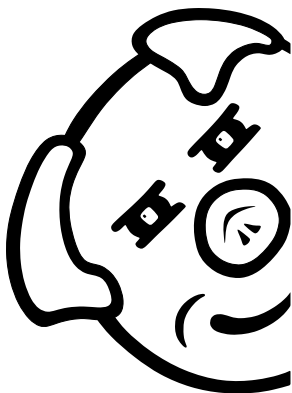


Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !



Jsme rádi, že se k Tobě dostaly první komentáře letošního 39. ročníku PraSeTe. Pokud naše komentáře držíš v ruce poprvé a přemýšlíš, jestli stojí za to se do nich začíst, rozhodně můžeš tohoto přemýšlení zanechat a číst rovnou dál! Letos jsme pro Tebe totiž připravili spoustu krásných úloh, nad kterými můžeš přemýšlet jak doma nebo v autobuse, tak ve škole (samozřejmě mimo hodiny), ve frontě na Kofolu anebo dokonce na horské dráze. Jestli Tě ale spíš zajímá, jak bys měl naše úlohy řešit, než kde bys je měl řešit, pak hned na další stránce najdeš článek, který Ti vše podrobně zodpoví.

Dále se v těchto komentářích můžeš těšit na **vzorová řešení** úloh první podzimní série (to využiješ, pokud ses na horské dráze nestihl dobrat řešení) a k tomu také průběžnou **výsledkovou listinu**. V té se můžeš dozvědět, jak si vedeš mezi dalšími 143 řešiteli. A jak už jsem slíbil výše, najdeš tu i úlohy 3. a 4. podzimní série. Ve 3. sérii na Tebe čekají úlohy s tematikou **Mřížky a tabulky** a ve 4. sérii pak potkáš téma **Circles**. Jak sis z názvu jistě všiml, tato série je cizojazyčná, takže i její zadání je napsané v angličtině. Proto i od Tebe budeme požadovat řešení psané anglicky. Ale není se čeho bát – jde jenom o cvik a zkušenost a hodnotit budeme jenom matematiku.

V neposlední řadě se pak nezapomeň podívat na první díl zbrusu nového **seriálu**. Letos ho pro Tebe píše *Lenka Kopfová* a *Radek Olšák* a společně se v něm zaměříte na projektivní geometrii. Spolu s povídáním tam najdeš také tři úlohy, na které se určitě vyplatí podívat – co když zrovna ty Ti zajistí pozvánku na jarní soustředění?!

To je od nás zatím všechno, přejeme úspěšné počítání a hodně zábavy na horských drahách!

Za organizátory,

Jáchym Solecný

Co je dále v komentářích?

- Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?
- Vzorové řešení 1. podzimní série
- Anglické povídání ke čtvrté podzimní sérii
- Seriál – Projektivní geometrie I – Pravý úhel pohledu
- Výsledková listina 1. podzimní série
- Příloha: Zadání 3. a 4. podzimní série a 1. seriálové série
- Příloha: Propagační letáček, který můžeš třeba vyvěsit ve škole nebo dát kamarádovi.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1



matfyz

Řešení úloh

Čekal(a) jsi plný počet bodů za všechny úlohy a pohled na výsledkovou listinu Tě zklamal? Nenechej se tím odradit a raději si přečti text s názvem **Jak řešit úlohy korespondenčního semináře** a pusť se do řešení s novou vervou!

A pokud už řešíš dlouho, zkus si ho přečíst také – jistě v něm najdeš tipy, jak psát ještě lépe. Stejně tak si nezapomeň pečlivě projít vzorová řešení úloh první série. I když jsi třeba získal(a) plný počet bodů, možná se dozvíš, jak se dal postup sepsat elegantněji nebo úplně jinak.

Den otevřených dveří

Už za měsíc, ve čtvrtek 21. listopadu, se v Praze koná Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Na této každoroční akci se dozvíš spoustu zajímavostí a užitečných informací o možnostech studia na naší domovské fakultě. Také můžeš nejen u PraSečího stánku potkat mnoho organizátorů a ostatních řešitelů. Více podrobností včetně programu najdeš ve správný čas na adrese mff.cuni.cz/verejnost/dod.

Noví organizátoři MKS

Letos se naše organizátorské řady významně rozrostly. Jmenovitě bylo PraSátko posíleno o následující nové organizátory: *Matěj Doležálek, Lenka Kopfová, Ondřej Krabec, Lucie Kundratová, Josef Minařík, Radek Olšák, Terka Poláková, Venca Steinhäuser, Dominik Stejskal a Ondřej Tkaczyszyn*. Do práce v semináři už se mnozí z nich významně zapojili a dokonce čtyři z nich jsi mohl(a) potkat i na podzimním soustředění. Tímto je vítáme i zde oficiálně, ať víš, kdo nový Ti letos bude opravovat a vymýšlet úlohy.

PraSečí konference

Chceš mít jistotu, že nezmeškáš žádnou seminářovou akci? Chceš, abychom Ti důležité informace posílali e-mailem? Chceš mít možnost psát ostatním řešitelům jinde než na chatu? Pak přesně pro Tebe již druhým rokem funguje e-mailová konference ucastnici@mks.mff.cuni.cz (je to způsob, jak poslat nějakou zprávu mnoha lidem – když na uvedenou adresu přijde e-mail, automaticky se rozešle všem odběratelům). Posílat do ní budeme kromě pozvánek na PraSečí setkání například i důležité informace ohledně organizace semináře. A jak se přihlásíš? Na adresu mks@mff.cuni.cz pošli své jméno a e-mailovou adresu, kterou chceš k odebrání konference používat. A kdybys náhodou časem zjistil(a), že Tě naše zprávy nezajímají, můžeš se stejným způsobem zase odhlásit.

Podzimní soustředění

Ve dnech 21.–29. září proběhlo PraSečí soustředění ve Skleném u Žďaru nad Sázavou. Na zdejší Mezinárodní Kriminalistickou Školu (MKŠ) se sjelo 24 mladých a nadaných detektivů, aby se pod vedením svých starších a zkušenějších kolegů priučili forenzním vědám, dedukci, pronásledování zločinců a mnohemu dalšímu, co správný kriminalista ke své práci potřebuje. Začátek školního roku však zasáhla tragédie, když na první hodině tradičních vyšetřovacích metod za podezřelých okolností zemřel poručík Columbo. Došlo ještě na mnoho zvratů, léček, akčních scén, suplovaných hodin, špatných vtipů, tragických úmrtí i překvapivých zmrtvýchvstání, než se našim začínajícím vyšetřovatelům a přeživším vyučujícím podařilo odhalit a dopadnout pachatele.

Pro čtyřiatřacet nejlepších z podzimní části letošního ročníku (která jako tradičně končí anglickou sérií) uspořádáme také jarní soustředění. Místo ani datum ještě známé nejsou, rozhodně se však máte na co těšit!



Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?

Tento text je primárně určen méně zkušeným řešitelům. Jeho cílem je v krátkosti popsat způsob uvažování a vyjadřování, bez kterého se při řešení matematických úloh nelze obejít.

Pokud se rozhodneš řešit úlohy korespondenčního semináře, nestačí je pouze vypočítat. Body získáš jen v případě, že svůj postup nějak rozumně dostaneš na papír. Je tedy dobré si uvědomit, co se vlastně s řešením děje poté, co jej odeleš. Dostane ho do ruky nedůvěřivý opravovatel, jehož snahou je jej pochopit a nechat se přesvědčit o jeho správnosti. Není to tedy jako opravování kvízových otázek, u nichž se dá rychle ověřit, zda byly zodpovězeny správně. Zkus si proto svá řešení přečíst očima někoho, kdo zadanou úlohu vidí poprvé v životě.

Co po Tobě úloha chce?

Úloha často vybízí „*Dokažte!*“, „*Ukažte!*“, „*Zdůvodněte!*“. To znamená, že chceme, abyste ze zadání vyvodili dokazované tvrzení pomocí logických kroků podložených pádnými argumenty. Nestačí tedy nakreslit obrázek, v němž úhel ze zadání vyjde pravý, či ověřit platnost nerovnosti na kalkulačce nebo na počítači pro 150 různých hodnot. Je totiž potřeba ukázat, že tvrzení platí pro všechny možné konstelace, kterých je obvykle nekonečně mnoho.

Jiné úlohy na řešitele apelují „*Rozhodněte!*“, například „*rozhodněte, zda platí*“, „*rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii*“ nebo „*rozhodněte, které z čísel je větší*“. Samotné rozhodnutí nestačí, je třeba jej zdůvodnit. To znamená tvrzení dokázat, případně najít protipříklad.

Často se setkáš s úlohami typu „*Najděte!*“, „*Najděte všechny ...!*“. V prvním případě stačí, když najdeš nějaké vyhovující řešení. Je potřeba ukázat, že odpovídá požadavkům v zadání, ale už není potřeba se zabývat dalšími řešeními. Druhý případ je složitější, neboť tehdy je potřeba najít všechna vyhovující řešení, a navíc dokázat, že žádné jiné už neexistuje. Obměnou může být například „*Najděte nejmenší ...!*“, kde je potřeba najít řešení a ukázat, že menší neexistuje.

Co nemáme rádi?

Do řešení piš jasná tvrzení a zdůvodňuj je. Zadání opisovat nemusíš. Pokud tvrdíš něco, co není pravda, pak je to ideální příležitost pro opravovatele strhnout Ti body. Navíc to, co z nepravdivého tvrzení vyvodíš, nejspíš také neplatí. Máš-li hypotézu, kterou neumíš dokázat, přiznej, že je to hypotéza. Sice pravděpodobně nedostaneš plný počet bodů, ale opravovatel bude rád, že nemusí ve Tvém řešení zbytečně hledat vysvětlení.

Dej si pozor na následující formulace:

- „*je zřejmé*“, „*je vidět*“ – Tyto obraty lze v řešení použít. Řešitelé je ale často používají v případech, kdy daná věc není vůbec zřejmá, ba dokonce, když neplatí.

- „*provedeme analogicky*“ – Tuto formulaci můžeš použít pouze v případě, že stačí v předchozích argumentech lehká změna značení. Analogie rozhodně neznamená zobecnění, například z důkazu pro 3 nelze takto vyrobit důkaz pro 50, či dokonce pro obecné n .

- „*z obrázku je patrné*“ – Obrázky jsou velmi dobré k tomu, aby se opravovatel lépe orientoval v řešení a mohl jej snáze pochopit. Postup by však měl být srozumitelný i bez něj, nikdy se na něho neodkazuj jako na nedílnou součást řešení. Pokud v obrázku zavedeš nějaké značení, měl bys ho vysvětlit v textu, ne ho jen začít používat.

- „*stačí prozkoumat nejhorší variantu*“ – Sice by to mohlo stačit, ale dokud neprozkoumáme všechny varianty, nelze říct, že tato konkrétní je nejhorší. Můžeme si to myslet, ale musíme to dokázat. Stejný problém nastává i u dalších formulací („*nejlepší bude, když*“ a podobně).

Pokud tedy některou z těchto frází používáš, rozmysli si, zda se nejedná o jeden z výše uvedených nešvarů.

Co a jak dokazovat?

V této sekci se nejprve podíváme, jak správně interpretovat zadání, a poté uvedeme některé základní důkazové techniky, které můžeš ve svých řešeních použít.

Důkaz by měl vycházet z předpokladů a postupovat k závěrům úlohy. Dej si pozor, abys během řešení nepoužil něco, co nevyplývá z předpokladů nebo předchozích úvah, zejména ne dokazované tvrzení!

- „jestliže, pak“, „pokud, pak“, „Dokažte, že pokud platí A , pak platí B .“ – Kdykoliv se v zadání vyskytne věta tohoto typu, znamená to, že A je předpoklad (to, z čeho vycházíme a co můžeme při řešení používat), zatímco B je závěr (to, co chceme dokázat).

Předpoklad a závěr nesmíš za žádných okolností zaměnit! Srovnej následující tvrzení:

Jestliže je číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé. (platí)

Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné čtyřmi. (neplatí, např. pro 2)

- „právě když“, „právě tehdy, když“, „tehdy a jen tehdy, když“, „Dokažte, že A platí právě tehdy, když platí B .“ – V tomto případě se vlastně jedná o dvě úlohy. Je totiž potřeba dokázat následující dvě tvrzení:

(i) Pokud platí A , pak platí B .

(ii) Pokud platí B , pak platí A .

Platnost tvrzení se nezmění, když A a B prohodíme, viz následující příklad.

Dané číslo je dělitelné deseti, právě když jeho poslední cifrou je nula.

Poslední cifrou daného čísla je nula, právě když je dělitelné deseti.

Důkazových technik je mnoho a my si zde ukážeme dvě základní – přímý důkaz a důkaz sporem.

V přímém důkazu postupujeme od předpokladů, z nichž logickými úvahami vyvozujeme dílčí závěry, až dospějeme ke kýženému výsledku. Naproti tomu v důkazu sporem si na začátku představíme, co by se stalo, kdyby tvrzení neplatilo, a z tohoto předpokladu pak odvodíme evidentně neplatné tvrzení (spor). Použití této techniky si ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že každé prvočíslo větší než 2 je liché.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že jsme našli sudé prvočíslo p větší než 2. Dvojka je jeho dělitel, který není roven ani jedné, ani p . To je spor s předpokladem, že p je prvočíslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Význam výrazů

Když matematik napíše vzoreček, nepředstavuje si pod ním nic jiného než běžné tvrzení. Pro úpravy výrazů, rovnic apod. tedy platí stejná pravidla jako pro obvyklé dokazování.

Definuj všechny proměnné, které ve vzorečích používáš a nejsou v zadání. Opravovatel jinak těžko pozná, co jsi jimi chtěl říct. Se značením to však není třeba přehánět, a proto si označ vždy jen to, co v řešení budeš potřebovat. Příliš mnoho písmenek přehlednosti neprospívá.

Dále připomínáme, že je v důkazu třeba vycházet z předpokladů, ne z dokazovaného tvrzení. To ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$.

Správné řešení může vypadat takto:

Řešení. Kdykoli umocníme reálné číslo na druhou, získáme nezáporné číslo. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b, \\ 2\sqrt{ab} &\leq a + b, \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a + b}{2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiná možnost je tato:

Řešení. Pro spor předpokládejme, že máme dvojici čísel a, b , pro která tvrzení neplatí, tedy $\sqrt{ab} > (a + b)/2$. Pak ovšem

$$\begin{aligned} ab &> \frac{(a + b)^2}{4}, \\ 4ab &> (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ 0 &> a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \end{aligned}$$

To je spor, neboť umocněním reálného čísla nemůžeme dostat záporné číslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Oba tyto postupy byly v pořádku. První (přímý) důkaz vycházel pouze ze známých faktů a dobral se kýženého výsledku, druhý důkaz (sporem) předpokládal neplatnost tvrzení a došel k něčemu, co neplatí.

