbiovské zobrazení „hodně blízko“, chová se jako afinní. Okolí bodu nějak pootočí a zachová přímky. Ale zároveň, protože je Möbiovské, zachovává kružnice. Ale všechna afinní zobrazení, která zachovávají kružnice, jsou podobná zobrazení, takže zachovávají i úhly.

Kolmé kružnice

Toto tvrzení dává vzniknout kružnicím, které jsou na sebe kolmé. Ty se v mnoha ohledech chovají pěkně.

Tvrzení 41. *Kružnice ω a δ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když obraz δ v inverzi podle ω je zase δ.*

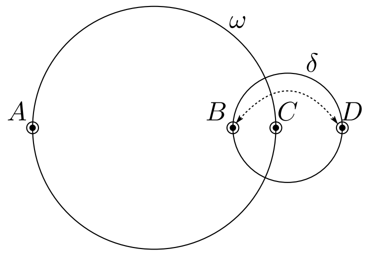
Důkaz. Protože se úloha zabývá jen otázkou inverzů, můžeme podle tvrzení *KIL* celou situaci jakkoli zinvertovat a dostaneme ekvivalentní úlohu. Zinvertujeme celou úlohu podle jednoho průsečíku ω a δ. Tím se z kružnic stanou přímky. Obraz δ' podle ω' je δ', právě když jsou tyto přímky na sebe kolmé. Takže δ se zobrazí na δ podle ω, právě když jsou kolmé. □

Tvrzení 42. *Mějme kružnice ω, δ, které se protínají. Přímka p prochází středy obou z nich a protíná ω v A, C a δ v B, D. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *Kružnice ω a δ jsou na sebe kolmé.*
(ii) *Čtveřice bodů (A, B, C, D) je harmonická.*

Důkaz. Označme B' obraz B v inverzi podle ω. Pak protože inverze zachovává dvojpoměry, víme, že $(A, B, C, B') = (A, B', C, B)$. Z přepočítávání dvojpoměrů z prvního dílu dostaneme $(A, B, C, B') = \frac{1}{(A,B',C,B)}$. Takže když označíme $x = (A, B, C, B')$, platí $x = \frac{1}{x}$. Tedy x je rovno 1 nebo -1. Ale kdyby $x = 1$, tak A, B, C, B' nejsou různé body, z čehož plyne $x = -1$. Takže (A, B, C, B') je harmonická.

Tudíž (A, B, C, D) je harmonická, právě když $D = B'$, což nastane, právě když ω v inverzi zobrazí δ samu na sebe neboli právě když jsou na sebe kolmé. □



Poznámka 43. Tento trik, ve kterém jsme projektivně zobrazili (A, B, C, D) na nějak zpermutovanou čtveřici A, B, C, D a tím ukázali, že je harmonická, může občas usnadnit dokazování harmonických čtveřic. Zkus si podobným způsobem dokázat větu *Ceva–Menelaus* z prvního dílu jen pomocí promítání dvojpoměrů.

Úloha 44. Mějme kružnici ω se středem O. Na ω leží bod S. Na polopřímce OS leží bod X. Dále X' je obraz bodu X v inverzi podle ω. Na ω leží bod A. Dokaž, že AS je osa úhlu XAX'.

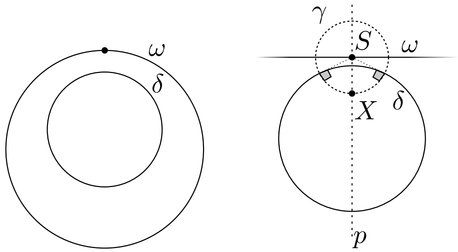
Úloha 45. Mějme dvě kolmé kružnice ω a δ se středy O a S. Přímka OS protíná ω v A tak, že O leží mezi S a A. Jeden průsečík ω a δ označíme X. Přímka AX protne δ podruhé v Y. Dokaž, že $YS \perp OS$.

Lemma 46. *Pro dvě kružnice ω a δ, které se neprotínají, existuje Möbiovské zobrazení, které je zobrazí na soustředné kružnice.*

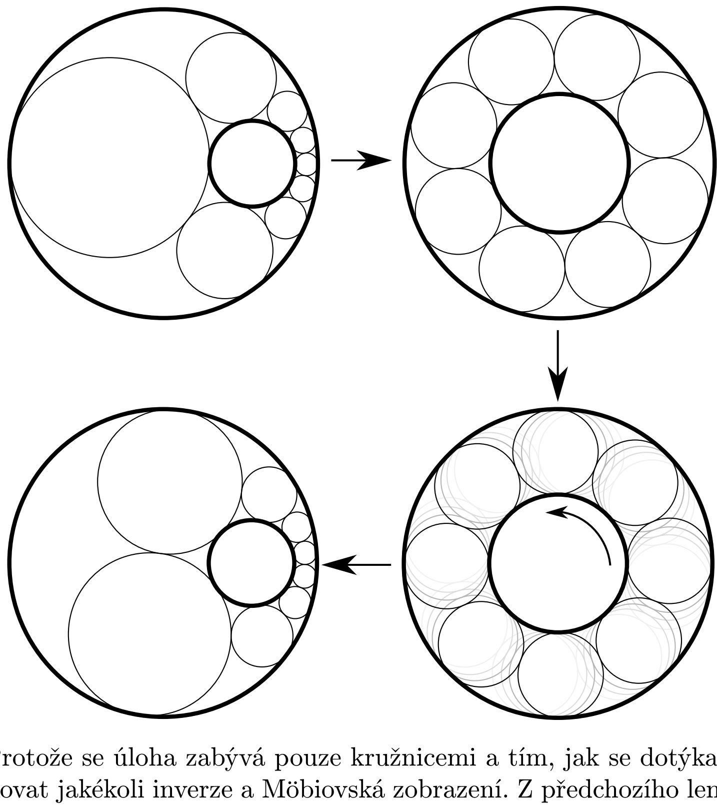
Důkaz. Všimni si, že pokud jsou dvě kružnice soustředné, tak mají více společných os symetrií. Pokusíme se tedy sestrojit pomocí inverzí dvě přímky, které jsou obě kolmé na zadané kružnice. Po těchto zobrazeních už tyto kružnice musí být soustředné.

Začneme inverzí se středem v jakémkoli bodě na kružnici ω. Tím se z ω stane přímka a δ bude kružnice, která ω neprotíná. Označme S patu výšky ze středu kružnice δ na přímku ω. Sestrojíme kružnici γ kolmou na δ se středem v S. Tu sestrojíme tak, že z S vedeme tečny SK, SL k δ kružnice o poloměru $|SK|$ je pak kolmá na δ.

Označme p přímku kolmou na ω procházející S. Pak platí tyto kolmosti: $p \perp \gamma$, $p \perp \omega$, $p \perp \delta$, $\gamma \perp \delta$, $\gamma \perp \omega$. Označme X jeden z průsečíků γ a p a invertujme se středem v X. Tím se z γ a p stanou kolmé přímky. Z ω a δ budou znovu kružnice. Přímky γ i p jsou na obě kružnice kolmé neboli ω a δ jsou soustředné. Toto zobrazení jsme dostali jako složení dvou inverzí, tedy je Möbiovské. $\square$



Věta 47. (Steinerovo porisma) *Mějme dvě kružnice ω a Ω, které se neprotínají a mezi ně se dá vepsat pás kružnic, které se navzájem dotýkají. Pak ať nakreslíme první kružnici pásu kdekoli tak, aby se dotýkala ω i Ω, tak tato kružnice je součástí nějakého uzavřeného kružnicového pásu, který se dotýká ω i Ω.*



Důkaz. Protože se úloha zabývá pouze kružnicemi a tím, jak se dotýkají, můžeme na ni aplikovat jakékoli inverze a Möbiovská zobrazení. Z předchozího lemmatu zobrazíme kružnice ω a Ω na soustředné. V takovém případě můžeme získat jakýkoli nový kružnicový pás pouhým otočením již známého pásu podle středu ω. Aplikováním inverzního Möbiovského zobrazení dostaneme zpět původní konfiguraci s novým pásem. □

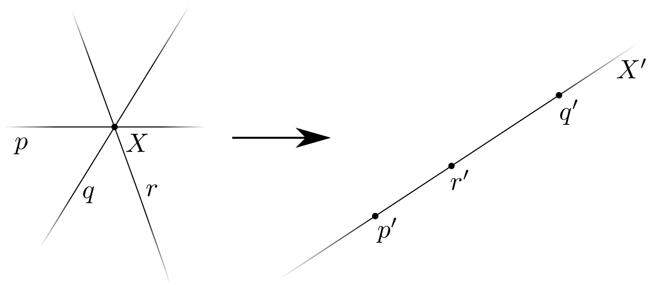
Dualita

Poznámka 48. V této části seriálu se vrátíme do rozšíření roviny z prvního dílu a nebudeme tedy používat komplexní čísla.

Obecný princip duality

Body a přímky v rovině se chovají do určité míry podobně, jenom „obráceně“. Jakékoli dva různé body jednoznačně určují přímku a naopak jakékoli dvě nerovnoběžné přímky mají jednoznačný průsečík. V následující definici si zavedeme „prohazování“ přímek a bodů.

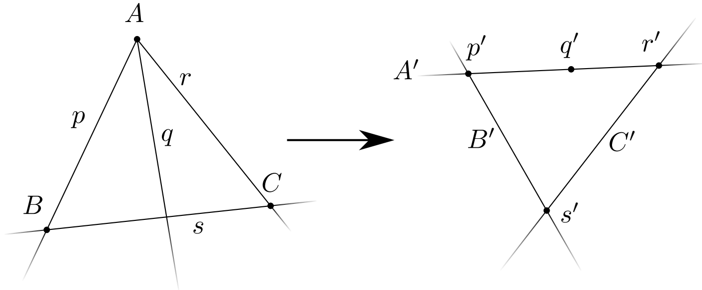
Definice 49. *Diagramem*[8] $\mathcal{D}$ rozumíme nějakou množinu přímek a množinu bodů. Duální diagram $\mathcal{D}'$ pak je takový diagram, ve kterém každému bodu A v $\mathcal{D}$ odpovídá duální **přímka** A' v $\mathcal{D}'$, podobně každé přímce p v $\mathcal{D}$ odpovídá duální **bod** p', a navíc kdykoli bod A leží na přímce p, tak bod p' leží na přímce A'.



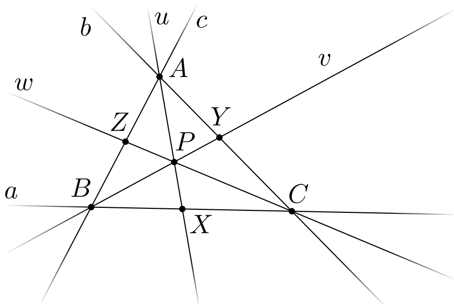
Příklad 50. Mějme tři přímky p, q, r procházející bodem A. Na p leží bod B a na r leží bod C. Přímku BC označme s. Zdualizuj diagram.

Řešení. Nakreslíme si přímku A'. Protože p, q, r procházejí bodem A, tak p', q', r' leží na A'. Tak si je dokreslíme. Na p leží B, což znamená, že B' prochází bodem p'. Analogicky C' prochází r'. Jako s je označena přímka BC, takže v duálním diagramu je s' průsečík B', C'.

[8]Víte, kolik váží jeden řecký bůh? – Jeden diagram :D.



Cvičení 51. Zkus si překreslit následující obrázek tak, že nahradíš přímky za body.



V dosavadních příkladech jsme dualizovali pouze konečné diagramy. V následující sekci si ukážeme, že toho ve skutečnosti můžeme dualizovat mnohem víc. Ukáže se, že celá projektivní rovina je sama k sobě duální.

Tento pohled na dualitu budeme v dalších kapitolách dost využívat, takže jestli se cítíš trochu nejistě, zkus si překreslit nějaké další obrázky. Teď si ukážeme, jak takovéto prohození bodů a přímek celé roviny udělat. Geometricky si popíšeme, jakou přesně přímku přiřadíme kterému bodu.

Definice 52. (skalární součin) Uvažme rovinu s počátkem P a v ní dva body A a B různé od počátku. Bod B kolmo promítneme na přímku PA a projekci označíme B_0. Pak *skalární součin* $A \cdot B$ definujeme jako součin $PA \cdot PB_0$, kde vzdálenosti bereme orientovaně, tedy pokud P leží mezi A, B_0, bude hodnota skalárního součinu záporná. Rozmysli si, že to můžeme zapsat jako $A \cdot B = |PA| \cdot |PB| \cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi PA a PB. Z toho si všimni, že je skalární součin symetrický neboli $A \cdot B = B \cdot A$.

Poláry

Nyní už máme nástroj, který nám umožňuje splnit naši myšlenku obecné duality. Bodu A v rovině přiřadíme množinu A' všech bodů X splňujících $A \cdot X = 1$. Projekce všech takových bodů na polopřímku PA musí mít velikost $\frac{1}{|PA|}$. Označme B bod na polopřímce PA takový, že $|PB| = \frac{1}{|PA|}$. Pak A' obsahuje všechny body na přímce kolmé na PA procházející bodem B. Takže jsme bodu A přiřadili přímku A'. Přímka A' se nazývá *polárou* A a bod A se nazývá *pólem* A'. Pro každou přímku, která neprochází počátkem, existuje pól.

Tvrzení 53. *Nechť $\mathcal{D}$ značí diagram obsahující všechny body v rovině kromě počátku, a všechny přímky v rovině neprocházející počátkem. Pak zobrazení, které zobrazí každý bod na jeho poláru a každou přímku na její pól, definuje dualitu diagramu $\mathcal{D}$ se sebou samotným.*

Důkaz. Uvažme bod A a přímku p diagramu $\mathcal{D}$ tak, že A leží na p. Potřebujeme dokázat, že p' leží na A'. Jelikož A leží na poláře bodu p', tak $A \cdot p' = 1$. To z definice poláry bodu A současně znamená, že bod p' leží na poláře bodu A neboli na A'.[9] □

Cvičení 54. Rozmysli si, že pokud dodefinujeme poláru počátku jako nevlastní přímku a poláru jakéhokoli nevlastního bodu A jako přímku procházející počátkem kolmou na směr A, tak dostaneme dualitu celé projektivní roviny se sebou samotnou.

Podobně jako jsme inverzi skládali se stejnolehlostí a koeficientu dané stejnolehlosti říkali koeficient inverze, budeme i dualitu skládat se stejnolehlostí. Vzniká nám tím pojem *koeficient duality*.

Definice 55. Definujeme polárovou dualitu se středem v P. Posuneme P do počátku. Pak tato dualita bude definována tak, že bodu A přiřadí množinu všech bodů X takových, že $A \cdot X = k$, kde k je nenulové reálné číslo, kterému říkáme *koeficient duality.*

Tvrzení 56. *Mějme v rovině body A, P a přímku p, která jimi neprochází a je kolmá na AP. Pak existuje dualita se středem P, která zobrazí A na p.*

Poláry podle kružnice

Všimni si, že polárová dualita s kladným koeficientem k zobrazí bod, který leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{k}$, na přímku procházející daným bodem, která je tečnou k dané kružnici.

Analogicky jako jsme mohli používat pojem inverze podle kružnice, můžeme nyní používat pojem polárová dualita podle kružnice.