K řešení ale není možné přistupovat zcela přímočaře, tedy jen upravovat dokazovaný vzoreček. To proto, že jakmile do řešení napíšeš $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$, znamená to, že již předpokládáš, že daná nerovnost platí. Jenže to nemůžeš předpokládat, neboť Tvým cílem je to teprve dokázat.

Uveďme ještě jeden příklad, na kterém si ukážeme dvě různá použití proměnných.

Příklad. V závislosti na parametrech a, b, c vyřešte kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Zadání říká, že pro libovolná, ale pevně zvolená čísla a, b, c hledáme všechna x , která vyhovují zadané rovnici. Proměnné a, b, c označují v celém příkladu stále tatáž tři (ne nutně různá) reálná čísla. Každá konkrétní volba parametrů vlastně určuje jinou úlohu, ale přitom chceme vyřešit všechny tyto úlohy naráz, obecně. Proměnná x hraje zcela odlišnou roli – její hodnota je neznámá a naším cílem je ji určit.

Používání známých tvrzení

Může se stát, že v literatuře nebo na internetu narazíš na tvrzení, které Ti usnadní řešení úlohy. Pokud je to nějaká věta, která má jméno (například Cevaova věta), nezapomeň její název do řešení uvést. Pravděpodobně ji budeme znát, a když ne, dovedeme ji alespoň najít. Důkaz přitom popisovat nemusíš. V případě, že se jedná o nepojmenované tvrzení, napiš nám zdroj, kde jsi ho našel.

Vzorová řešení

V neposlední řadě bychom Tě chtěli povzbudit k řešení našich úloh. Pokud náš seminář vidíš poprvé, nedej se odradit případnými počátečními neúspěchy. Prostuduj si svá opravená řešení a nezapomeň se podívat také na vzoráky. Vzorové řešení Ti má často co nabídnout i tehdy, když jsi úlohu vyřešil správně. Můžeš v něm najít různé zajímavé přístupy či myšlenky, a něco nového se tak naučit. V poznámkách opravovatele si pak můžeš přečíst, jak se s řešením potýkali ostatní.

Věříme, že Ti tento text usnadní řešení úloh v semináři i jinde a pomůže Ti osvojit si základy matematického uvažování. To, co se naučíš, není jen schopnost řešit matematické úlohy, ale také schopnost samostatně hlouběji přemýšlet. To se Ti určitě bude někdy hodit, a to i tehdy, když se matematikou dále zabývat nebudeš.

Přejeme Ti mnoho radosti při objevování tajů matematiky!

Historky ze školní jídelny

1. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Při pohledu na zmenšující se porce masa ve školní jídelně Pavla napadlo, jestli by nešlo nahradit každé z písmen M , A , S , O číslicí (ne nutně každé jinou) tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} M A S O \\ M A S \\ M A \\ M \\ \hline 2 0 1 9 \end{array}$$

Poradte mu, jak na to.

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Zadání přepíšeme do tvaru jedné rovnice, kde M , A , S a O jsou celá čísla od nuly do devíti:

$$1111M + 111A + 11S + O = 2019.$$

Když bude $M = 0$, součet bude roven nejvýše $999 + 99 + 9 = 1007 < 2019$. Takže $M \neq 0$. Pokud však $M \geq 2$, tak jen člen $1111M \geq 2222$, což je víc než 2019. Tedy jestli rovnice má mít řešení, M musí být 1. Dosadíme do původní rovnice $M = 1$ a zjednodušíme:

$$111A + 11S + O = 2019 - 1111 = 908.$$

Kdyby bylo $A \leq 7$, levá strana by byla maximálně $777 + 99 + 9 = 885$, tedy méně než pravá strana. Jestliže $A = 9$, bude sám člen $111A = 999$ příliš velký. Získali jsme tedy nutně $A = 8$.

Opět dosadíme do předchozí rovnice:

$$11S + O = 908 - 888 = 20.$$

Jelikož O je nejvýše devět, nesmí se S rovnat nule. Také kdyby S bylo alespoň dva, muselo by být O záporné. Takže $S = 1$ a lehce dopočteme $O = 20 - 11 = 9$.

Jediné vyhovující řešení je $M = 1$, $A = 8$, $S = 1$ a $O = 9$. Jeho správnost snadno ověříme zkouškou.

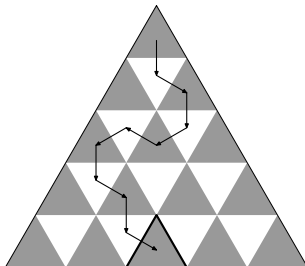
POZNÁMKY:

K získání plného počtu bodů bylo potřeba kromě nalezení vyhovujících číslic také dostatečně popsat postup řešení nebo provést zkoušku. Naprostá většina řešitelů si s úlohou hravě poradila, nejčastěji pomocí uvedeného postupu nebo rozebíráním možností, které číslice lze pod sebou sečíst, aby po přičtení vznikla daná cifra čísla 2019. Při tomto postupu bylo často opomíjeno zmínění a vyvrácení možnosti, že při sčítání může teoreticky vzniknout přenos dvojky, za což jsem však body nestrhávala.

(Lucka Kundratová)

Úloha 2.

Terka se pohybuje po trojúhelníkové podlaze jídelny tvořené 25 dlaždičkami jako na obrázku. Začíná na horní dlaždičce a vždy může přejít na dlaždičku sousedící hranou. Nesmí ale dvakrát vstoupit na stejnou dlaždičku ani chodit směrem nahoru. Kolika způsoby může Terka doskákat na prostřední dlaždičku ve spodní řadě?



Podlaha jídelny se zakreslenou jednou možnou cestou.

(Martin Raška)

ŘEŠENÍ:

Rozdělme si podlahu na pět pater, která očíslováme shora dolů jedna až pět. Jelikož Terka nesmí chodit nahoru, jakmile nějaké patro opustí (směrem dolů), už se do něj nemůže vrátit. Také snadno vidíme, že každé patro může opustit z libovolné, avšak pouze šedé, „výstupní“ dlaždičky. Ta je v prvním patře jen jedna, ve druhém patře jsou dvě, ve třetím tři a ve čtvrtém čtyři.

Představme si nyní, že v každém patře vybereme jednu výstupní dlaždičku, přičemž v pátém patře vybereme tu cílovou. Jistě existuje cesta, která pro opuštění jednotlivých pater použije právě tyto dlaždičky, vždy po vstupu do nižšího patra se totiž stačí vydat správným směrem (doleva či doprava) za další výstupní dlaždičkou. A co víc, taková cesta je daná jednoznačně, protože Terka se nemůže vydat opačným směrem nebo výstupní dlaždičku přejít – musela by se vracet nebo opustit patro jinde.

Ukázali jsme tedy, že vybrat cestu pro Terku je to samé, jako vybrat v každém patře jednu šedou dlaždičku (a v pátém patře tu cílovou). Výběry v jednotlivých patrech jsou nezávislé, takže počty možností musíme násobit. Proto má Terka na výběr $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ různých způsobů jak doskákat na prostřední dlaždičku ve spodní řadě.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů postupovala stejně jako vzorové řešení. Ovšem ne všichni své výpočty dostatečně uspokojivě odůvodnili. Je lepší do řešení napsat pozorování, která se Ti zdají zřejmá, než odevzdat řešení, kde si opravovatel musí z napsaného výpočtu většinu postupu domyslet.

Někteří řešitelé vypisovali všechny možné cesty. Sami jistě uznají, že to dalo dost práce, a to už u pěti pater. U třiceti pater by takovou práci nechtěl ani počítač, zato vzorové řešení se dá snadno zobecnit.

(Dominik Stejskal)

Úloha 3.

Po obvodu talíře je napsáno 2018 celých čísel se součtem 1. Martínek zkoumá souvislé úseky tvořené 1 až 2017 čísly. Úsek nazývá *nemastný*, pokud má kladný součet. V opačném případě mu říká *neslaný*. Ukažte, že nemastných úseků je stejně jako neslaných.

(Fila Čermák)

ŘEŠENÍ:

Ke každému úseku, který Martínek zkoumá, existuje jeho *doplňěk*, tedy úsek obsahující všechna čísla, jež nejsou obsažena ve zkoumaném úseku. Zřejmě je tento doplňěk vždy také souvislým úsekem a zároveň je tvořen 1 až 2017 čísly, neboť všech čísel na talíři je 2018.

Součet čísel v obou úsecích je ze zadání roven jedné. Z toho vyplývá, že vždy právě jeden ze zkoumaného úseku a jeho doplňku je nemastný a právě jeden je neslaný. Kdyby totiž oba byly nemastné (s kladným součtem), pak by jejich součet musel být alespoň 2. A naopak, pokud by byly oba neslané (s nekladným součtem), pak by jejich součet musel být nejvýše 0. Každý úsek tak umíme jednoznačně spárovat s jeho doplňkem, přičemž v páru je vždy nemastný a neslaný úsek. A protože je párování jednoznačné, úseků obou typů musí být stejný počet.

POZNÁMKY:

Drtivá většina došlých řešení byla správně nebo alespoň obsahovala správnou myšlenku. Na co si bylo při důkazu obzvlášť potřeba dát pozor, bylo opravdu dokázat oba směry implikace. Některá řešení dokázala, že pokud je Martínkem zkoumaný úsek nemastný, pak jeho doplňěk musí být neslaný. To ale na kompletní důkaz ještě nestačí. Je potřeba také ukázat, že pokud je první úsek neslaný, pak druhý musí být nemastný. (Lenka Kopfová)

Úloha 4.

Ve frontě na oběd stojí n lidí, z nichž někteří jsou pravdomluvní a ostatní lháři. Pravdomluvní vždy mluví pravdu a lháři vždy lžou. Každý z nich tvrdí, že před ním je více lhářů než za ním pravdomluvných. Určete, kolik stojí ve frontě lhářů.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že ve frontě je $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ lhářů. Vzhledem k tomu, že první ve frontě má před sebou 0 lhářů a za sebou více než -1 pravdomluvných, musí jít o lháře, tedy počet lhářů $l \geq 1$. Pokud máme ve frontě l lhářů, pak nám výrok nejzadnějšího z nich řekne, že počet lhářů před ním ($l - 1$) je *menší než nebo roven* počtu pravdomluvných za ním. Tedy celkový počet $n \geq 2l - 1$. Dostaneme $l \leq \frac{n+1}{2}$.

Obdobně mějme p pravdomluvných. Pro $n = 1$ není ve frontě žádný pravdomluvný, dále tedy předpokládáme $n \geq 2$. Vzhledem k tomu, že poslední ve frontě má za sebou 0 pravdomluvných a před sebou alespoň jednoho lháře, musí jít o pravdomluvného, tedy v každé takové frontě je $p \geq 1$. Ten z nich, který stojí nejvíce vpředu, nám říká, že počet lhářů před ním je větší než počet pravdomluvných ($p - 1$) za ním. Z toho už $n > (p - 1) + 1 + (p - 1) = 2p - 1$. Protože $p = n - l$, dostaneme

$$\begin{aligned} n &> 2n - 2l - 1, \\ 2l + 1 &> n, \\ l &> \frac{n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Kombinací odhadů pro p a pro l získáváme $l = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ještě je potřeba ověřit, že takový počet lhářů umíme do fronty nějak postavit. Zjevně pokud postavíme nejprve $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ lhářů a za ně $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pravdomluvných, půjde o validní pořadí se správným počtem lhářů.

ALTERNATIVNÍ (A MNOHEM ČASTĚJŠÍ) ŘEŠENÍ:

Indukcí na k ukážeme, že prvních k je lhářů a posledních k je pravdomluvných, kde $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

- (1) Pro $k = 0$ tvrzení platí.
- (2) Pokud $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pak má člověk na pozici $k + 1$ před sebou k lhářů a za sebou nejmeně k pravdomluvných. Jeho výrok (pro připomenutí „počet lhářů přede mnou je *větší než* počet pravdomluvných za mnou“) nemůže platit, pročez musí jít o lháře. Podobně člověk na $(k + 1)$ -tém místě od konce má za sebou k pravdomluvných a před sebou nejmeně k lhářů, jeho výrok jistě platí, a jde tedy o pravdomluvného.

Konečně pro n liché nám zbývá jeden člověk, o němž jsme nerozhodli. Ježto je počet lhářů před ním stejný jako počet pravdomluvných za ním, musí jít o lháře. Obecně tedy máme $\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ lhářů.

POZNÁMKY:

Úloha sváděla k několika typům řešení, které nakonec nikam nevedly nebo řešiteli extrémně ztěžovaly práci při zápisu:

Někteří chtěli řadu *vystavět* induktivně. To je obtížné, nejen proto, že není hned jasné, že řada délky $n + 1$ musí mít nějaké snadno určitelné úseky společné s řadou délky n , ale hlavně proto, že každý nově přidaný strážník může měnit pravdivost výroků velkého množství ostatních. Přínejmenším bylo třeba dokázat, že umíme přidávat na takové místo, kde toto nenastane, ale to neudělal asi nikdo. Použitelná indukce vedla pro pevně dané n a od obou krajů postupně *rozhodovala* o strážnících na jednotlivých místech, tedy jako ve vzoráku. Jedno z dobrých řešení tohoto typu měl Karel Chwistek. Hodně lidí mělo stejnou myšlenku (první lhář, poslední pravdomluvný, pak totéž obecně s k -tým a $(n - k)$ -tým), ale zapomněli si ošetřit například situaci $k = n - k$ a tak se jim řešení rozbíjelo minimálně pro všechna lichá n , ne-li pro všechna n . Dost lidí předkládalo konstrukci (ta je tady dost snadno odhadnutelná), aniž pak dokázali, že vede na jediný možný počet, či že vůbec funguje. Speciálně se objevovaly pokusy argumentovat případy pro několik malých n , kterým ovšem chyběla jakákoli zobecňující myšlenka.

Co většinou dopadalo dobře byla řešení, která dokázala, že mezi strážníky nemůže stát lhář za pravdomluvným, po čemž už zbytek úvah byl triviální. Nicméně to je stále spousta zbytečné práce oproti řešením pomocí nerovností (popř. obhajování odhadů) získaných od dvou vhodně vybraných strážníků, která měla tu ohromnou výhodu, že se jinak nemusela vůbec starat o pořadí lidí ve frontě (zadání se přeci ptá jen na počet) a ušetřila si spousty zmatku s logikou a vůbec. Takové velmi svižné řešení měl třeba Jonáš Havelka. (Ondra Tkaczyszyn)

Úloha 5.

Na stole leží n hromádek oschlých knedlíků. Na začátku tvoří každou hromádku jeden knedlík. Kuchařka si v každém kroku vybere dvě hromádky a spojí je do jedné. Za spojení hromádek obsahujících x a y knedlíků dostane kuchařka $x \cdot y$ korun. Kolik si může kuchařka nejvýše vydělat postupným splácáním všech knedlíků na jednu hromadu?