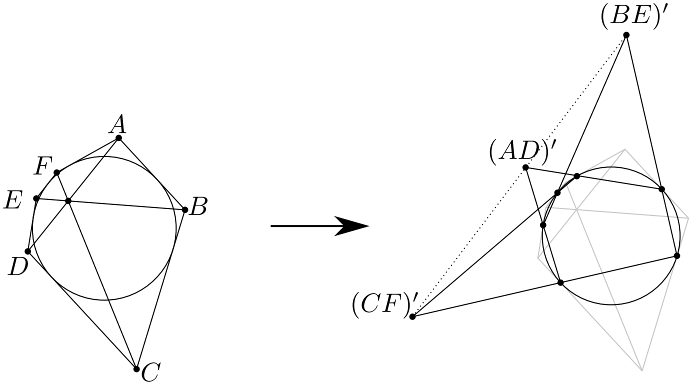
Tvrzení 57. *Mějme bod A vně kružnice ω. Označme X, Y body dotyku tečen vedených bodem A ke kružnici ω. Pak XY je polárou bodu A podle ω.*

Důkaz. Víme, že AX je polárou X a AY je polárou Y. Protože přímka XY je přímkou definovanou body X, Y a bod A je bodem definovaným přímkami X', Y', tak z principu duality je XY polárou A. □

[9] Tvrzení také známé pod názvem: „Polára bodu na poláře prochází pólem původní poláry“. V anglické literatuře označováno jako La Hire's Theorem.

Věta 58. (Brianchon) *Mějme tečnový šestiúhelník $ABCDEF$. Pak přímky AD, BE a CF prochází jedním bodem.*

Důkaz. Uvažme dualitu podle kružnice vepsané. Označme body dotyku vepsané s AB, BC, CD, DE, EF, FA postupně I, J, K, L, M, N. Pak $A' = IN$. Analogicky známe poláry i zbylých bodů šestiúhelníka. Pól přímky AD je průsečíkem polár A a D. Což jsou dvě protější strany šestiúhelníka $IJKLMN$. Tvrzení, že AB, BC, CD prochází jedním bodem, znamená, že jejich póly leží na jedné přímce. Ale to je přesně Pascalova věta, kterou jsme si ukazovali v prvním díle. □



Úhel mezi bodem a přímkou

Hlavní trik, který s polárami budeme využívat, je přenášení úhlů. K usnadnění tohoto přenášení si však musíme dodefinovat pár značení.

Definice 59. Následující definice využívají rovinu s počátkem P.

(i) Úhel mezi přímkami $|\sphericalangle pq|$ je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku p proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku q.

(ii) Úhel mezi body $|\sphericalangle AB|$ je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku PA proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku PB.

(iii) Úhel mezi bodem a přímkou $|\sphericalangle Ap|$, kde A leží na p, je pro nás úhel, o který musíme otočit přímku PA proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku p. Obdobně $|\sphericalangle pA|$ je úhel, o který musíme otočit p na PA.

Tvrzení 60. (o dualitě úhlů) *Pro všechny body a přímky v dualitě platí*

(i) $|\sphericalangle pq| = |\sphericalangle p'q'|$,

(ii) $|\sphericalangle AB| = |\sphericalangle A'B'|$,

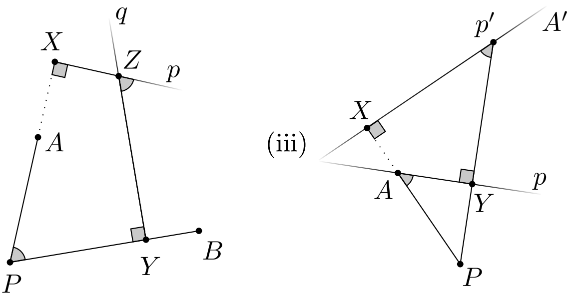
(iii) $|\sphericalangle Ap| = |\sphericalangle A'p'|$.

Důkaz.

(i), (ii) Nejdříve dokážeme první a druhé tvrzení. Označíme $A = p'$ a $B = q'$. Dále označíme průsečíky $X = PA \cap p$, $Y = PB \cap q$ a $Z = p \cap q$. Pak $PXZY$ leží na jedné kružnici protože $|\sphericalangle ZYP| = 90° = |\sphericalangle ZXP|$. Takže z obvodového úhlu je úhel mezi p a q stejný jako úhel mezi PA a PB. Což jsme chtěli dokázat. □

(iii) Pro třetí tvrzení označíme $X = PA \cap A'$ a $Y = Pp' \cap p$. Pak X, A, Y, p' leží na jedné kružnici, protože $|\sphericalangle p'YA| = 90° = |\sphericalangle p'XA|$. Znovu z obvodového úhlu plyne, že úhel mezi p a PA je stejný jako úhel mezi A' a Pp'. □

(i), (ii)



(iii)

Úloha 61. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nechť $E = AB \cap CD$ a $F = AD \cap BC$. Mějme bod X uvnitř $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle AXE| = |\sphericalangle CXF|$. Dokaž, že $|\sphericalangle AXB| + |\sphericalangle CXD| = 180°$.

Úloha 62. (Blanchet zas a znovu) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD. Dokaž, že $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle FDA|$.

Úloha 63. Mějme pevný bod D a pevné přímky k, l, které procházejí společným bodem A. Na přímkách k, l jsou postupně body X a Y takové, že $|\sphericalangle XDA| = |\sphericalangle YDA|$. Dokaž, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 64. Mějme rovnoběžník $ABCD$ a v něm nalezněme bod F, který splňuje $|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle CBF|$. Dokaž, že $|\sphericalangle FCB| = |\sphericalangle FAB|$.

Úloha 65. Mějme trojúhelník ABC takový, že $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme postupně D, E, F průsečíky os úhlů u vrcholů A, B, C s protější stranou. Dokaž, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Tvrzení 66. (o dualitě na kružnici) *Mějme trojúhelník ABC se stranami a, b, c. Na jeho kružnici opsané mějme bod P. Uvažme dualitu se středem v P. Pak platí, že čtyřúhelníky $ABCP$ a $a'b'c'P$ jsou podobné. Tedy speciálně bod P leží na kružnici opsané $a'b'c'$.*

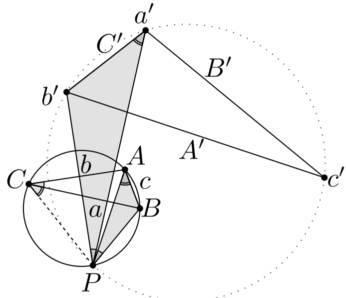
Důkaz. Dokážeme, že trojúhelníky ABP a $a'b'P$ jsou podobné. Z obvodového úhlu $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP|$. Z duality úhlů

$$|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle Ca| = |\sphericalangle C'a'| = |\sphericalangle b'a'P|.$$

Znovu z obvodového úhlu $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle ACB|$. Z duality úhlů pak

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ab| = |\sphericalangle a'b'| = |\sphericalangle a'Pb'|.$$

Dostali jsme, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle b'a'P|$ a $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle a'Pb'|$. Takže z věty *uu* jsou trojúhelníky ABP a $a'b'P$ podobné. Obdobně jsou trojúhelníky ACP a $a'c'P$. Takže i čtyřúhelníky $ABCP$ a $a'b'c'P$ jsou podobné. □

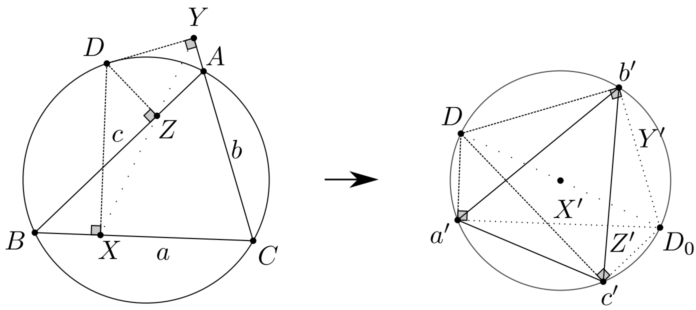


Věta 67. (Simsonova přímka) *Mějme trojúhelník ABC a na jeho kružnici opsané bod D. Označme X, Y, Z postupně paty z D na přímky BC, AC, AB. Pak X, Y, Z leží na jedné přímce.*

Důkaz. Označme a, b, c postupně strany trojúhelníka BC, CA, AB. Uvažme polárovou dualitu se středem v D a libovolným koeficientem. Z tvrzení 66 leží D na kružnici opsané $a'b'c'$. Z duality úhlů $90° = |\sphericalangle Xa| = |\sphericalangle X'a'|$. Takže přímka X' je kolmice na Da' procházející a'. Analogicky Y' je kolmice na Db' skrz b' a Z' je kolmice na Dc' skrz c'. Chceme ukázat, že X', Y', Z' prochází jedním bodem. Označme D_0 bod naproti na kružnici opsané $a'b'c'$ od bodu D. Pak $|\sphericalangle Da'D_0| = 90°$. Takže X' prochází D_0. Analogicky i Y' a Z' prochází D_0. Tedy X', Y' a Z' prochází jedním bodem, takže X, Y, Z musely ležet na jedné přímce. □

Úloha 68. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a vepsištěm I. Označme p tečnu k ω různou od stran trojúhelníka. Na přímce p zvolme body A_0, B_0, C_0 tak, aby $|\sphericalangle AIA_0| = |\sphericalangle BIB_0| = |\sphericalangle CIC_0| = 90°$. Dokaž, že přímky AA_0, BB_0 a CC_0 prochází jedním bodem.

Úloha 69. (Miquelův bod) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme P průsečík AB a CD. Analogicky Q je průsečík BC a AD. Dokaž, že kružnice opsané trojúhelníkům QAB, QCD, PBC a PAD prochází jedním bodem M. Dokaž, že M leží na PQ, právě když $ABCD$ je tětivový. Můžeš si všimnout i dalších zajímavých úhlových vlastností.



Poláry a inverze

Všimni si, že inverze a poláry spolu dost souvisí. Konkrétně poláru bodu A dostaneme tak, že vedeme kolmici na PA procházející inverzí (se stejným koeficientem) bodu A, kde P je střed duality i inverze.

Tvrzení 70. (dualita zachovává dvojpoměry) *Mějme body A, B, C, D na přímce. Uvažme jakoukoli dualitu. Pak $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. (Z principu duality víme, že přímky $A'B'C'D'$ prochází jedním bodem, takže je na nich dvojpoměr dobře definovaný.)*

Důkaz. Označme P střed duality. Rozlišme dvě konfigurace.

(i) Nejprve rozeberme případ, kdy P leží na přímce A, B, C, D. Všechny přímky A', B', C', D' jsou rovnoběžné. Promítneme dvojpoměr (A', B', C', D') na přímku A, B, C, D. Tím dostaneme to samé, jako když (A, B, C, D) zinvertujeme se stejným středem a koeficientem.

(ii) V druhém případě, když P leží mimo $ABCD$, z promítacího tvrzení víme, že
$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$
Otočíme tento svazek o $90°$ na (PA_1, PB_1, PC_1, PD_1). Pak PA_1 je rovnoběžné s A', $PB_1 \parallel B'$, $PC_1 \parallel C'$ a $PD_1 \parallel D'$. Protože u dvojpoměrového svazku záleží jen na úhlech mezi přímkami, platí, že
$$(PA_1, PB_1, PC_1, PD_1) = (A', B', C', D').$$
Takže $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. □

Úloha 71. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$ a nechť I je střed kružnice jemu vepsané. Označme $Q = AB \cap CD$ a $P = BC \cap AD$. Označme M kolmou projekci bodu I na přímku PQ. Dokaž, že $|\sphericalangle DMI| = |\sphericalangle BMI|$.

Věta 72. (Simsonova přímka podruhé) *Mějme trojúhelník ABC a na jeho kružnici opsané bod D. Označme X, Y, Z postupně paty z D na přímky BC, AC, AB. Pak X, Y, Z leží na jedné přímce.*

Důkaz. Uvažme dualitu se středem v D a následnou inverzi se stejným koeficientem a středem v D. Ta zobrazí stranu trojúhelníka na patu z D na danou stranu.Takže třeba $a \to X$. Označme čárkou obrazy v dualitě a dvojčárkou obrazy po následné inverzi. Z tvrzení dualita na kružnici víme, že $a'b'c'D$ je tětivový. Takže po inverzi máme, že $a''b''c''\infty$ leží na kružímce. Ale protože obsahuje bod v nekonečnu, musí ležet na přímce. Takže X, Y, Z leží na přímce. □

Může se Ti zdát, že jsme na tuto větu využili moc silné nástroje (dualitu i inverzi), když se dá jednoduše vyúhlit. Tyto nástroje nám ale dávají další vhled do toho, co to Simsonova přímka vlastně je. Pojďme si ukázat netriviálnější tvrzení, které z tohoto náhledu celkem rychle plyne.

Příklad 73. Mějme harmonický čtyřúhelník $ABCD$. Označme X, Y, Z paty z D na přímky BC, CA, AB. Pak $|XY| = |YZ|$.

Řešení. Znovu aplikujeme dualitu se středem v D. Z tvrzení dualita na kružnici víme, že $a'b'c'D$ je podobný s $ABCD$, tedy speciálně je harmonický. Takže $(a', b', c', D) = -1$. Po zinvertování podle D dostáváme, že

$$(X, Y, Z, \infty) = (a'', b'', c'', \infty) = -1.$$

To je ale dvojpoměr s bodem v nekonečnu, tedy Y je středem úsečky XZ.

Úloha 74. V čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík úhlopříček AC a BD. Dále označme M průsečík kružnic opsaných PCD a PAB různý od P. Nakonec označme H_1, H_2, H_3 a H_4 postupně paty kolmic z bodu P na přímky AB, BD, DC a CA. Dokaž, že H_1, H_2, H_3 a H_4 leží na jedné přímce.

Poláry v zadání

Občas se stane, že k vyřešení úlohy ji ani nepotřebujeme celou dualizovat, ale stačí si uvědomit, které přímky v zadaní jsou poláry kterých bodů v zadání. Nejlépe si to ukážeme na příkladě.

Úloha 75. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω se středem I. Kružnice ω se dotýká stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F. Přímka EF protíná přímku BC v G. Dokaž, že $GI \perp AD$.

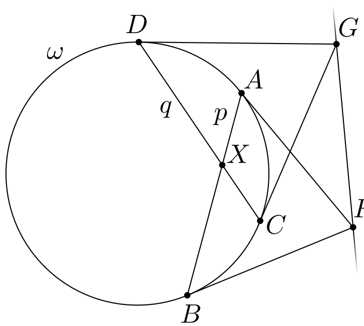
Řešení. Pokusíme se ukázat silnější tvrzení, že AD je polárou G podle ω. Pak musí GI být kolmé na AD. Najdeme pól AD podle ω. Ten musí být průsečíkem polár A a D. Polára A je EF, polára D je BC, takže G je opravdu pólem AD.

Úloha 76. Mějme trojúhelník ABC a jeho vepsiště I. Označme body dotyku vepsané kružnice se stranami BC, CA, AB postupně D, E, F. Označme S průsečík přímek EF a BC. Dokaž, že $SI \perp AD$.

Poláry a kolineace

Už jsme si ukázali, jak vypadá polára bodu ležícího na kružnici a vně kružnice. Pojďme nějak projektivně zkonstruovat poláru bodu uvnitř kružnice.