(Pavel Hudec)

ŘEŠENÍ INDUKCÍ:

Dokažme, že maximální možný výdělek pro n knedlíků je $\frac{n(n-1)}{2}$. Pro $n = 1$ to zřejmě platí, nemůžeme spojit nic, a tím vyděláme přesně $\frac{1(1-1)}{2} = 0$ korun.

Mějme tedy n knedlíků. V posledním kroku, kterým spojíme všechny knedlíky na jednu hromádku, spojíme dvě zbývající hromádky o velikostech k a $n - k$. Za toto spojení tedy dostaneme $k(n - k)$ korun. Protože obě hromádky obsahují méně než n knedlíků, víme z indukčního předpokladu, že za hromádku velikosti k jsme získali nejvýše $\frac{k(k-1)}{2}$ a za hromádku velikosti $n - k$ nejvýše $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. Za hromádku velikosti n tedy získáme maximálně

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + k(n-k) &= \frac{k(k-1) + (n-k)(n-k-1) + 2k(n-k)}{2} = \\ &= \frac{k^2 - k + n^2 - nk - n - nk + k^2 + k + 2nk - 2k^2}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Všimněme si, že když spojujeme dvě hromádky, vyděláme přesně tolik korun, kolik existuje různých dvojic knedlíků takových, že jeden knedlík je z první hromádky a druhý knedlík z druhé hromádky. Kuchařka tedy v každém kroku vydělá právě jednu korunu za každou dvojici knedlíků, kterou v daném kroku spojí. Vzhledem k tomu, že hromádky nelze rozpojovat, zůstanou tyto dva knedlíky ve stejné hromádce, a potkají se tak nejvýše jednou.

Protože na začátku jsou všechny knedlíky rozdělené a na konci všechny v jedné hromádce, je zřejmé, že každý knedlík se potkal s každým jiným alespoň jednou. Kuchařka tudíž každé dva knedlíky spojila právě jednou a za každé takovéto spojení vydělala jednu korunu. Proto nezáleží na pořadí, v jakém kuchařka hromádky spojuje – vždy vydělá stejně korun, jako existuje neuspořádaných dvojic knedlíků, tedy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

POZNÁMKY:

Velká část z Vás úlohu zvládla vyřešit, ať už pomocí indukce, kombinatorického nahlédnutí či jiného důkazu, že na pořadí nezáleží. Bohužel spousta lidí jen spočítala, kolik si kuchařka vydělá, když bude přidávat knedlíky postupně po jednom, a nedokázala, že je to nejvyšší možný výdělek, což je zřejmě dokázáno, pokud ukážeme, že na pořadí nezáleží a vydělá vždy stejně. (Ondřej Krabec)

Úloha 6.

V písmenkové polévce plave sedm různých lichých prvočísel. Malý Kubiček si myslel, že pro každou dvojici p, q prvočísel z polévky platí, že zbylých pět prvočísel dělí hodnotu $p^8 - q^8$. Ukažte, že se Kubiček spletl.

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Ze sedmice prvočísel plovoucích v Kubičkově polévce zvolme nejmenší dvě a označme je p, q tak, aby platilo $p > q$. Ukážeme, že $p^8 - q^8$ nemůže mít pět různých prvočíselných dělitelů větších než p .

Rozložíme

$$p^8 - q^8 = (p - q)(p + q)(p^2 + q^2)(p^4 + q^4).$$

Obě p, q jsou lichá, takže všechny činitele v součinu na pravé straně tohoto rozkladu jsou kladná (platí $p > q$) sudá čísla. Budeme chtít ukázat, že závorky na pravé straně rozkladu mohou mít po řadě nejvýše 0, 0, 1 a 3 různé prvočíselné dělitele větší než p . Využijeme toho, že pokud je přirozené číslo b násobkem přirozeného a , pak už nutně $a \leq b$.

Pro libovolné prvočíslo $r > p$ platí

$$p - q < p < r,$$

takže žádné takové r nemůže dělit $p - q$.

Stejně pozorování učiníme i o $p + q$: jedná se o sudé číslo, takže pokud je (liché) prvočíslo $r > p$ jeho dělitelem, musí dělit i $\frac{p+q}{2}$. Přitom ale díky $p > q$ máme

$$\frac{p+q}{2} < \frac{p+p}{2} = p < r,$$

takže žádné takové r nemůže dělit $p + q$.

Dále ukažme, že nejvýše jedno prvočíslo $r > p$ dělí $p^2 + q^2$. Pro spor nechť je tento činitel dělitelný dvěma různými prvočísly $r_1, r_2 > p$. Potom musí $p^2 + q^2$ být násobkem nejmenšího společného násobku čísel r_1, r_2 . Tím je $r_1 r_2$, jelikož se jedná o různá prvočísla. Pak ale z jejich lichosti musí $r_1 r_2$ dělit i $\frac{p^2+q^2}{2}$, což dá spor v podobě

$$r_1 r_2 \leq \frac{p^2 + q^2}{2} < \frac{p^2 + p^2}{2} = p \cdot p < r_1 r_2.$$

Obdobně ukážeme, že nejvýše tři prvočísla $r_1, r_2, r_3 > p$ dělí $p^4 + q^4$. Pro spor nechť je tento činitel dělitelný čtyřmi po dvou různými prvočísly $r_1, r_2, r_3, r_4 > p$. Pak je díky jejich různosti a lichosti $\frac{p^4+q^4}{2}$ násobkem $r_1 r_2 r_3 r_4$, což dá spor v podobě

$$r_1 r_2 r_3 r_4 \leq \frac{p^4 + q^4}{2} < \frac{p^4 + p^4}{2} = p \cdot p \cdot p \cdot p < r_1 r_2 r_3 r_4.$$

Nyní už stačí jen pozorování, že každý prvočíselný dělitel čísla $p^8 - q^8$ musí dělit alespoň jednoho činitele na pravé straně rozkladu tohoto výrazu. Přitom ale každé ze zbylých pěti prvočísel z Kubičkovy polévky je větší než p a zároveň jsme ukázali, že závorky na pravé straně rozkladu mohou takových prvočíselných dělitelů mít po řadě nanejvýš 0, 0, 1 a 3, tedy dohromady $4 < 5$. Některé ze zbylých pěti prvočísel tedy nedělí $p^8 - q^8$, jak se mělo dokázat.

ŘEŠENÍ PRO ŠEST PRVOČÍSEL (VOLNĚ PODLE VÁCLAVA JANÁČKA):

Dokážeme, že znění úlohy platí, pokud místo sedmi lichých prvočísel uvažujeme pouze šest – tedy i pokud by si Kubiček myslel, že pro každá p, q ze šesti prvočísel v polévce dělí čtyři zbylá hodnotu $p^8 - q^8$.

Nahlédneme, že pro prvočísla p a celá čísla a, b platí, že pokud $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$, pak už určité $a \equiv b \pmod{p}$ nebo $a \equiv -b \pmod{p}$. První kongruence znamená $p \mid (a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$, takže pro prvočísla p musí nastat jedna z možností $p \mid (a - b)$, $p \mid (a + b)$, což přesně odpovídá kongruencím, které chceme vyvodit. Z tohoto pozorování speciálně plyne, že pro dané d existují nejvýše dva možné zbytky, které může celé číslo c splňující $c^2 \equiv d \pmod{p}$ dávat modulo p .

Pro spor předpokládejme, že se Kubiček nemýlí, a označme m to největší ze šesti prvočísel a $p_1, \dots, p_5$ zbylých pět. Potom má m dělit každé $p_i^8 - p_j^8$ pro $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, což značí

$$p_1^8 \equiv p_2^8 \equiv \dots \equiv p_5^8 \pmod{m}.$$

Z pozorování výše existují nejvýše dva zbytky, které můžou $p_1^4, \dots, p_5^4$ dávat mod m . Pak jsou z Dirichletova principu jednomu z těchto zbytků kongruentní alespoň tři z čísel $p_1^4, \dots, p_5^4$. BÚNO jsou to p_1^4, p_2^4, p_3^4 . Pak ale analogicky máme $p_1^4 \equiv p_2^4 \equiv p_3^4 \pmod{m}$, takže existují nejvýše dva zbytky, které mohou p_1^2, p_2^2, p_3^2 dávat mod m . Dirichletovým principem dvě z nich dávají stejný zbytek, BÚNO jsou to p_1^2 a p_2^2 .

Máme tedy $m \mid (p_1^2 - p_2^2) = (p_1 - p_2)(p_1 + p_2)$. To značí, že m dělí alespoň jedno z $p_1 - p_2$, $p_1 + p_2$, resp. dokonce alespoň jedno z $\frac{p_1 - p_2}{2}$, $\frac{p_1 + p_2}{2}$ (obě závorky jsou sudá čísla a m je liché). Pamatujme však, že m jsme zvolili jako největší prvočísla v polévce, takže $m > p_1, p_2$, z čehož i $m > \frac{p_1 - p_2}{2}$, $\frac{p_1 + p_2}{2}$. To je spor, takže Kubiček se vskutku mýlil. Jelikož se musel mýlit už pro šest prvočísel v polévce, musel se nutně mýlit i pro sedm.

POZNÁMKY:

Většina pětibodových řešení využívala volbu nejmenších dvou prvočísel p, q ze sedmice. Někteří řešitelé se pokusili využít naopak největší z daných prvočísel, ale pouze Václav Janáček a Zdeněk Pezlar toto zvládli bez chyb. Prvým jmenovaným si vysloužil +i za to, že úlohu vyřešil dokonce jen s šesti prvočísly namísto sedmi. Mnozí řešitelé po vhodné volbě p, q zvládli ošetřit činitele $p - q$ a $p + q$, ale zasekli se na $p^2 + q^2$ a $p^4 + q^4$. V takových případech jsem uděloval částečné body za rozklad

$$p^8 - q^8 = (p - q)(p + q)(p^2 + q^2)(p^4 + q^4),$$

rozhodnou extrémální volbu prvočísla či prvočísel ze sedmice nebo využití sudosti všech $p^n \pm q^n$.

(Matěj Doležal)

Úloha 7.

Anička si do ovesné kaše nakreslila rovnostranný trojúhelník ABC a označila M střed strany AB . Přišel Fila a nakreslil na stranu AC bod D a na stranu BC bod E tak, aby $|\angle DME| = 60^\circ$. Ukažte, že platí $|AD| + |BE| = |DE| + \frac{1}{2}|AB|$, ať už Fila vybral body jakkoli.

(Marian Poljak)

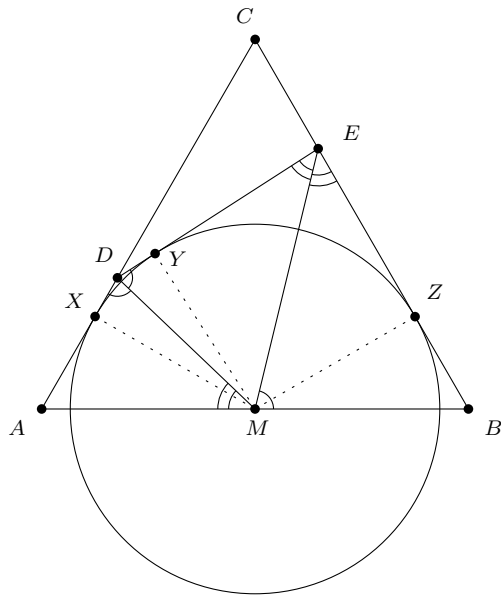
ŘEŠENÍ:

Označme si α velikost úhlu $\angle BME$ a β velikost úhlu $\angle MEB$. Podívejme se nyní na trojúhelník MEB , kde je velikost úhlu $|\angle MBE| = 60^\circ$, a proto $\alpha + \beta = 120^\circ$. Stejně tak $|\angle DME| = 60^\circ$, dopočteme:

$$|\angle AMD| = 180^\circ - |\angle DME| - \alpha = 120^\circ - \alpha = \beta.$$

Obdobně:

$$|\angle ADM| = 180^\circ - 60^\circ - \beta = 120^\circ - \beta = \alpha.$$



Nyní předpokládejme, že bod M je středem kružnice k přípsané straně DE trojúhelníku CDE . Nechtě X, Y, Z jsou po řadě body dotyku k s přímkami DC, DE a EC . Úsečky EZ a EY jsou tečny ke kružnici k z bodu E a obdobně DY a DX jsou tečny z bodu D , tudíž mají tyto dvojice stejnou délku. Už nám jenom stačí říct, že trojúhelník AMX je pravoúhlý s úhly $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$, a proto musí platit $|AX| = \sin 30^\circ \cdot |AM| = \frac{1}{2}|AM|$. Obdobně u trojúhelníku BMZ platí $|BZ| = \frac{1}{2}|BM|$.

Nyní už stačí dosadit naše výsledky do původní rovnice a dostaneme hledanou rovnost:

$$\begin{aligned} |AD| + |BE| &= |XD| + |XA| + |EZ| + |ZB| = |DY| + \frac{1}{2}|AM| + |EY| + \frac{1}{2}|BM| = \\ &= |AM| + |DY| + |EY| = \frac{1}{2}|AB| + |DE|. \end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že M je skutečně středem k . Uvedeme si dva způsoby, jak to udělat.

ŘEŠENÍ POMOCÍ PODOBNOSTI:

Z vypočítaných velikostí úhlu plyne, že trojúhelníky AMD a BEM jsou podobné dle věty *uu*. Z podobnosti a rovnosti $|MB| = |MA|$ ze zadání dostáváme, že $\frac{|DM|}{|ME|} = \frac{|DA|}{|MB|} = \frac{|DA|}{|MA|}$. Zároveň platí $|\sphericalangle DME| = |\sphericalangle MAD| = 60^\circ$, proto jsou trojúhelníky AMD a MED podobné podle věty *sus*. Z podobnosti víme, že $|\sphericalangle DEM| = \beta$ a $|\sphericalangle MDE| = \alpha$, což znamená, že ME je osa úhlu $\sphericalangle DEB$ a DM je osa úhlu $\sphericalangle ADE$. Tedy M je skutečně střed kružnice připsané.

ŘEŠENÍ PŘES SPRÁVNÝ ÚHEL:

Označme M' střed kružnice k . Ten musí ležet na ose úhlu u C , což je přímka CM . Dále musí ležet na osách vnějších úhlů, tedy platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle DM'E| &= 180^\circ - |\sphericalangle M'DE| - |\sphericalangle M'ED| = 180^\circ - \left(\frac{|\sphericalangle ADE|}{2} + \frac{|\sphericalangle BED|}{2} \right) = \\ &= 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{|\sphericalangle CDE|}{2} - \frac{|\sphericalangle CED|}{2} \right) = 90^\circ - \frac{|\sphericalangle DCE|}{2} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Stejně tak ovšem známe i $|\sphericalangle DME| = 60^\circ$. Takový bod je však na polopřímce CM pouze jediný, tedy už nutně $M \equiv M'$.