Tvrzení 77. *Mějme bod X uvnitř kružnice ω. Nechť p, q jsou libovolné přímky procházející bodem X, p protíná ω v A, B a q protíná ω v C, D. Tečny k ω v A a B se protínají v F. Tečny k ω v C a D se protínají v G. Pak přímka FG je polára X.*



Důkaz. Už víme, že p je polára F a q je polára G. Z principu duality tak přímka procházející F, G. musí být polárou průsečíku p, q. Takže FG je opravdu polára X. □

Tvrzení 78. (kolineace zachovává poláry) *Mějme kružnici ω, bod A a jeho poláru a vzhledem k ω. Pak pokud kolineace zobrazí ω na kružnici ω', $A \to A'$ a $a \to a'$, tak a' je polára A' vzhledem k ω'.*

Důkaz. Poláry umíme zkonstruovat využitím pouze tečen a průsečíků. To všechno ale kolineace zachovává. Zachovává tedy i poláry. □

Tím se možnosti kolineace ještě rozšířily. Pojďme si to ukázat.

Příklad 79. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ se středem O kružnice opsané. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Dokaž, že $PO \perp QR$.

Řešení. Označme ω kružnici opsanou $ABCD$. Dokážeme silnější tvrzení. Dokážeme, že QR je polára P podle ω. Uvažme kolineaci zobrazující QR na nevlastní a ω na kružnici. Z $ABCD$ se tím stane obdélník. Poláry se zachovaly. QR je nevlastní a P je střed ω, takže QR je polára P. Takže PO muselo být kolmé na QR.

Poznámka 80. Rozmysli si, že v předchozím případě dokonce PQ je polára R a PR je polára Q podle ω a že z toho plyne, že O je ortocentrum PQR. To je tvrzení, které se v prvním díle zdálo kolineací absolutně nedokazatelné.

Úloha 81. Mějme tečnový tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme I střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a P průsečík úhlopříček. Dokaž, že O, I, P leží na jedné přímce.

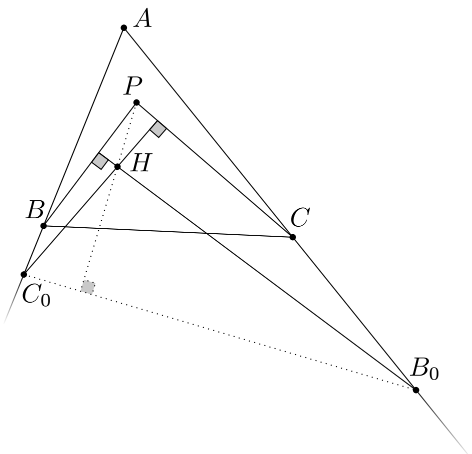
Dualita s ortocentrem

Ukážeme si speciální případ duality. Pro trojúhelník ABC se stranami a, b, c najdeme dualitu, která zobrazí $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$.

Tvrzení 82. (existence duality podle trojúhelníka) *Uvažme dualitu zobrazující $A \to BC$ se středem v ortocentru. Podíváme se, kam tato dualita zobrazí B. B leží na A' neboli B' prochází skrz A. Zároveň musí být kolmá na BH, ale to je právě AC. Analogicky je polára C přímka AB.*

Poznámka 83. Pro pravoúhlý trojúhelník tato dualita neexistuje, protože ortocentrum v něm splývá s vrcholem.

Příklad 84. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. V něm leží bod P. Označme B_0 bod na AC takový, že $B_0H \perp BP$. Analogicky sestrojíme C_0 na AB tak, aby $C_0H \perp CP$. Dokaž, že $PH \perp C_0B_0$.



Řešení. Najdeme póly přímek PB a PC v dualitě podle trojúhelníka ABC. Přímka PB prochází bodem B, takže její pól leží na b. Označíme její pól Q. Pak protože střed duality je ortocentrum, musí platit, že $QH \perp PB$. Takže $Q = B_0$. Analogicky pól PC je C_0. Takže přímka C_0B_0 je polára $P = PB \cap PC$. Z toho plyne, že $PH \perp C_0B_0$.

Poznámka 85. Mohli jsme dodefinovat i bod A_0. Pak z toho, že PA, PB, PC prochází jedním bodem, plyne, že A_0, B_0, C_0 leží na přímce.

Úloha 86. Mějme trojúhelník ABC a označme H jeho ortocentrum. Dále mějme ceviány[10] AD, BE, CF. Kolmice na přímku DH procházející skrz A protíná BC v A_0. Obdobně kolmice na EH procházející skrz B protíná AC v B_0 a kolmice na FH procházející C protíná AB v C_0. Dokaž, že A_0, B_0 a C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 87. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Označme M_a střed strany BC, M_b střed strany AC a M_c střed strany AB. Průsečík polopřímky M_aH s kružnicí opsanou označíme X_a a průsečík AX_a s BC označíme Y_a. Analogicky sestrojíme body X_b, X_c a Y_b, Y_c. Dokaž, že Y_a, Y_b a Y_c leží na přímce.

Úloha 88. Mějme trojúhelník ABC a jeho ortocentrum H. Na straně BC leží bod D. Přímka skrz H kolmá na DH protne přímky AB a AC postupně v bodech K a L. Dokaž, že $\frac{|KH|}{|HL|} = \frac{|BD|}{|DC|}$.

Úloha 89. Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H. Na AC nalezněme bod B' takový, že $|\sphericalangle AHB'| = |\sphericalangle ABC|$. Analogicky na AB nalezneme C' splňující $|\sphericalangle AHC'| = |\sphericalangle ACB|$. Dokaž, že $B'C' \parallel BC$.

Úloha 90. V trojúhelníku ABC s ortocentrem H a patami výšek z vrcholů A, B, C označenými D, E, F. Nechť M je střed strany BC. Přímka EF protne přímku BC v X. Dokaž, že $XA \perp HM$.

Úloha 91. (Droz-Farny) Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H. Přímky p, q jsou na sebe kolmé a prochází bodem H. Přímka p protíná BC v A_0, AC v B_0 a AB v C_0. Analogicky q protíná BC v A_1, AC v B_1 a AB v C_1. Dokaž, že středy úseček A_0A_1, B_0B_1 a C_0C_1 leží na přímce.

Úloha 92. Mějme trojúhelník ABC. Označme H jeho ortocentrum a M střed strany BC. Dále K je průsečík MH s kružnicí opsanou ABC. Přímka rovnoběžná s BC procházející skrz H protíná přímku AK v bodě X. Vnější osa úhlu BHC protíná BC v bodě Y. Označme S střed oblouku BC neobsahující A. Dokažte, že $SH \perp XY$

Úloha 93. V trojúhelníku ABC označme H ortocentrum. vnější osa úhlu BHC protne BC v X. vnitřní osa AHB protne AB v Y a vnitřní osa AHC protne AC v Z. Dokaž, že X, Y, Z leží na přímce.

Shrnutí

Shrneme, co jsme v druhém díle ukázali.

[10] Ceviány v trojúhelníku jsou tři přímky, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníka a protínají se v jednom bodě.

Komplexní dvojpoměr

(1) Definován jako
$$\frac{(B-A)(D-C)}{(C-B)(A-D)}$$
pro komplexní čísla A, B, C, D.

(2) Na přímce i na kružnici se chová stejně jako standardní.

Möbiovská zobrazení

(1) Lineární lomené funkce v komplexních číslech
$$\frac{ax+b}{cx+d}$$
pro komplexní koeficienty a, b, c, d.

(2) Zachovávají dvojpoměry.

(3) Zachovávají kružímky.

Inverze

(1) Definovaná středem a koeficientem. Posuneme střed do počátku, pak je to zobrazení tvaru $k/\overline{x}$, kde k je reálný koeficient.

(2) komplexně konjugují dvojpoměry.

(3) Zachovává kružímky.

(4) Označme P střed inverze a čárkou obrazy. Pak P, X, X' leží na přímce pro všechna X.

(5) Kružnice procházející středem se zobrazí na přímku neprocházející středem.

(6) Pro body A, B a jejich inverzy A', B' podle inverze se středem P platí $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PB'A'|$.

(7) Složení dvou inverzí je Möbiovské zobrazení.

(8) Inverze podle kružímky. Definovaná jako Möbiovské zobrazení s pruhem, jehož množina pevných bodů je zadaná kružímka. Inverze podle přímky je překlopení.

(9) Tvrzení *KIL*.

Kolmé kružnice

(1) Tečny v jejich průsečících jsou kolmé.

(2) Obraz ω v inverzi podle Ω je znovu ω právě když jsou ω a Ω na sebe kolmé.

(3) Označme p přímku spojující středy kolmých kružnic. Ta kružnice protne ve čtyřech bodech. Tyto body tvoří harmonickou čtveřici.

Dualita

(1) Nahrazujeme body a přímky tak, aby se zachovala vlastnost náležení. Takže pokud A leží na p, pak p' leží na A'.

(2) Konečné duální diagramy.

Poláry

(1) Skalární součin $A\cdot B$ ve světě s počátkem P je roven $A\cdot B = |PA|\cdot|PB|\cos(\alpha)$, kde α je úhel mezi PA a PB.

(2) Definované pomocí skalárního součinu. Polára A je množina bodů X takových, že $A \cdot X = k$, kde k je reálný koeficient polárové duality.
(3) Určují dualitu celé projektivní roviny.
(4) Dobře se přepočítávají úhly.
(5) Pro čtyři body na kružnici $ABCD$ platí, že po dualitě se středem v D jsou čtyřúhelníky $ABCD$ a $a'b'c'D$ podobné, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka ABC.
(6) Inverze bodu A je pata středu duality na poláru A'.
(7) Pokud kolineace zachová kružnici, zachová i poláry vzhledem k dané kružnici.
(8) Pro trojúhelník ABC existuje polárová dualita se středem v ortocentru zobrazující $A \to a$, $B \to b$ a $C \to c$.

Pár slov závěrem

Zde končí naše putování projektivním světem druhého dílu. Ale nemusíš truchlit, vydáme se zde ještě jednou a naposled v díle třetím. Pro připomenutí: na druhé procházce jsme nejprve potkali komplexní čísla, těch jsme se nezalekli a ukázali si, že pomocí nich lze jednoduše popsat některá klasická zobrazení, celou třídu těchto zobrazení jsme pak nazvali Möbiovská. Dále jsme se podrobněji zaměřili na jedno konkrétní zobrazení – inverzi a zjistili, že kružnice a přímky jsou si v jistém pohledu tak podobné, že jsme jejich čeleď nazvali kružímky. Také jsme se vydali až na pól, kde jsme namísto očekávaných polárních medvědů nalezli poláry. Hlavním objevem druhého výletu se pak stal tvor jménem dualita, který kudy chodil, tu se hned přímky měnily v body a naopak body v přímky. Pro větší sblížení se všemi potkanými zvířátky jsme si vlastnosti jednotlivců demonstrovali na spoustě příkladů a obrázků.

A na co se můžeš těšit ve třetím putování? Tentokrát se vydáme do končin dosud nepoznaných a tajuplných. Ukážeme si, jak se dají úlohy dokazovat za pomoci hýbání s body. A že občas je stačí dokázat ve třech speciálních případech a pak už jsou dokázány celé. Pomocí hýbání pak budeme schopni dokazovat i zvláštní tvrzení jako třeba, že určitá množina přímek prochází jedním bodem bez toho, abychom znali daný bod. Seznámíme se se zvířátkem zvaným Desarguesova involuce, které sice může dle jména působit děsivě, ale při bližším poznání umí schovat zoubky, být kouzelné a poradit si s mnohými obrázky. Například umí dokázat, že nějaké dvě náhodné úsečky na přímce jsou stejně dlouhé. Doufáme, že jste se při této výpravě nezalekli šavlozubých tygrů a doprovodíte nás i na této závěrečné cestě. Vstříc novému dobrodružství!

Návody

20. Zinvertuj podle O. Z kružnic vznikne obdélník.

21. Invertuj se středem A_3. Rozmysli si, co se stane s dotýkajícími se kružnicemi.

25. Zinvertuj podle A a přenes úhly.

26. Najdi pevnou inverzi se středem v $\check{S}$, která zobrazí X_0 na X_1 nezávisle na poloze přímky p.

27. Dokresli kružnice nad průměry AB, AC, CD, CE. Následně zinvertuj podle C.

28. Zinvertuj podle A. Objeví se trojúhelník s výškami.

29. Zinvertuj podle A a dokaž, že $|AB|/|BP| = |AC|/|CP|$.

37. Označ O_1 střed kružnice opsané ABC. kružnice opsaná ABC, nevlastní bod a bod O_1 tvoří hezkou konfiguraci.

38. X, P a BC mají tvoří hezkou konfiguraci. Zinvertuj podle A.

44. Najdi harmonickou čtveřici. Najdi pravý úhel. Využij tvrzení dvě ze tří.

45. Zinvertuj podle δ a najdi pravý úhel.

61. Zdualizuj podle X.

62. Zdualizuj podle paty výšky.

63. Zdualizuj podle D. Dokaž, že póly hledaných přímek leží na jedné přímce.

64. Zdualizuj podle F.

65. Rozmysli si, jak se chová dualita podle bodu, který leží na ose úhlu. Co když leží na rameni?

68. Zdualizuj podle kružnice vepsané.

69. Zdualizuj úlohu podle průsečíku dvou kružnic opsaných. Uvědom si, že z toho co dostaneš plyne, že M leží i na zbylých dvou. Pro druhou část převeď tětivovost na součet úhlů 180.

71. Zdualizuj podle kružnice vepsané. Převeď podmínku pomocí dvě ze tří na harmonický svazek.

74. Stačí najít Simsonovy přímky. Zkus ale využít důkaz Simsonovy přímky. Zdualizuj a zinvertuj podle M.

76. Zjisti, že S je polára AD podle kružnice vepsané.

81. Najdi poláru P podle kružnice vepsané i opsané. To, co zjistíš, říká dost informace, aby platilo, že O, I, P leží na přímce.