POZNÁMKY:

Řešení přišlo opravdu hodně a většina z nich byla správná. Někteří se vydali počítací cestou. Občas použili přímo analytickou geometrii nebo upravovali dlouhé algebraické výrazy vycházející z kosinové věty, což byla velice náročná cesta. I přesto byla spousta řešení syntetická nebo málo počítací a většina vyšla na plný počet bodů. Bylo třeba dávat si pozor na odmocňování, u kterého mnozí špatně odůvodnili ekvivalenci úpravy, tudíž jim byl stržen bod. (Filip Čermák)

Úloha 8.

Na $2n$ stolech školní jídelny po obědě zbyly hromádky rýže. Školník s uklízečkou hrají následující hru. Pravidelně se střídají v tazích, přičemž školník začíná. Hráč na tahu si musí zvolit některých n neprázdných stolů a z každého z nich sníst libovolný nenulový počet zrněk rýže (nemusí ze všech stolů sníst stejný počet). Kdo nemůže táhnout, prohrál. V závislosti na počtu stolů a zrněk rýže na nich určete, kdo má vyhrávající strategii.

(Filip Čermák)

ŘEŠENÍ:

Hra zřejmě musí někdy skončit a výsledkem nemůže být remíza, v každé pozici tedy musí mít některý z hráčů vyhrávající strategii. Pozice hry rozdělme na *vyhrávající* (to jsou ty, kde má hráč na tahu vyhrávající strategii) a *prohrávající* (hráč, který není na tahu, má vyhrávající strategii). Potřebujeme rozhodnout, které pozice jsou prohrávající, a dokázat, že pro naše rozdělení platí několik následujících podmínek. Když jsme ve vyhrávající pozici, měli bychom být schopni táhnout tak, aby potom byl soupeř v prohrávající pozici. Naopak když je soupeř v prohrávající pozici, měli bychom po jeho tahu být v pozici vyhrávající, ať už táhne jakkoli. A samozřejmě pozice, ve kterých není možné táhnout, musí být podle zadání prohrávající. Pokud najdeme rozdělení, které tyto podmínky splňuje, bude už nutně správné.

Označme počet zrněk na nejmenší hromádce k . Nechtě jsou prohrávající pozice právě ty, ve kterých je na více než n stolech právě k zrněk rýže. Pokud jsme ve vyhrávající pozici, můžeme vybrat n hromádek, na kterých je více než k zrněk, a zmenšit je tak, aby na každé z nich bylo zrněk právě k . Když jsme v prohrávající pozici, musíme kvůli Dirichletovu principu zmenšit aspoň jednu hromádku, kde je k zrněk. Nové minimum tedy bude menší než k . My jsme ale mohli zmenšit jenom n hromádek, nová pozice je tedy vyhrávající (nejmenších hromádek je maximálně n). Koncové pozice obsahují aspoň $n + 1$ prázdných hromádek, jsou tedy prohrávající. Tím jsme ukázali, že naše rozdělení pozic na vyhrávající a prohrávající splňuje požadované podmínky a je skutečně správné.

Školník má vyhrávající strategii právě tehdy, když je nejmenších hromádek nejvýše n . V opačném případě má vyhrávající strategii uklízečka.

POZNÁMKY:

Úlohu odevzdalo poměrně velké množství řešitelů a většina z nich si s úlohou poradila. Na první pohled nemusí být jasné, jak nás ve vzorovém řešení napadlo vybrat zrovna tyhle prohrávající pozice. Stačí se podívat na pozice, kde jsou hromádky s málo zrnky (nejmenší hromádka má třeba 0-2 zrnka). Z těchto snadno řešitelných případů už je možné odhadnout, jak budou obecně vypadat prohrávající pozice. Pokud Tě tato úloha zaujala a chtěl(a) by ses o teorii her dozvědět něco víc, můžeš se podívat na seriál o teorii her z 32. ročníku.¹

(Josef Minařík)

¹Seriál najdeš na adrese <https://mks.mff.cuni.cz/archive/32/12.pdf>.

Introductory Text to the 4th Autumn Series

The topic of the 4th autumn series this year is Circles. This text should provide you with a basic insight into the theorems you might want to use together with a vocabulary which will be useful when writing down your solutions. You may use the theorems stated here without proving them.

Angles in Circles

In English literature, we often denote a circle by ω and its centre by O . If A and B are two points on the circle, then the line segment AB is called a *chord*. Also if X is a point on the same circle, then we say the angle AXB is *subtended* by the chord AB , or equivalently by the arc AB .

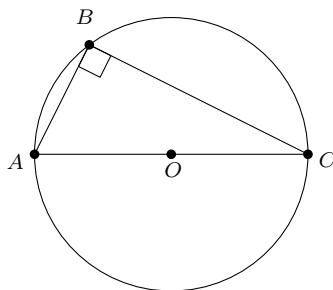
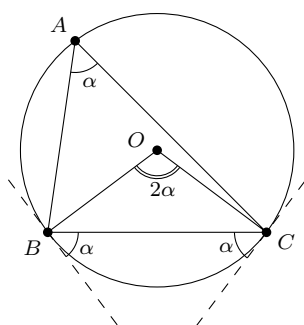
Now let C be another point on ω . Then the angle BAC is said to be *inscribed* in ω and the angle BOC is said to be a *central angle* in ω .

These angles play an important role in the two upcoming theorems, which are quite short, but very powerful and useful in many problems and theorems in geometry.

Theorem. (Inscribed Angle Theorem) An angle inscribed into a circle is half of the central angle subtended by the same chord.

Corollary. (Thales's Theorem) If A, B, C are distinct points on a circle where AC is the diameter, then ABC is a right angle.

Theorem. (Tangent Chord Theorem) An angle between a tangent line and a chord is half of the central angle subtended by the same chord.



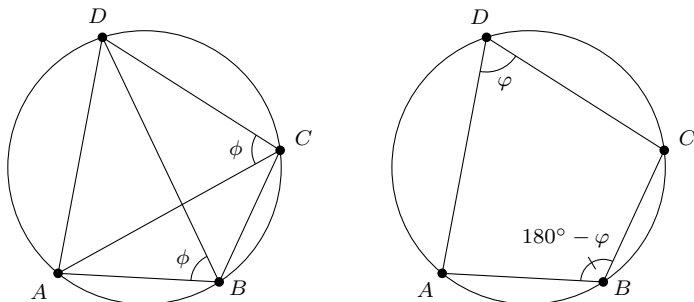
Cyclic Quadrilateral

We say a set of points is *conconcyclic* if they lie on a common circle, i.e. if they are all equally distant from a single centre. A quadrilateral whose vertices are concyclic is then called a *cyclic quadrilateral*.

Using the two theorems above, we can notice a few interesting properties of cyclic quadrilaterals:

Proposition. A quadrilateral $ABCD$ is cyclic if and only if

- (1) the angle between a side and a diagonal is equal to the angle between the opposite side and the other diagonal, for example $\angle ABD = \angle ACD$,
- (2) the opposite angles sum to 180° , for example $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.



Cyclic quadrilaterals reveal a lot of information about angles we are interested in, so it is worth trying to find them and using the information they give us. So let's try it out on an example:

Problem. Let $ABCD$ be a square and let X be a point on the shorter arc AB of its circumcircle. Let Y be the intersection of XC with AB and Z the intersection of XD with AC . Prove that YZ is perpendicular to AC .

Solution. Suppose $BCZY$ is a cyclic quadrilateral. Then by applying part (2) of the above proposition, we have $\angle YBC + \angle YZC = 180^\circ$. And as YBC is a right angle, so is YZC . Now we just need to show $BCZY$ is cyclic. Both angles ADX and ACX are inscribed to the circumcircle of $ABCD$ and are subtended by the same arc AX , so by the Inscribed Angle Theorem they are congruent. Furthermore, from the symmetry of B and D with respect to AC , we have $\angle ADZ = \angle ABZ$. Hence

$$\angle ZCY = \angle ACX = \angle ADX = \angle ADZ = \angle ABZ = \angle ZBY$$

and by part (1) of the above proposition, $BCZY$ is cyclic, as desired.

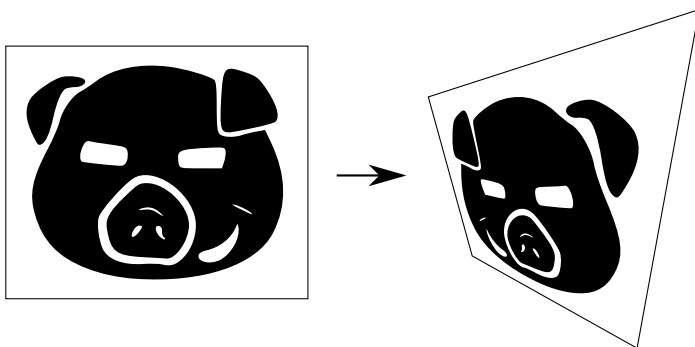
Hopefully this text gave you a decent start into the next series. If you think you struggled to understand this text, or if you would like to know more about this topic, we have a great introductory text (written in Czech) from last year. You can find it at <https://mks.mff.cuni.cz/archive/38/uvod2j.pdf>. Otherwise, happy solving!

Projektivní geometrie I – Pravý úhel pohledu

Pár slov úvodem

Milý příteli,

do rukou se Ti dostává první díl letošního seriálu, který se bude zabývat projektivní geometrií. Na geometrii se můžeme dívat jako na takové obrázky – různé přímky, kružnice, trojúhelníky nakreslené na papíře. Pod projektivní geometrií si můžeš prozatím představit dívání se na takové obrázky „z různých stran“. Ukážeme si, že zapeklitý problém je často těžký právě tím, že se na něj koukáme ze špatného úhlu pohledu. Pokud obrázek obejdeme, nakloníme hlavu nebo si vedle něj lehneme do trávy, pokaždé vypadá trochu jinak. A když se umíme na obrázky koukat z toho správného úhlu, rázem se z obecných trojúhelníků stávají rovnostranné, z čtyřúhelníků obdélníky, z obecných přímek rovnoběžky a podobně. Dokazovat tvrzení pro tyto objekty je pak často mnohem lehčí, než jak tomu bylo v původním zadání.



V seriálu si budeme kreslit spoustu obrázků, proto se neděs jeho délky. Z praktických důvodů nebudeme všechno dokazovat úplně do detailů a formálně, a tak něco necháme jen pro zájemce. Pokud Ti formální detaily neprijdou tak důležité, tak se s nimi nemusíš moc trápit :-). Seriál doplňují spíše lehčí *cvičení*, která by měla doprovázet nové věci představené v dané kapitole. Cvičení doporučujeme ře-

šit chronologicky při čtení. Na konci každé kapitoly najdeš úlohy. Ty můžou mít různé obtížnosti, od lehkých až po velmi těžké. Vůbec nevádí, pokud jich vyřešíš jen pár nebo některé přeskočíš, na konci textu jsou k dispozici nápovědy. Ke konci seriálu můžeš také najít bonusovou kapitolu Zobecňování dvojpoměrů. Ta je pouze doplňující a její pochopení není důležité ke zbytku seriálu ani k řešení soutěžních úloh.

Seriál pro tebe letos píše Radek Olšák a Lenka Kopfová. Kdybys měl(a) nějaké nejasnosti či otázky, neváhej se na nás obrátit. Můžeš nám například napsat mail na radek@olsak.net nebo na lenka.kopfova@gmail.com.

Zobrazení

Co to je zobrazení?

Pro účely seriálu budeme zobrazení brát jako funkci, která každému bodu roviny přiřadí nějaký jiný bod roviny. Zobrazovaný bod, např. P , nazveme *vzorem* a bod, na který se vzor zobrazí, nazveme *obrazem*. Pokud nestanovíme jinak, obraz budeme značit stejně jako vzor, akorát s čárkou, tedy P' . Bod, pro nějž vzor splývá s obrazem ($P = P'$), se nazývá *pevným bodem* zobrazení.

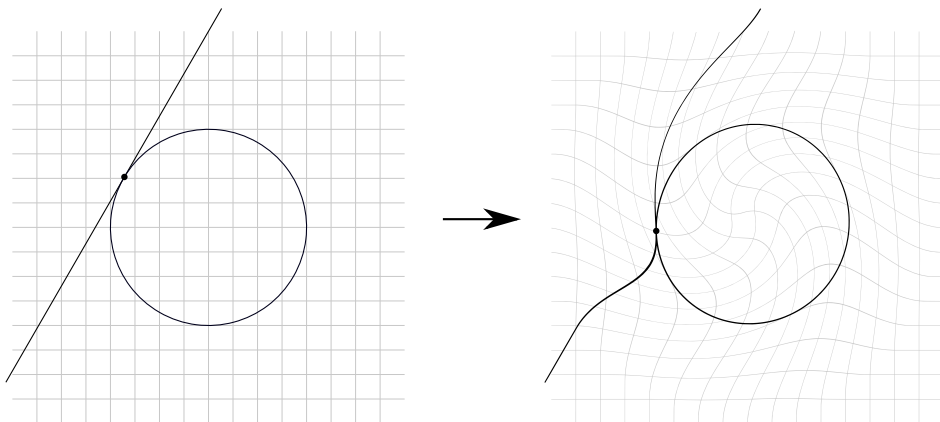
Asi nejznámějšími geometrickými zobrazeními jsou tzv. shodná a podobná zobrazení. Mezi shodná zobrazení patří např. osová a středová souměrnost, otočení či posunutí. Příkladem podobného zobrazení pak může být třeba stejnolehlost či spirální podobnost¹. Tato zobrazení nejsou předmětem našeho seriálu, ale jejich znalost se bude hodit. Proto pokud se o nich chceš dozvědět více nebo si je jen chceš připomenout, doporučujeme první díl seriálu na geometrická zobrazení.²

Prosté zobrazení

Pro seriál bude důležité vědět, co je to prosté zobrazení. Prostým nazveme každé zobrazení, které žádné dva body nezobrazí na tentýž obraz. Prostá se zdají být všechna „rozumná“ zobrazení. Příkladem zobrazení, které není prosté, by například mohla být projekce na přímku. V seriálu se zabýváme různými prostými zobrazeními roviny, nejprve tedy odvodíme, jaké vlastnosti získáme jen z prostoty daného zobrazení. Důležitou vlastností prostých zobrazení je, že „zachovávají tečny“. Mějme v rovině kružnici ω a přímku p , která je její tečnou a dotýká se jí v bodě X . Na tuto rovinu aplikujme nějaké prosté zobrazení. Pak ať už p' a ω' vypadají jakkoli, mají právě jeden společný bod, a to bod X' (viz obrázek). Žádný další vzniknout nemohl (díky tomu, že zobrazení je prosté) a X' na obou leží. I když to může znít jednoduše, je důležité na to nezapomenout, až někdy zmíníme, že zobrazení zachovává *tečnost*.