86. Hledaná přímka je polára průsečíku cevián AD, BE, CF v dualitě podle ABC.

87. Jaká je polára bodu M_a v dualitě podle ABC.

88. Převeď poměr na dvojpoměr s nevlastním bodem a pak zdualizuj podle ABC.

89. Přenes úhel v dualitě podle ABC.

90. Překlop A podle M na A_0. Jaká je polára A_0 v dualitě podle ABC.

91. Pro zdualizování převeď na harmonické svazky. Po dualitě už jen zbývá vyúhlit.

92. Zdualizuj podle ABC osu úhlu BAC a osu strany BC.

93. Body X, Y, Z se v dualitě podle ABC zobrazí na různé osy úhlů.

Výsledky po 3. podzimní sérii

Detailní výsledky jednotliých sérií nalezneš na našem webu: prase.cz/vysledky

	jméno	příjmení	r.	škola	1p	2p	3p	1s	celkem	hist.
1.	*Jiří*	*Kalvoda*	3	GJarošeBO	25	25	24	15	**88,63**	89
2.	*Václav*	*Janáček*	3	GJarošeBO	25	25	23	15	**88,28**	311
3.	*Magdaléna*	*Mišinová*	3	GKepleraPH	25	25	21	15	**85,91**	506
4.	*Zdeněk*	*Pezlar*	2	GJarošeBO	25	25	21	15	**85,75**	284
5.	*Matouš*	*Šafránek*	2	GKepleraPH	24	24	22	15	**85,07**	85
6.	*Klára*	*Pernicová*	3	GJarošeBO	23	25	20	15	**82,63**	423
7.	*Samuel*	*Rosiar*	1	GKepleraPH	24	23	20	13	**80,04**	80
8.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	4	GJHroncaBA	25	25	15	15	**80,00**	845
9.	*Jakub*	*Štepo*	1	GEBenešeKL	23	23	19	14	**79,13**	79
10.	*Tomáš*	*Flídr*	2	G Kojetín	22	25	20	11	**77,49**	415
11.	*Josef*	*Vácha*	2	GKepleraPH	22	21	21	12	**75,13**	75
12.	*Matej*	*Hanus*	4	GPošKošice	17	25	17	15	**74,58**	259
13.	*Jakub*	*Parada*	4	G Gröss BA	25	25	16	7	**73,62**	600
14.	*Markéta*	*Hanušková*	2	G VelMeziř	22	21	18	13	**73,36**	226
15.	*Jonáš*	*Havelka*	4	G Jírov ČB	22	25	19	8	**73,28**	444
16.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	3	PORG PH	20	23	18	12	**73,01**	366
17.	*Vendula*	*Onderková*	2	GJŠkodyPŘ	24	20	21	8	**72,92**	153
18.	*Veronika*	*Chovancová*	1	PiarGTn	22	22	17	11	**72,41**	72
19.	*Benedikt*	*Bareš*	2	G Dobruška	24	18	19	12	**72,24**	72
20.	*Nikita*	*Ustinov*	2	GKepleraPH	23	22	17	10	**71,53**	72
21.	*Michal*	*Beránek*	2	GVoděraPH	24	19	12	15	**70,79**	756
22.	*Jan*	*Brada*	3	CírkGPlzeň	20	21	18	11	**70,49**	117
23.	*Denisa*	*Hanušková*	2	G VelMeziř	19	19	18	13	**68,72**	221
24.	*Petro*	*Velychko*	2	GKepleraPH	23	20	18	7	**68,63**	69
25.	*Jáchym*	*Němeček*	3	SPŠERožnov	24	22	11	11	**68,22**	68
26.–27.	*Martin*	*Fof*	2	MendelG OP	22	20	19	7	**67,39**	67
26.–27.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	3	GZborovPH	25	17	10	15	**67,39**	463
28.	*Eva*	*Feldbabelová*	2	KGTřebíč	21	20	18	6	**66,03**	279
29.	*Adam*	*Pavelka*	2	MendelG OP	23	20	15	7	**65,32**	65
30.	*Jakub*	*Jedlička*	2	GZborovPH	23	18	16	7	**63,90**	65
31.	*Karel*	*Chwistek*	3	MendelG OP	24	22	17	–	**62,82**	100
32.	*Lukáš*	*Veškrna*	2	GKepleraPH	25	21	9	7	**62,68**	63
33.	*Petr*	*Hladík*	2	GMikul23PL	22	16	16	7	**60,82**	222
34.	*Jáchym*	*Mierva*	3	GUKlafárŽR	19	19	10	13	**60,39**	84
35.	*Alex*	*Tabara*	2	GymnJanŠabr	20	17	11	12	**59,67**	60
36.	*Ondřej*	*Sladký*	3	GMikul23PL	22	11	19	6	**58,76**	59
37.	*Vojtěch*	*David*	3	WichtG OS	22	22	13	–	**58,01**	58
38.	*Vít*	*Hanika*	1	GKepleraPH	23	11	14	9	**57,12**	57

39.	*Tobiáš*	*Krupa*	4	G RožnRadh	21	21	14	–	**56,00**	56
40.	*Jan*	*Růžička*	3	GKepleraPH	25	21	9	–	**55,27**	55
41.	*Antonín*	*Otmar*	3	GNadKavaPH	21	18	9	6	**55,13**	55
42.	*Daniel*	*Perout*	3	GJarošeBO	20	17	10	6	**52,79**	188
43.	*Viktoria*	*Patapeika*	4	G41Minsk	18	14	11	9	**52,00**	52
44.	*Petr*	*Khartskhaev*	3	PORG PH	19	18	9	6	**51,49**	392
45.	*Lucia*	*Kvasničková*	1	GKepleraPH	18	18	14	–	**50,57**	236
46.	*František*	*Dvořák*	2	G ČKrumlov	21	15	14	–	**49,94**	50
47.	*Huu Quy*	*Nguyen*	3	G Rumburk	21	21	8	–	**49,26**	49
48.	*Peter*	*Kochelka*	2	GTajBanBys	15	20	14	–	**48,47**	89
49.	*Zdeněk*	*Tomis*	3	GStudHavíř	22	15	10	–	**47,64**	48
50.	*Anastasia*	*Bredikhina*	0	GKepleraPH	19	13	15	–	**47,44**	47
51.	*Markéta Anna*	*Doležalová*	2	GUKlafárŽR	16	12	14	5	**46,84**	47
52.	*Karel*	*Procházka*	2	GPBystrica	16	19	11	–	**46,09**	46
53.	*Teodor*	*Machart*	2	GKepleraPH	21	12	5	7	**45,05**	60
54.	*Tomáš*	*Macháček*	2	GKepleraPH	22	15	8	–	**44,92**	45
55.	*Patrik*	*Jendele*	1	SPŠsPLZ	15	16	14	–	**44,59**	45
56.	*Michal*	*Vosyka*	3	GUKlafárŽR	16	16	7	6	**44,52**	136
57.	*Mikuláš*	*Brož*	3	GNadŠtolPH	23	16	5	–	**43,58**	362
58.	*Jana*	*Maderová*	4	FRedmS	18	17	8	–	**43,00**	43
59.	*Václav*	*Maštera*	2	GCoubTábor	19	15	8	–	**41,81**	42
60.	*Martin*	*Švanda*	1	ArcibisGPH	14	15	13	–	**41,34**	41
61.	*Adam*	*Mendl*	3	GCoubTábor	22	18	–	–	**40,48**	514
62.	*Martin*	*Haikl*	1	G TýnNVlt	16	11	8	4	**40,18**	40
63.	*Olga*	*Dvořáková*	1	GJarošeBO	22	18	–	–	**40,13**	40
64.	*Ema Wayan*	*Danielová*	3	ŠkBřezová	16	12	10	–	**39,11**	39
65.	*Natália*	*Bátorová*	3	GPBystrica	14	7	11	6	**39,05**	39
66.	*Vojtěch*	*Müller*	0	GNadKavaPH	19	8	12	–	**39,02**	39
67.	*Adam*	*Šlegl*	3	GJosefskPH	21	16	–	–	**37,77**	38
68.	*Jakub*	*Kliment*	3	GTajBanBys	20	16	–	–	**36,19**	36
69.	*Daniel*	*Czinege*	3	G Bílovec	–	18	11	6	**35,70**	36
70.	*Jan*	*Nekarda*	4	GUHradiště	9	15	7	4	**35,19**	213
71.	*Adéla*	*Křížová*	2	G Ústí n O	12	8	15	–	**35,11**	35
72.	*František*	*Malý*	0	MatičníGOS	18	8	8	–	**34,91**	35
73.	*Vojtěch*	*Votruba*	2	GKepleraPH	19	16	–	–	**34,49**	42
74.	*Martin*	*Nováček*	2	G MasNámTŘ	20	14	–	–	**34,17**	34
75.	*Anežka*	*Kasalová*	1	GZborovPH	20	14	–	–	**33,81**	34
76.	*Kateřina*	*Fiňková*	4	GJeronýmLI	–	14	14	5	**33,00**	33
77.	*Klára*	*Hubínková*	2	GMikul23PL	14	11	8	–	**32,94**	33
78.	*Matěj*	*Kliment*	2	LeafAcademy	16	17	–	–	**32,67**	33
79.	*Filip*	*Brecher*	1	GKepleraPH	21	11	–	–	**32,05**	32
80.	*Jan*	*Vavřín*	3	PORG PH	9	22	–	–	**31,71**	399
81.	*Stanislav*	*Kozák*	2	G Holice	15	13	4	–	**31,70**	32
82.	*Markéta*	*Kořínková*	1	BiskG Brno	14	–	18	–	**31,51**	32
83.	*Michal*	*Kupec*	4	G Písek	18	13	–	–	**30,64**	131
84.	*Ondřej*	*Macháč*	4	GStrážnice	12	9	8	–	**30,20**	161
85.	*Marek*	*Pišťák*	2	GHeyrovPH	7	12	10	–	**29,46**	151
86.	*Vojtěch*	*Eibel*	0	G Ivančice	16	13	–	–	**29,45**	29
87.	*Jitka*	*Padronová*	1	GSRandyJN	19	8	–	–	**27,76**	28
88.	*Václav*	*Verner*	0	PORG PH	13	11	3	0	**27,35**	77
89.	*Darian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	20	7	–	–	**27,33**	128
90.	*Matěj*	*Holubička*	4	G Hořice	10	8	7	–	**25,52**	154