¹ Pokud nevíš, co je spirální podobnost, vůbec to nevádí. Pro pochopení seriálu to není potřeba.

² Nalezneš ho na stránce <http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf>.



Afinní zobrazení

Afinní zobrazení pro nás budou všechna prostá³ zobrazení splňující:

- Každá přímka se zobrazí na přímku.
- Na každé přímce zachová poměry vzdáleností. Takže kdykoli A, B, C leží v přímce, tak $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$.
- Rovnoběžné přímky zobrazí na rovnoběžné přímky.

Třetí bod ve skutečnosti nepotřebujeme. Rovnoběžnost přímek p a q totiž umíme vyjádřit pomocí poměrů. Mějme libovolný bod X a libovolnou přímku r procházející bodem X , průsečíky r s přímkami p a q označme po řadě P, Q . Rozmysli si, že rovnoběžnost přímek p, q je ekvivalentní s podmínkou, že $\frac{|XP|}{|XQ|}$ je konstantní nezávisle na volbě přímky r .

Cvičení 1.

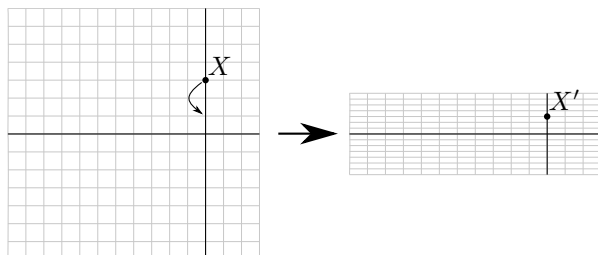
- Rozmysli si, že složení dvou afinních zobrazení je afinní.
- Rozmysli si, že inverzní zobrazení k afinnímu zobrazení je afinní.⁴

Nyní se podíváme na příklady afinních zobrazení. Všechna podobná zobrazení jsou afinní. Existují ale i afinní zobrazení, která nejsou podobná. Dvě taková si vytvoříme. U obou začneme s nějakou obecnou přímkou p , která zůstane zachována neboli všechny její body jsou pevné.

³V seriálu se budeme zabývat pouze prostými zobrazeními, obecně však afinní zobrazení prosté být nemusí.

⁴Zobrazení jsme si definovali jako funkci, která vzoru přiřadí jeho obraz. Pak na inverzní zobrazení se můžeme dívat jako na funkci, která naopak obrazu přiřadí jeho vzor. Takže například platí, že složení zobrazení a jeho inverzu je identita. Inverzní zobrazení existuje, protože uvažujeme pouze prostá zobrazení.

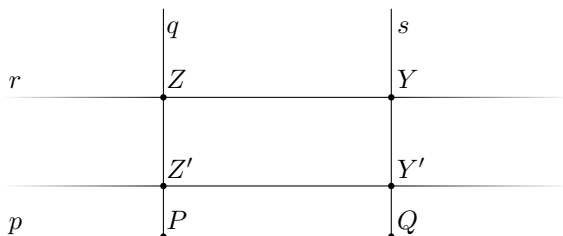
- **Zmáčknutí:** Vybereme si bod X mimo přímku p . Na **kolmici** na p procházející bodem X zvolíme obraz X' takový, že neleží na p . Pomocí vlastností, které se musí zachovat, zkonstruujeme obrazy všech bodů v rovině.



Uvažujme kolmici q na přímku p procházející bodem X . Označme P průsečík přímek p a q . Zvolme si libovolný bod Y na q . Zajímá nás, kde bude ležet Y' .

Pro přímku q' musí platit, že prochází X' a P' . Bod P se z definice zobrazí sám na sebe a X' leží na q . Tudíž body přímky q se opět zobrazí někam na q , speciálně na ní leží také Y' . Protože P se z definice zachová, bude shodné s P' . Chceme tedy, aby platilo $\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|P'X'|}{|P'Y'|} = \frac{|PX'|}{|PY'|}$. Na přímce q tedy zmáčknutí funguje stejně jako stejnoolehlost se středem v P a koeficientem $\lambda = \frac{|PX|}{|PX'|}$.

Vezměme libovolný bod Y , který neleží na přímce q . Dále uvažujme přímky s a r procházející bodem Y , kde $s \parallel q$ a $r \parallel p$. Označme Q průsečík přímek p , s a Z průsečík přímek r , q . Analogicky k předchozímu už víme, že bod Y' musí ležet na s . Rovnoběžnost se zachovává, tudíž obrazy přímek p a r musí být také rovnoběžné. Protože ale p' je totožná s p , r' musí být také rovnoběžná s p . Obraz bodu Z známe, je to bod na přímce q s tím „správným“ poměrem. Vedeme-li rovnoběžku s p bodem Z' , její průsečík s s tak musí být právě Y' . Z rovnoběžnosti tedy platí $\frac{|PZ|}{|PZ'|} = \frac{|QY|}{|QY'|} = \lambda$.

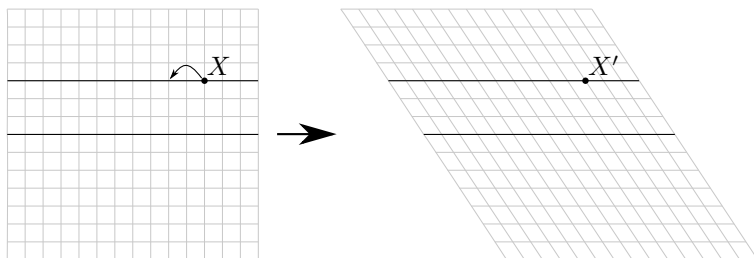


Z obou případů plyne, že pokud pro libovolný bod Y označíme P patu kolmice z Y na p , pak zmáčknutí zobrazí bod Y na jeho obraz v stejnoolehlosti se středem v P a koeficientem λ . Dalo by se tedy říct, že zmáčknutí je taková „stejnoolehlost podle přímky“.

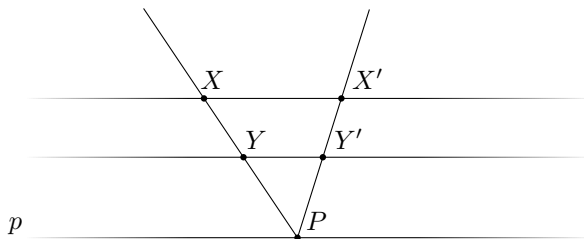
Už víme, kam se v zmáčknutí zobrazí všechny body roviny. Musíme ale ještě ověřit, že se skutečně jedná o afinní zobrazení, tedy ověřit dané dvě (respektive

tři) podmínky. Mějme libovolnou přímku q , která není rovnoběžná s p , a označme S průsečík přímek p , q . Nyní označme A , B libovolné body přímky q . Z výše uvedeného víme, že přímky AA' a BB' jsou rovnoběžné (obě jsou kolmé na p). To je ekvivalentní podmínce $\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SA'|}{|SB'|}$. Rozmysli si, že z toho plyne, že se už nutně všechny poměry na přímce q zachovávají a že to samé platí pro přímky rovnoběžné s p . Třetí podmínku jsme již dříve převedli na první, tedy stačí dokázat, že přímky se zobrazují na přímky. Toto tvrzení není zajímavé, a tak ho dokazovat nebudeme.

- **Zkosení:** Vybereme si bod X mimo přímku p . Na **rovnoběžce** s p procházející bodem X zvolíme X' . Opět se pokusíme zkonstruovat obrazy všech ostatních bodů roviny.



Zvolme libovolný bod Y a zkusme zjistit, kam se zobrazí Y' . Označme P průsečík přímek p a XY . Víme, že poměry se zachovávají, tedy $\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|PX'|}{|PY'|}$. Pokud tedy označíme $\lambda = \frac{|PX|}{|PY|}$, pak Y' se zobrazí na přímku r tak, aby $\frac{|PY|}{|PY'|} = \lambda$. Můžeme si to tedy představit tak, jako bychom přímku PX otočili podle bodu P na přímku PX' . Pokud jsme tedy zmáčknutí nazvali stejnolehlostí podle přímky, pak by vhodný název pro zkosení nejspíš byl otočení podle přímky.^{5,6} Ještě je potřeba podobně jako při zmáčknutí dokázat, že se při takovéto konstrukci obrazu libovolného bodu Y zachovávají rovnoběžky a poměry na přímkách. Rozmysli si, že tomu tak opravdu je. Důkaz je podobný jako při zmáčknutí.



⁵A složení zmáčknutí a zkosení by pak byla spirálka podle přímky. :D (Je to jen hloupý vtip, nic hlubšího v tom nehledej.)

⁶Každopádně se rozhodně nejedná o nějakou oficiální terminologii.

Pojďme si shrnout, jak se afinní zobrazení chová k útvarům v rovině. Obecně afinní zobrazení zachovává:

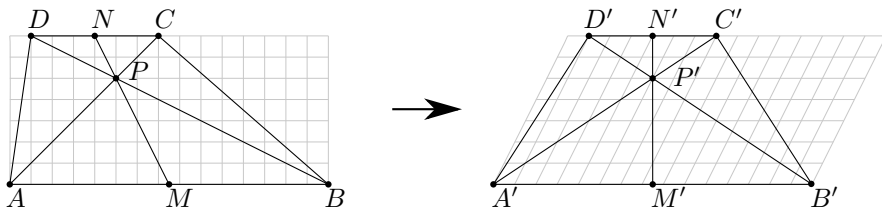
- přímky,
- rovnoběžnost,
- poměry na přímkách,
- poměry obsahů,
- elipsy. Dokonce existuje pro každou elipsu afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.

A nezachovává:

- kružnice,
- vzdálenosti,
- úhly.

Úloha 2. Mějme lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$. Označme P průsečík jeho úhlopříček. Dále M , N jsou postupně středy stran AB a CD . Dokaž, že M , N , P leží na jedné přímce.

Řešení. Označme jako q přímku spojující M a N . Uvážíme zkosení, které zachová přímku AB a zobrazí N na bod přímo nad M . To způsobí, že q' bude kolmá na $A'B'$ (a tedy i $C'D'$). Protože středy úseček se zachovávají, bude q' osou $A'B'$ i $C'D'$, takže celý obrázek bude symetrický podle q' . Speciálně to znamená, že P' musí ležet na q' , tedy i P leží na q . $\square$



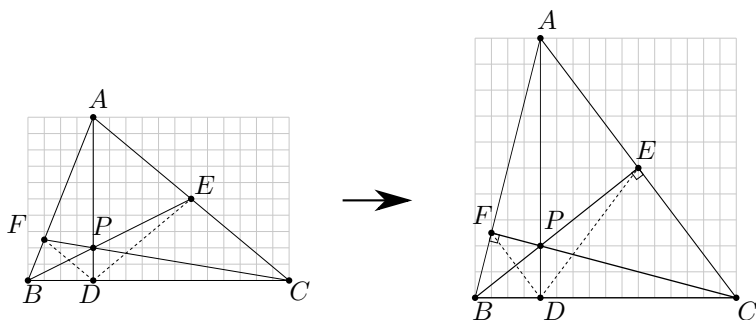
Poznámka. V mnoha úlohách aplikujeme zobrazení na celý obrázek, propříště nebudeme popisovat obrazy bodů čárkami.

Tvrzení 3. (Blanchet⁷) V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A . Na stranách AC a AB jsou postupně body E , F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD . Dokaž, že $|\angle EDA| = |\angle FDA|$.

Důkaz. Na první pohled to vypadá, že máme problém, protože úloha chce dokázat rovnost úhlů a afinní zobrazení úhly nezachovává. Tvrzení, které máme dokázat, si tedy přeformulujeme na: „přímky ED a FD jsou osově symetrické podle AD “. Jestliže zachováme přímku BC , můžeme uvážit jakékoli zmáčknutí a dostaneme

⁷Čti [Blančét].

ekvivalentní úlohu. Uvážíme tedy takové, že $|\angle BEC| = 90^\circ$. Ukážeme si, že takové zmáčknutí určitě existuje. Sestrojíme si Thaletovu kružnici nad průměrem BC . Označme Y její průsečík s výškou z bodu E v trojúhelníku EBC . Pak uvažujme takové zmáčknutí, které zachovává přímku BC a bod E zobrazí na Y . Z Thaletovy věty máme zaručeno, že $|\angle BEC| = 90^\circ$. Nyní protože AD i BE jsou výšky, tak i CF je výška. Stačí nám tedy dokázat toto tvrzení pro výšky. To už se lehce doúhlí. Čtyřúhelník $AEDB$ je díky pravým úhlům tětiový, tedy $|\angle EDA| = |\angle ABE| = 90^\circ - |\angle BAC|$. (Nebo $= |\angle BAC| - 90^\circ$, pokud je u A tupý úhel.) Obdobně také čtyřúhelník $AFDC$ je tětiový, takže $|\angle FDA| = |\angle ACF| = 90^\circ - |\angle BAC|$. (Nebo se rovná $|\angle BAC| - 90^\circ$, pokud je u A tupý úhel.) Z čehož plyne $|\angle EDA| = |\angle FDA|$ a důkaz je hotov. $\square$



Cvičení 4.

- (i) Rozmysli si, že pro každý trojúhelník existuje afinní zobrazení, které z něj vytvoří rovnostranný, a jak z toho plyne, že pro každý trojúhelník existuje afinní zobrazení, které ho zobrazí na jakýkoli jiný vybraný trojúhelník.
- (ii) Dokaž pomocí afinních zobrazení, že se těžnice protínají v jednom bodě.
- (iii) Je dána elipsa e se středem S . Na ní leží bod X . Označme t tečnu k elipse v bodě X . Rovnoběžka s t vedená bodem S protne elipsu v bodech A, B . Dokaž, že tečna k e v bodě A je rovnoběžná s XS .

Úloha 5. Elipsa vepsaná obdélníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA postupně v bodech X, V, W, Y . Dokaž, že $|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|$.

Úloha 6. Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD s pravým úhlem u ramena BC splňující $|AB| > |CD| > \frac{|AB|}{3}$. Středů úhlopříček AC, BD označíme postupně E, F . Nakonec průsečíky AF a BE, CF a DE označíme postupně X, Y . Který z čtyřúhelníků $ADXY, BCXY$ má větší obsah?

Definice. (obecná poloha) Body A, B, C jsou v *obecné poloze*, pokud žádné tři z nich neleží na přímce.

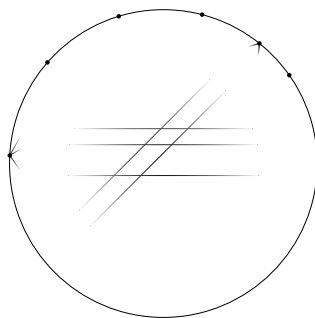
Poznámka. Všimni si, že z první části cvičení 4 plyne, že každé afinní zobrazení můžeme jednoznačně definovat pomocí tří bodů v obecné poloze a jejich obrazů.

Shrnutí

Zavedli jsme si afinní zobrazení. Afinními zobrazeními jsou pro nás všechna shodná a podobná zobrazení, mačkání, kosení a všechna složení těchto zobrazení.

Rozšíření roviny

V klasické rovině skoro platí, že každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě. Existuje však trochu hloupý, degenerovaný případ, kterým jsou rovnoběžky. Ty by se protly až někde v nekonečnu. Pro každý směr přímek proto dodáme k naší rovině *nevlastní bod*.⁸ Když uvažíme a , b , c rovnoběžné přímky, tak všechny tři prochází stejným nevlastním bodem. I přesto, že přímky „jdou do nekonečna ve dvou směrech“, nevlastní bod protínají jen jeden. Tím jsme přidali „kolem“ roviny nekonečno nevlastních bodů. Řekneme, že všechny nevlastní body leží na jedné *nevlastní přímce*. Rozmysli si, že nyní se opravdu každé dvě přímky protínají v právě jednom bodě, a dokonce každými dvěma body prochází právě jedna přímka. Takto rozšířenou rovinu nazýváme *projektivní rovinou*. Všimni si, že afinní zobrazení fungují i v projektivní rovině.



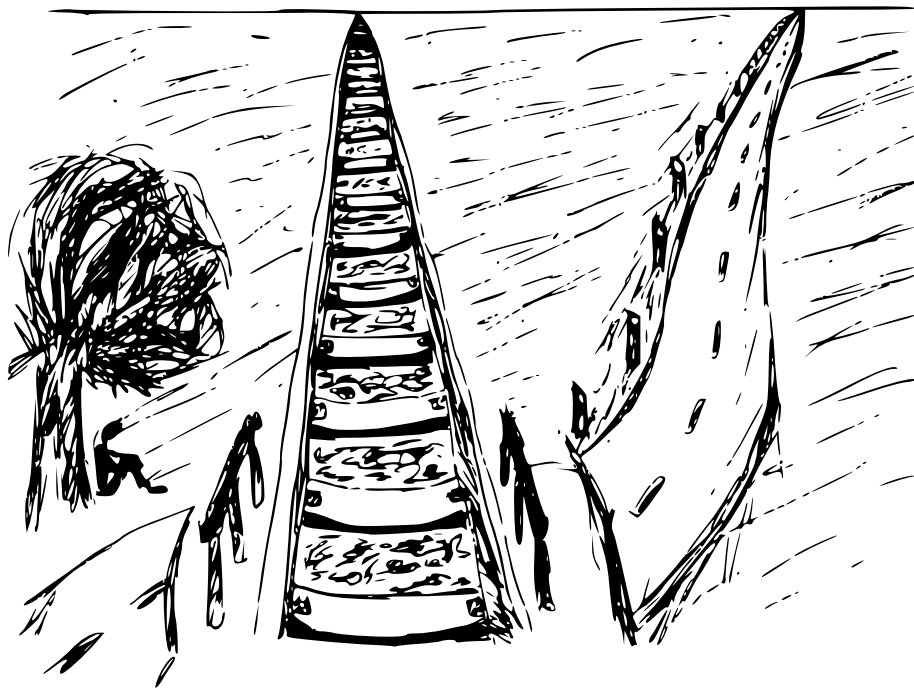
Obrázek naznačuje nevlastní přímku kolem celé roviny.

Cvičení 7. (body v nekonečnu) Cílem tohoto cvičení si je jen rozmyslet, jak fungují body na nevlastní přímce. Úkolem je tedy si jen tak nějak kreslit. Nebuď proto zmatený/zmatená, že se nejedná o úlohu v pravém slova smyslu. Zkonstruuj si v rovině čtverec $ABCD$. Označ X průsečík AB a CD . Na straně BC zvol bod P . Přímka PX protíná DA v Q . Označ R průsečík AC s nevlastní přímkou.

⁸ *Nevlastní* znamená, že neleží v rovině, na kterou jsme zvyklí.

Perspektiva

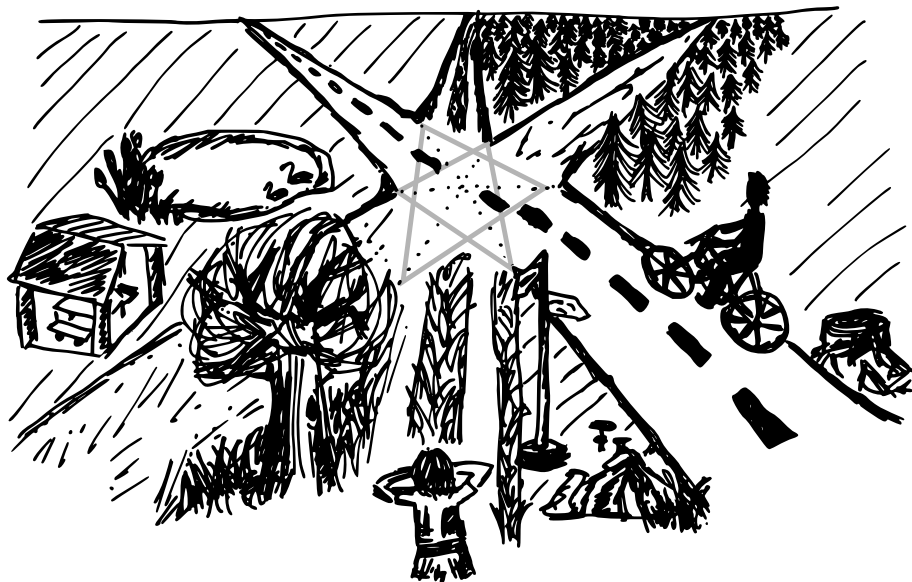
Zatím jsme papír, na kterém máme nakreslenou konstrukci, jen různě mačkali. V této kapitole vyzkoušíme, jak se chová, když se na něj podíváme z různých bodů v prostoru. Znáš to, stojíš na dlouhé rovné cestě na rozlehlé planině. Její okraje tvoří dvě rovnoběžné přímky, ale když se podíváš do dálky, cesta mizí kdesi na horizontu, kde se její okraje „protínají“. Okraje jiné cesty, vedoucí trochu jiným směrem, se protínají na stejném horizontu, ale v jiném bodě.



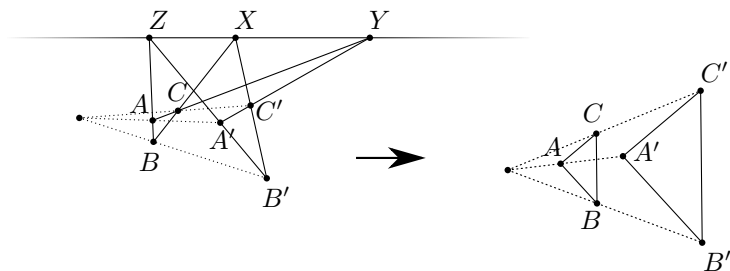
Pokusíme se tento fenomén využít v řešení úlohy. Vezmeme obrázek a zkusíme říct, že je to vlastně mnohem hezčí obrázek, na který se akorát někdo podíval „z boku“.

Věta 8. (Desargues⁹) Mějme dva trojúhelníky v rovině - ABC a $A'B'C'$. Označme průsečíky $X = BC \cap B'C'$, $Y = CA \cap C'A'$ a $Z = AB \cap A'B'$. Pak pokud X , Y , Z leží na jedné přímce, tak přímky AA' , BB' , CC' prochází jedním bodem.

⁹Čti [Dezark].



Důkaz. (náhledem) Představme si, že obrázek máme nakreslený na zemi a přímka procházející body X, Y, Z je horizontem. Pak to, co je nakreslené na zemi, jsou dva trojúhelníky, ve kterých $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. Každou tuto dvojici si můžeme představit znovu jako cesty a body X, Y, Z jsou jejich body na horizontu. Na zemi tedy mají trojúhelníky rovnoběžné odpovídající strany neboli jsou stejnohlé. Přímký AA', BB', CC' prochází středem stejnohllosti. (Ještě se může stát, že nepůjde o stejnohllost, ale o posunutí. V tom případě se dané tři přímký protnou v jednom bodě až na nevlastní přímce.) $\square$



Může se zdát, že jsme úlohu nevyřešili pro všechny případy. Co když přímka XYZ prochází „středem“ obrázku? Přece běžně nad horizontem země není. Tedy

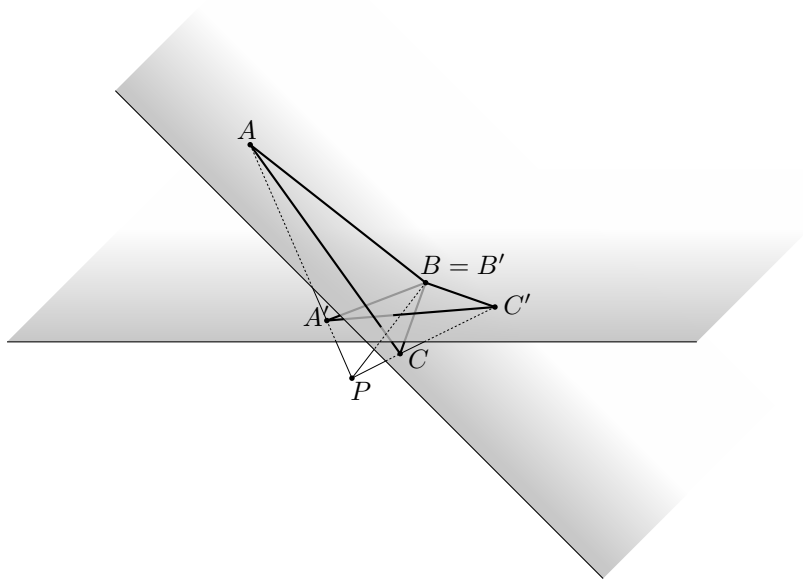
podíváme-li se na rovinu „z boku“, nevidíme ji celou, protože nějaká její část je za námi.

Proto si zadefinujeme zobrazení, které tyto problémy vyřeší a přitom se bude velmi blížit právě onomu „podívání z boku“.

Perspektiva formálně

Využijeme ještě jedné představy ze života. Představ si, že před tebou je okno. Svůj pohled, jakým vidíš zem, můžeš nakreslit na okno tak, že na každý bod X na okně nakreslíš to, co je z tvého pohledu za ním. Tuto projekci z jedné roviny do druhé si definujeme pořádně.

Jak matematicky říct, co znamená dívat se na věc z jiného pohledu? Budeme používat klasickou souřadnicovou soustavu s osami x, y, z . Umístíme rozšířenou rovinu do rozšířeného trojrozměrného prostoru s počátkem P (to bude náš pozorovatel), a to tak, že obsahuje všechny body, pro které $z = 1$. Tuto rovinu v prostoru otočíme podle P . Následně promítneme zpět do roviny $z = 1$ skrz počátek (promítneme na okno). *Promítnutí* tady znamená, že bod X v prostoru se zobrazí na X' takový, že P, X, X' leží na přímce a z souřadnice bodu X' je rovna 1. Z konstrukce perspektivy si můžeme uvědomit, že perspektiva je zobrazením, které zachovává přímky a průsečíky.



Promítnutí trojúhelníka ABC z jedné roviny do druhé skrz bod P .

Všimněme si, že pro body prostoru, pro které $z = 0$, neexistuje v obyčejné rovině projekce do roviny $z = 1$. Proto se takové body zobrazí na nevlastní body v daném směru. Otočená rovina se protíná s rovinou $z = 0$ v jedné přímce. Tato přímka se v tomto zobrazení zobrazí na nevlastní. To je právě ta přímka, kterou jsme brali jako „horizont“.

Rozmysli si, že ta část obrázku, kterou nyní vidíme „nad horizontem“, je ta část roviny, kterou jsme vůbec neviděli, protože byla za námi. (v představě s oknem a zemí atd.)

Zformulujeme ještě jednou důkaz Desarguesovy věty, jak by měl být správně formálně sepsaný.

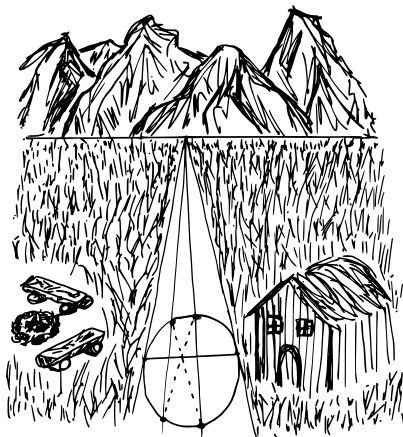
Důkaz. (Desargues podruhé – formální) Existuje perspektiva zobrazující přímku XYZ na nevlastní. Ta zachová všechny vlastnosti úlohy, protože se úloha zabývá pouze průsečíky přímek. Můžeme tedy říct, BÚNO¹⁰ jsou body X, Y, Z nevlastní. Trojúhelníky potom mají po dvou rovnoběžné strany $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$ a $CA \parallel C'A'$. Z toho plyne, že jsou stejnohlé. Přímký AA', BB' a CC' prochází tedy jedním bodem, a to středem stejnohlosti. (Nebo stejně jako v neformálním důkazu půjde o posunutí, tedy o stejnohlost se středem v nevlastním bodě.) $\square$

Perspektiva a kružnice

Představ si kružnici ω a přímku p mimo ni. Pak perspektiva, která zobrazuje přímku p na nevlastní, naši kružnici roztáhne do elipsy. Tuto elipsu pak můžeme pomocí afinního zobrazení „srovnat“ zpět do kružnice. Složením těchto zobrazení jsme získali nové zobrazení, které zobrazilo p na nevlastní a zachovalo jednu, námi vybranou, kružnici. Zachovali znamená, že jejím obrazem je znovu kružnice, ale nemusí platit, že body kružnice jsou pevnými body tohoto zobrazení. Ukážeme si sílu tohoto zobrazení na příkladu:

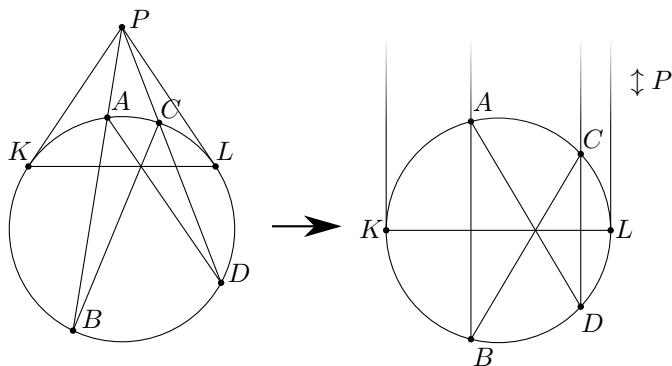
Příklad 9. (Radečkovovo lemma) Mějme kružnici ω a bod P mimo ni. Body K, L leží na ω tak, že PK a PL jsou tečny k ω . Body A, B leží na ω tak, že A, B, P leží na jedné přímce a body C, D na ω tak, že P leží na přímce CD . Dokaž, že přímky AC, BD a KL prochází jedním bodem.