91.	*Alan*	*Hübsch*	2	GKepleraPH	16	9	–	–	**24,86**	144
92.	*Jakub*	*Kislinger*	3	G Klatovy	24	–	–	–	**23,82**	24
93.	*Robin*	*Palán*	2	GJarkovPH	12	10	–	–	**22,70**	97
94.	*Tomáš*	*Jaroš*	2	GOA Pelh	13	–	9	–	**22,48**	22
95.	*Jakub*	*Polák*	0	GNPražačPH	22	–	–	–	**22,17**	22
96.	*Dora*	*Cidlinská*	3	KlŠpG Brno	13	–	8	–	**21,47**	21
97.	*Klára*	*Hloušková*	4	G Kolín	9	6	6	–	**21,20**	266
98.	*Anna*	*Musilová*	4	PORG PH	12	10	–	–	**21,10**	246
99.	*Ondrej*	*Dulanský*	2	GJŠkodyPŘ	21	–	–	–	**20,65**	67
100.	*Michal*	*Döme*	3	LycCarFR	10	–	10	–	**20,60**	21
101.	*Marek*	*Eibel*	2	G Ivančice	9	11	–	–	**20,20**	20
102.	*Lenka*	*Poljaková*	0	GJŠkodyPŘ	20	–	–	–	**19,92**	65
103.–104.	*Klára*	*Chobotová*	0	GJNerudyPH	8	11	–	–	**19,03**	46
103.–104.	*Kateřina*	*Panešová*	4	G Teplice	19	–	–	–	**19,03**	324
105.	*Petra*	*Jírů*	3	GPelhřimov	9	3	7	–	**18,84**	19
106.	*František*	*Kmječ*	4	G Brandýs	10	8	–	–	**18,60**	69
107.	*Oleksandr*	*Zezulya*	3	G Beroun	9	9	–	–	**18,34**	18
108.	*Veronika*	*Kavanová*	1	GJungmanLT	18	–	–	–	**17,70**	18
109.	*Anna*	*Pecháčková*	2	GJŠkodyPŘ	17	–	–	–	**16,90**	17
110.–112.	*Martin*	*Boček*	1	MendelG OP	17	–	–	–	**16,83**	17
110.–112.	*Věra*	*Polášková*	1	OA Liberec	17	–	–	–	**16,83**	17
110.–112.	*Jakub*	*Vlček*	1	G Příbor	17	–	–	–	**16,83**	17
113.	*Kateřina*	*Trojtlová*	0	G Broumov	8	8	–	–	**16,68**	17
114.	*Viktorie*	*Hulcová*	0	G ČKrumlov	16	–	–	–	**16,42**	16
115.–116.	*Amálie*	*Dostalíková*	3	GJŠkodyPŘ	16	–	–	–	**16,36**	16
115.–116.	*Štěpán*	*Postava*	3	G Bílovec	–	16	–	–	**16,36**	16
117.	*Adam*	*Křivka*	4	CMGPgBrno	15	–	–	–	**15,09**	346
118.	*Štěpán*	*Tomek*	1	GSRandyJN	15	–	–	–	**14,89**	15
119.	*Viktor*	*Materna*	4	GJarošeBO	14	–	–	–	**14,26**	162
120.	*Lukáš*	*Frk*	3	GNadAlejPH	14	–	–	–	**14,25**	41
121.	*Radomír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	5	9	–	–	**14,06**	74
122.	*Julie*	*Křimská*	1	GKepleraPH	11	–	3	–	**14,05**	14
123.	*Lucie*	*Ambrožová*	4	G Svitavy	14	–	–	–	**14,00**	14
124.	*Kateřina*	*Vokálová*	4	G Kolín	14	–	–	–	**13,55**	43
125.	*Jiří*	*Malý*	3	GJPekařeMB	9	4	–	–	**13,40**	13
126.–127.	*Filip*	*Hošek*	0	MKG Říčany	13	–	–	–	**13,03**	13
126.–127.	*Michaela*	*Říhová*	0	G Broumov	13	–	–	–	**13,03**	13
128.	*Jiří*	*Harvalík*	2	GMikul23PL	–	–	13	–	**13,00**	13
129.	*Martin*	*Černý*	2	G HavlBrod	13	–	–	–	**12,95**	20
130.	*Tomáš*	*Hulla*	3	GTajBanBys	–	12	–	–	**12,48**	206
131.–132.	*Dominik*	*Belza*	3	GBalbínaHK	12	–	–	–	**12,45**	12
131.–132.	*Vojtěch*	*Turland*	4	GJarošeBO	4	9	–	–	**12,45**	36
133.	*Martin*	*Kavan*	4	GJungmanLT	12	–	–	–	**12,00**	12
134.	*Jakub*	*Mašek*	0	GNeumannŽR	12	–	–	–	**11,66**	12
135.	*Bohdana*	*Vokounová*	1	GDomažlice	11	–	–	–	**11,38**	11
136.	*Lucie Abigail*	*Kopelentová*	2	GKutnáHora	11	–	–	–	**10,72**	11
137.	*Paulína*	*Dujavová*	2	GRaymanaPV	5	5	–	–	**10,54**	11
138.	*Filip*	*Sedláček*	3	GSRandyJN	10	–	–	–	**10,05**	42
139.	*Adéla*	*Tržilová*	3	KGTřebíč	9	–	–	–	**9,17**	9
140.	*Jan*	*Vondra*	4	G TýnNVlt	5	3	1	–	**8,51**	98
141.–143.	*Michaela*	*Holotňáková*	1	G Třinec	–	8	–	–	**8,48**	8
141.–143.	*Matyáš*	*Kohut*	1	GSOŠ FrMýs	8	–	–	–	**8,48**	8

141.–143.	*Matěj*	*Venhoda*	1	GJMasar JI	8	–	–	–	**8,48**	8
144.	*Eliška*	*Pirnosová*	3	GMikul23PL	4	4	–	–	**8,46**	8
145.	*Barbora*	*Šanderová*	0	G Broumov	8	–	–	–	**8,34**	8
146.	*Jakub*	*Osoba*	3	GMikul23PL	–	–	6	3	**8,33**	8
147.	*Jiří*	*Dospěl*	2	SPŠS PH	8	–	–	–	**8,08**	22
148.	*Michal*	*Smieško*	3	GOpatovPH	8	–	–	–	**8,00**	8
149.–150.	*Jan*	*Kotyk*	3	G Kolín	–	–	7	–	**6,79**	7
149.–150.	*Matěj*	*Standara*	1	CMGPgBrno	–	7	–	–	**6,79**	7
151.–152.	*Petr*	*Šícho*	2	GKepleraPH	–	5	–	–	**5,27**	5
151.–152.	*Petr*	*Pavlín*	2	GKepleraPH	–	5	–	–	**5,27**	5
153.	*Tereza*	*Juráňová*	4	GTigridaOS	–	–	4	–	**4,00**	4
154.	*Jan*	*Kaifer*	4	GKepleraPH	4	–	–	–	**3,88**	345
155.–156.	*Viktorie*	*Blahová*	4	GJarošeBO	3	–	–	–	**3,00**	3
155.–156.	*Leona*	*Tejklová*	4	G Králíky	–	3	–	–	**3,00**	3
157.	*Matúš*	*Púll*	1	GZborovPH	–	3	–	–	**2,67**	3
158.	*Eliška*	*Vítková*	4	GZborovPH	–	–	2	–	**1,96**	10

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://prase.cz/*
e-mail: *info@prase.cz*