¹⁰Zkratka pro „bez újmy na obecnosti“.



Řešení. Uvažme rovnoběžku p s KL procházející bodem P . Použijme složení perspektivy a afinity takové, které zachová ω a přímku p zobrazí na nevlastní. Transformovaný obrázek pak bude vypadat následovně. Máme kružnici ω a v nekonečnu bod P . Body K, L leží na ω tak, že tečny k ω v K a L procházejí bodem P , tudíž jsou rovnoběžné. KL je tedy průměrem kružnice ω . Přímka AB je také rovnoběžná s PK neboli musí být kolmá na KL . Takže body A a B jsou podle KL symetrické. Obdobně body C a D jsou podle KL symetrické, takže i přímky AC a BD jsou podle KL symetrické neboli se protínají na KL . $\square$

V obrázku máme u nevlastního bodu P šipku nahoru i dolů. Je to tím, že body v nekonečnu jsou definované neorientovanými rovnoběžkami, takže ten bod „nahore“ je ten samý jako ten bod „dole“.



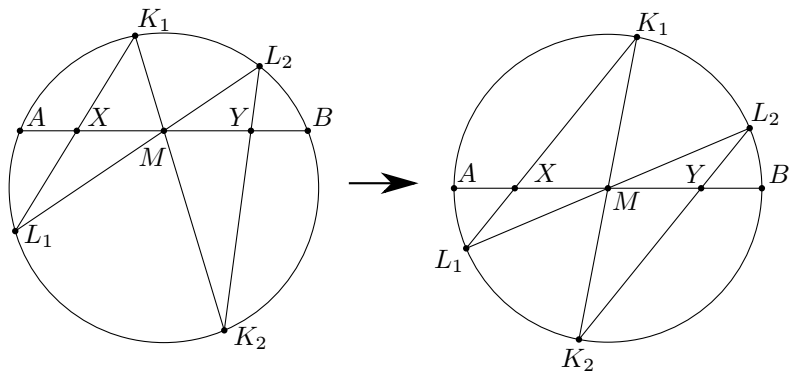
Zachováváme toho víc

Mějme kružnici ω a přímkou p mimo ni.

- Označme q kolmici na p procházející středem ω . Pak tato konfigurace je podle q symetrická. Pokud zobrazíme p do nekonečna a ω zachováme, výsledek bude podle q' také symetrický. Pro důkaz si rozlož perspektivu na otočení v prostoru a projekci a uvědom si, že symetrie podle q je zachována.
- Na obecné rovnoběžce s p různé od p mějme dané body A, B, C . Pak perspektiva, která zobrazí p do nekonečna, zachová poměr $\frac{|AB|}{|BC|}$. Pro důkaz znovu rozlož na rotaci v prostoru a projekci a uvědom si, že na rovnoběžkách s p se projekce chová jako stejnohlkost neboli zachovává poměry.

Pojďme si nyní dokázat další úlohu:

Tvrzení 10. (butterfly) Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB se středem M . Na ω zvolme body K_1, L_1 . Označme K_2 průsečík K_1M s ω různý od K_1 . Obdobně definujme bod L_2 . Necht' $X = K_1L_1 \cap AB$ a $Y = K_2L_2 \cap AB$. Pak $|XM| = |YM|$.



Důkaz. Označme R průsečík tečen k ω v bodech A, B . Uvažme přímkou $p \parallel AB$ procházející bodem R , ta určitě neprotíná ω . Přímkou p zobrazíme na nevlastní a ω zachováme. Pak se z AB stane průměr kružnice ω , protože tečny v A a B budou rovnoběžné. Poměry $\frac{|AM|}{|MB|}$ a $\frac{|XM|}{|YM|}$ jsme zachovali, protože $p \parallel AB$. Takže jsme získali ekvivalentní úlohu. Takto upravená úloha je již velmi snadná. $\square$

Poznámka. Pojďme si uvědomit, co nám říká trik využitý v této úloze. Máme kružnici ω a na ní body A, B . Pak můžeme zobrazit AB na průměr ω a ω zachovat. Takové zobrazení zachovává poměry na rovnoběžkách s AB . I když to zní jako trochu podvod, můžeme říct, BÚNO je AB průměr.¹¹

¹¹Dokud si tedy dáváme pozor na to, že v úloze zachováme vše potřebné.

Těžko na cvičišti...

A nyní si můžeš nabyté znalosti vyzkoušet na následujících úlohách.

Úloha 11. Mějme body P, A, B na přímce v tomto pořadí. Označme p kolmici na tuto přímku vedenou bodem A . Dále mějme tečnu PX ke kružnici nad průměrem AB , kde X je bod dotyku (tečny jsou dvě, uvažujeme libovolnou z nich). Označme Y jako průsečík BX a p . Dokaž, že PX pólí AY .

Úloha 12. Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC ($|AB| = |AC|$). Na jeho rameni AB zvolíme bod X . Rovnoběžka s BC vedená bodem X protne AC v Y . Označme S střed XY a M střed BC . Nechť P je průsečík MX a CS . Dokaž, že trojúhelník PMC má poloviční obsah než ABC .

Úloha 13. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označíme si body dotyku kružnice vepsané po řadě K, L, M, N . Dokaž, že přímky KM, LN, AC, BD se protínají v jednom bodě.

Úloha 14. Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označme body dotyku kružnice vepsané ke stranám AB, BC, CD, DA postupně W, X, Y, Z . Dokaž, že přímky AC, WX, YZ prochází jedním bodem.

Úloha 15. (těžší) Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω . Označme D bod dotyku kružnice připsané ke straně BC . Na přímce AD zvolme bod X tak, aby úsečka XD neobsahovala žádný bod ω . Tečny z X k ω protnou stranu BC v bodech K, L . Dokaž, že $|BK| = |CL|$. (Iksko 2018/19)

Úloha 16. Máme danou půlkružnici nad průměrem UV . Na této půlkružnici zvolíme body P, Q . Průsečík tečen z P a Q označíme R . Průsečík UP a VQ označíme S . Dokaž, že $SR \perp UV$.

Úloha 17. V trojúhelníku ABC označme body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB postupně D, E, F . Na úsečce AD uvnitř kružnice vepsané zvolme bod L . Úsečky BL a CL protnou kružnici vepsanou postupně v bodech X, Y . Dokaž, že přímky EF, BC, XY prochází jedním bodem.

Úloha 18. Bod M je středem strany AB trojúhelníka ABC . Na polopřímce opačné k MC zvolíme bod N a uvnitř úsečky AM zvolíme bod P . Označíme Q průsečík přímk AC a NP , dále R průsečík QM a NB a nakonec S průsečík AB a RC . Dokaž $|PM| = |SM|$.

Úloha 19. Mějme trojúhelník ABC . Označme A' bod dotyku vepsané u strany BC . Druhý průsečík přímky AA' s vepsanou označme P . Průsečíky BP a CP s vepsanou označme postupně M, N . Dokaž, že BN, MC, AA' prochází jedním bodem.

Úloha 20. V trojúhelníku ABC označme M střed BC . Přímka AM protíná kružnici vepsanou v bodech P, Q . Rovnoběžky s BC procházející body P , resp. Q pro-

tínají znovu kružnici vepsanou v X , resp. Y . Přímký AX , AY protínají BC v K , L . Dokaž, že $|BK| = |CL|$.

Úloha 21. Mějme pevnou úsečku AC a na ní bod B . Skrz body AC vedeme kružnici ω . Tečny k ω v bodech A a C se protínají v P . Úsečka PB protne kružnici podruhé v Q (B leží na úsečce PQ), osa úhlu AQC protne AC v R . Dokaž, že poměr $\frac{|AR|}{|RC|}$ nezávisí na volbě kružnice ω . (IMO Shortlist 2003/G2)

Úloha 22. Mějme čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|\angle ABD| = |\angle ACD| = 90^\circ$. Bod P leží na BD tak, že $|\angle PAD| = 90^\circ$ a obdobně Q leží na AC tak, že $|\angle QDA| = 90^\circ$. AC a BD se protínají v bodě X a PC a BQ se protínají v Y . Ukaž, že XY je kolmá na AD .

Dvojpoměry¹² aneb měříme v projektivním světě

Dvojpoměry pro nás budou velmi důležitým nástrojem v celém seriálu. Potřebujeme si totiž zadefinovat vlastnost, kterou kolineace zachová, protože vzdálenosti a poměry se kolineací mění.

Definice 23. (orientovaný obsah) Symbolem $[ABC]$ budeme značit orientovaný obsah trojúhelníku ABC . V absolutní hodnotě bude $[ABC]$ mít velikost obsahu trojúhelníku ABC , může se ale lišit znaménkem. To znamená, že pokud jsou body v pořadí po směru hodinových ručiček, bude hodnota orientovaného obsahu záporná, jinak bude kladná.¹³

Tvrzení 24. (pomocné) *Pokud v trojúhelníku jeden bod posuneme po straně tak, že (orientovaná) délka příslušné strany se změní na k -násobek, potom se i orientovaný obsah trojúhelníku změní na k -násobek.*

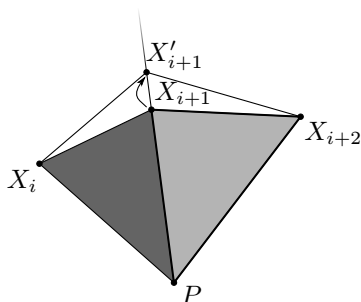
Pokusíme se vymyslet nějaký výraz, který každé n -tici přímek přiřadí nějaké reálné číslo. Mějme rovinu a v ní libovolný bod P . Dále v ní leží n bodů různých od P , kde n je sudé číslo. Označíme je $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$. Podíváme se na obsahy trojúhelníků $X_i X_{i+1} P$, přičemž za X_{n+1} uvažujeme X_1 a za X_{n+2} bod X_2 . Těch je sudý počet. Obarvíme každý se sudým i červeně a každý s lichým i modře. Pak každý z bodů X_i náleží právě jednomu červenému a právě jednomu modrému trojúhelníku. Pokud nahradíme bod X_i jakýmkoli jiným bodem různým od P na přímce PX_i , tak se právě jednomu modrému trojúhelníku změní obsah k -krát (pro vhodné reálné k) a právě jednomu červenému trojúhelníku se změní obsah k -krát. Takže když nějaký výraz V obsahuje

$$\frac{[X_{i-1} P X_i]}{[X_i P X_{i+1}]},$$

¹²Bývají v literatuře občas zaměňovány s pojmem čtyřpoměry. Pro nás ale čtyřpoměry budou znamenat něco jiného.

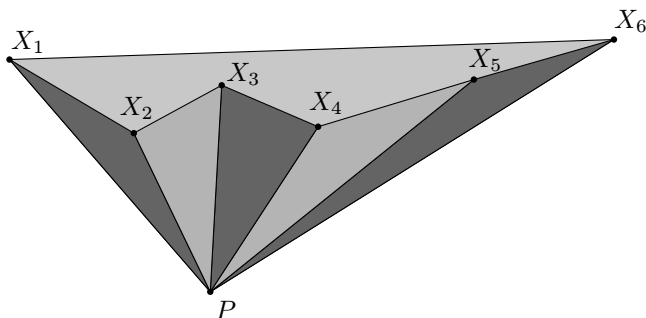
¹³Opravdu se standardně značí směr proti směru hodinových ručiček jako kladný.

tak se jeho hodnota nezmění, i když zaměníme bod X_i jiným bodem přímky X_iP .



Uvažme tedy výraz, kde v čitateli budou všechny červené trojúhelníky a ve jmenovateli všechny modré:

$$V = \frac{[X_1PX_2] \cdot [X_3PX_4] \cdots [X_{n-1}PX_n]}{[X_2PX_3] \cdot [X_4PX_5] \cdots [X_nPX_1]}.$$



Hodnota V se nezmění, pokud jakýkoliv X_i nahradíme jiným bodem na X_iP . Tuto hodnotu můžeme vnímat jako hodnotu přímek $X_1P, X_2P, \dots, X_nP$. Neděs se téhle obludy, představuj si ji jako modré a červené trojúhelníky, jejichž obsahy střídavě násobíme a dělíme.

Zkusíme nyní najít dobrou hodnotu n , pro kterou bude tento výraz užitečný. Jako první se nabízí $n = 2$. Ale po dosazení dostáváme:

$$V = \frac{[X_1PX_2]}{[X_2PX_1]} = -1.$$

Takže hodnota V jakýchkoli dvou přímek by byla rovna -1 . To nezní jako moc užitečný výraz. Zkusme tedy dalšího kandidáta, $n = 4$. Ta už takový problém nemá, a proto se jako nejmenší užitečná využívá. Tato hodnota se označuje *dvojpoměrem*

daných čtyř přímk. Pro body A, B, C, D, P budeme dvojpoměr čtyř bodů v obecné poloze vzhledem k bodu P značit takto:

$$(A, B, C, D)_P = [APB] \cdot \frac{1}{[BPC]} \cdot [CPD] \cdot \frac{1}{[DPA]}.$$

Přímky PA, PB, PC, PD označíme a, b, c, d . Protože už víme, že tuto hodnotu můžeme vnímat jako hodnotu přímk procházejících jedním bodem, budeme také značit

$$(a, b, c, d) = (AP, BP, CP, DP) = (A, B, C, D)_P.$$

Hodnota dvojpoměru je závislá na pořadí, ale občas se permutace dají přepočítat.

Cvičení 25. Rozmysli si, že platí:

- $(a, b, c, d) = \frac{1}{(b, c, d, a)} = (c, d, a, b) = \frac{1}{(d, a, b, c)},$
- $(a, b, c, d) = \frac{1}{(a, d, c, b)}.$

Pojďme si ukázat, proč takhle obludně definovaná hodnota je právě ta užitečná:

Uvažujme v rovině bod P . Dále v ní leží čtyři body A, B, C, D , které leží na jedné přímce neprocházející bodem P . Pak

$$(A, B, C, D)_P = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|}.$$

Délky potřebujeme uvažovat orientovaně, abychom dostali správné znaménko. Můžete si všimnout, že tenhle výraz vůbec nevyužívá bod P , budeme tedy symbolem (A, B, C, D) značit dvojpoměr čtyř bodů na jedné přímce.

Tvrzení 26. (promítací) *Mějme čtyři body na přímce A, B, C, D a čtyři body na jiné přímce X, Y, Z, W takovým způsobem, že přímky AX, BY, CZ, DW prochází jedním bodem P . Pak platí $(A, B, C, D) = (X, Y, Z, W)$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= (A, B, C, D)_P = (AX, BY, CZ, DW) = \\ &= (X, Y, Z, W)_P = (X, Y, Z, W). \end{aligned} \quad \square$$

Abychom nemuseli vždy psát tuto promítací myšlenku, vysloužila si vlastní značení. Když platí $(A, B, C, D) = (X, Y, Z, W)$ při promítnutí skrz bod P , tak značíme

$$(A, B, C, D) \stackrel{P}{\underset{\wedge}{=}} (X, Y, Z, W).$$

Cvičení 27. Mějme trojúhelník ABC a pevně dané body K, L na straně BC . Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímk AK, AL, AC s osou vnitřního úhlu u vrcholu B . Dokaž, že $(B, K, L, C) = (B, X, Y, Z)$.

Perspektiva zachovává dvojpoměry

Promítací tvrzení pro nás znamená, že jsme našli hodnotu, která se zachovává v perspektivě. Zopakujme si, jak jsme si perspektivu definovali. Nejdříve jsme rovinu otočili v prostoru, to dvojpoměry zachovává, a následně jsme ji promítli skrz počátek zpět do roviny $z = 1$. Představme si body A, B, C, D na přímce. Po otočení se zobrazí na body A_1, B_1, C_1, D_1 v prostoru. Prohlédneme si rovinu danou počátkem P a přímkou $A_1B_1C_1D_1$. V ní leží i finální obrazy této perspektivy. Z promítacího tvrzení plyne $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_1, B_1, C_1, D_1)_P = (A', B', C', D')_P = (A', B', C', D')$. Neboli celá perspektiva zachovala dvojpoměr (A, B, C, D) .

Tvrzení 28. (zobecněný poměr?) Pro A, B, C, D na přímce, kde D je nevlastní, platí:

$$(A, B, C, D) = -\frac{|AB|}{|BC|}.$$

Důkaz. Zvolíme si mimo přímku $\overleftrightarrow{ABCD}$ bod P . Na přímce $p \parallel \overleftrightarrow{ABCD}$ procházející bodem P zvolíme vlastní bod D' . Pak

$$(A, B, C, D) = (A, B, C, D')_P = \frac{[APB]}{[BPC]} \cdot \frac{[CPD']}{[D'PA]}.$$

Trojúhelníky CPD' a $D'PA$ mají stejný obsah, protože mají stejnou základnu $D'P$ a stejnou výšku. Ale mají opačnou orientaci, takže $\frac{[CPD']}{[D'PA]} = -1$. Trojúhelníky ABP a BPC mají stejnou výšku neboli hodnota celkového dvojpoměru je rovna

$$-\frac{[APB]}{[BPC]} = -\frac{|AB|}{|BC|}. \quad \square$$

Tvrzení 29. (dvojpoměry na kružnicích) Mějme kružnici ω a na ní body A, B, C, D, P, Q . Pak $(A, B, C, D)_P = (A, B, C, D)_Q$.

Důkaz. Hodnota $(A, B, C, D)_P$ je závislá jen na úhlech mezi přímkami PA, PB, PC, PD . Z obvodových úhlů jsou všechny tyto úhly stejné jako úhly mezi přímkami QA, QB, QC, QD , tedy hodnota $(A, B, C, D)_X$ je nezávislá na volbě X na ω . (Takto se nám můžou obvodové úhly změnit na doplňkové obvodové úhly. Rozmysli si, že to funguje i pro ně. Pokud $Q = A$, tak přímka QA degeneruje do tečny v bodě A , kde tak namísto obvodového úhlu dostaneme úhel úsekový.) Opět si rozmysli, že tvrzení pořád platí. Pro body A, B, C, D budeme pomocí (A, B, C, D) značit právě tuto hodnotu a z kontextu bude jasné, jestli se jedná o dvojpoměr na přímce nebo na kružnici. $\square$

Důležitou vlastností dvojpoměrů, kterou budeme v seriálu využívat, je následující tvrzení:

Tvrzení 30. (jednoznačnost dvojpoměrů) Pokud $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, tak platí $X = Y$.

Důkaz. Z definice víme, že $(A, B, C, X) = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|}$. A obdobně také platí $(A, B, C, Y) = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|}$. Tedy platí

$$(A, B, C, X) = (A, B, C, Y) \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \Leftrightarrow \frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|CY|}{|YA|}.$$

Rozmysli si, že na přímce $\overleftrightarrow{ABCD}$ existují právě dva body takové, že poslední poměr je nějaké pevně dané číslo. Délky v poměrech ale uvažujeme orientovaně, což už nám dá jednoznačně jen jeden bod. $\square$

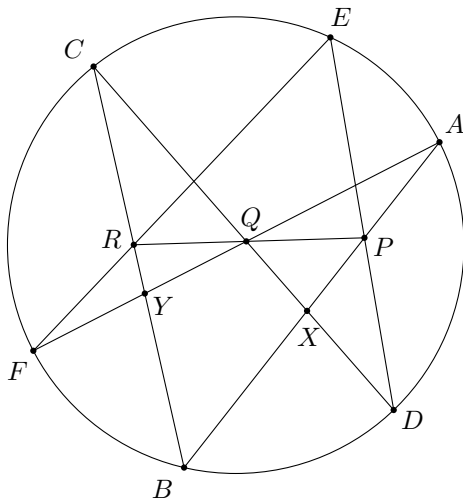
Pojďme si ukázat, jak dvojpoměry použít na pořádné úloze:

Věta 31. (Pascal) Na kružnici ω máme body A, B, C, D, E, F . Označme body $P = BA \cap DE$, $Q = DC \cap FA$, $R = EF \cap BC$. Pak P, Q, R leží na jedné přímce.

Důkaz. Označíme si $X = CD \cap AB$ a $Y = AF \cap BC$. Definujeme $R_1 = BC \cap PQ$. R_1 i R tedy leží na BC . Myšlenka důkazu bude taková, že zkusíme postupným promítáním ukázat, že $(B, Y, R_1, C) = (B, Y, R, C)$. Z jednoznačnosti dvojpoměrů to pak bude znamenat, že $R_1 = R$, tedy přímky BC, RE, PQ prochází jedním bodem, tudíž P, Q, R leží na přímce. Použijeme tato promítání:

$$(B, Y, R_1, C) \stackrel{Q}{\wedge} (B, A, P, X) \stackrel{D}{\wedge} (B, A, E, C) \stackrel{F}{\wedge} (B, Y, R, C),$$

čímž je důkaz dokončen. $\square$



Úloha 32. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω a libovolný bod M . Dále nechť přímka skrz M protíná CB , CA , AB postupně v bodech A_1 , B_1 , C_1 . Přímky AM , BM , CM protínají ω postupně v bodech A_2 , B_2 , C_2 . Dokaž, že přímky A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 se protínají na ω .

Úloha 33. (Pappus) Mějme dané přímky p a q . Na p jsou po řadě body A_1 , B_1 , C_1 a na q jsou po řadě body A_2 , B_2 , C_2 . Dokaž, že průsečíky X , Y , Z postupně dvojic přímků A_1B_2 a B_1A_2 , A_1C_2 a C_1A_2 , B_1C_2 a C_1B_2 , leží na jedné přímce.

Úloha 34. (těžká) Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme M_1 bod na straně AB . Nechť M_2 je projekce bodu M_1 skrz D na přímku BC . Dále označme M_3 projekci M_2 skrz A na CD . M_4 projekci M_3 z B na DA . M_5 projekci M_4 z C na AB . Takto pokračujeme, až dostaneme M_{13} . Dokaž, že $M_{13} = M_1$.

Obecná kolineace

Často se hodí afinní zobrazení a perspektivu mezi sebou různě skládat. Abychom nemuseli vždycky psát, jaká všechna zobrazení skládáme, bude pro nás *kolineace* univerzálním zobrazením, do kterého spadají všechna složení perspektivních a afinních zobrazení.

Řekneme, že kolineace je jakékoli zobrazení projektivní roviny, které

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry.

Znovu se jedná o vlastnost některých zobrazení, tedy složení dvou takových zobrazení a jeho inverz zachovávají danou vlastnost. Takže složení dvou kolineací a inverzní zobrazení ke kolineaci je zase kolineací. Všechny perspektivy jsou kolineace i všechna afinní zobrazení jsou kolineace. Proto zobrazení, které jsme zmínili v tvrzení Perspektiva a kružnice, je také kolineace.

Tvrzení 35. (kolineace a dvojpoměrové svazky) Mějme přímky a , b , c , d procházející jedním bodem P . Uvažme nějakou kolineaci zobrazující $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c'$, $d \rightarrow d'$. Pak

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

Důkaz. Myšlenka v důkaze je definovat dvojpoměry svazků pomocí dvojpoměrů bodů, které se z definice zachovávají. Uvažme přímku protínající a , b , c , d postupně v bodech A , B , C , D . Pak platí

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (A, B, C, D)_P = (A, B, C, D) = (A', B', C', D') = \\ &= (A', B', C', D')_{P'} = (a', b', c', d'). \end{aligned} \quad \square$$

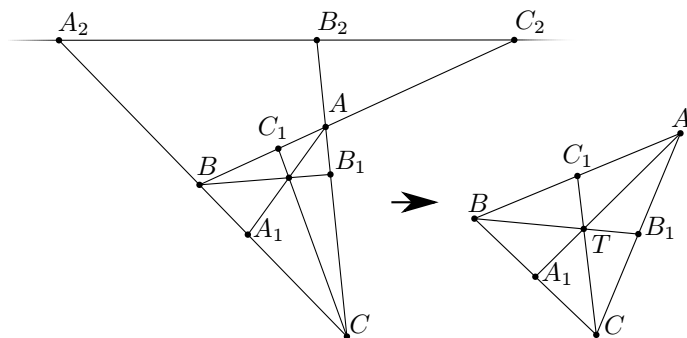
Tvrzení 36. (kolineace a dvojpoměry na kružnicích) Mějme kružnici ω a na ní body A, B, C, D . Pak pokud kolineace zobrazí ω na kružnici, platí $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

Důkaz. Myšlenka důkazu je dvojpoměry na kružnicích definovat pomocí svazků, o kterých už víme, že se zachovávají. Uvažme na ω bod P různý od A, B, C, D . Pak platí

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) &= (AP, BP, CP, DP) = (A'P', B'P', C'P', D'P') = \\ &= (A', B', C', D').\end{aligned}$$

□

Úloha 37. Máme trojúhelník ABC . Na straně BC zvolíme body A_1 a A_2 tak, že $(B, A_1, C, A_2) = -1$. Obdobně zavedeme body B_1, B_2 a C_1, C_2 . Předpokládejme, že A_2, B_2, C_2 leží na jedné přímce. Dokaž, že AA_1, BB_1, CC_1 prochází jedním bodem.



Řešení. V úloze se vyskytuje spousta podmínek s dvojpoměry, které působí na první pohled dost nepřístupně. Kdyby zmíněné dvojpoměry měly každý jeden bod v nekonečnu, úloha by se řešila lépe, přeci jen s poměry se lépe zachází. Pomocí kolineace si zobrazíme přímku $A_2B_2C_2$ na nevlastní. Nyní můžeme úlohu trochu přeformulovat: Máme trojúhelník ABC . Na straně BC zvolíme bod A_1 tak, že $(B, A_1, C, \infty) = -1$ neboli $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1$. To ale znamená, že A_1 je středem BC . Analogicky je B_1 střed AC a C_1 střed AB . Přímký AA_1, BB_1, CC_1 jsou těžnice v ABC , tudíž prochází jedním bodem. □

Harmonické dvojpoměry

V předchozí úloze se vyskytovala hodnota dvojpoměru -1 . Po srovnání jsme zjistili, že úzce souvisí se středem úsečky. Čtveřice bodů na přímce s hodnotou dvojpoměru rovnou -1 se v geometrii objevuje tak často, že si vysloužila speciální název. Říká se jí *harmonická* a v literatuře se vztah $(A, B, C, D) = -1$ často označuje $\mathcal{H}(A, B, C, D)$. Jak už ale víme, dvojpoměr je také vlastnost čtyř přímek. Obdobně tak čtyři přímky a, b, c a d procházející jedním bodem, pro které $(a, b, c, d) = -1$, budeme nazývat *harmonickým svazkem*. Vzpomeň si, jak jsme přepočítávali hodnoty dvojpoměrů podle pořadí bodů. Harmonické dvojpoměry mají tu vlastnost, že jsou harmonické nezávisle na protočení bodů:

$$-1 = (A, B, C, D) = (B, C, D, A).$$

Také nezávisí na směru čtení:

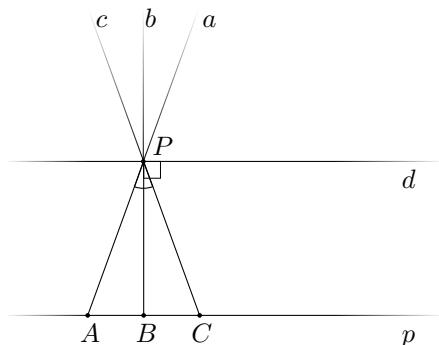
$$-1 = (A, B, C, D) = (D, C, B, A).$$

Harmonické čtveřice a svazky mají i spoustu dalších užitečných vlastností.

Tvrzení 38. (dvě ze tří) *Mějme čtyři přímky a, b, c a d procházející jedním bodem. Pak z libovolných dvou následujících tvrzení plyne tvrzení třetí:*

- (i) *Přímka b je osou úhlu, který svírají přímky a a c .*
- (ii) *Přímky b a d jsou na sebe kolmé.*
- (iii) *Přímky a, b, c a d tvoří harmonický svazek.*

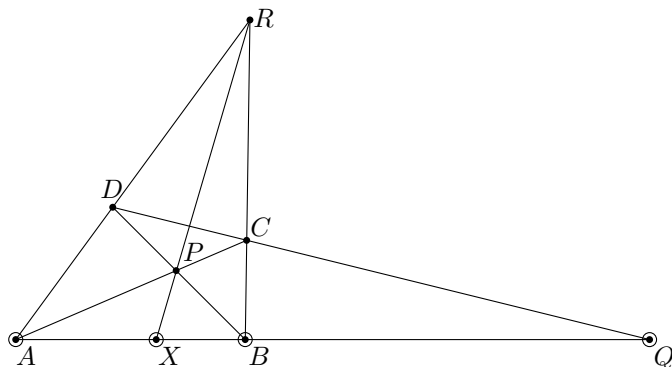
Důkaz. Dokážeme pouze, že z (i) a (ii) plyne (iii). Označme P průsečík všech čtyř přímek. Uvažujme přímku p rovnoběžnou s d , ta protne přímky a, b a c postupně v bodech A, B a C . Přímka b je v trojúhelníku PAC výškou i osou úhlu, tedy trojúhelník PAC je rovnoramenný. Bod B je tudíž středem strany AC . A nyní už ze známé konfigurace $(A, B, C, \infty) = -1$, takže přímky a, b, c a d tvoří harmonický svazek. $\square$



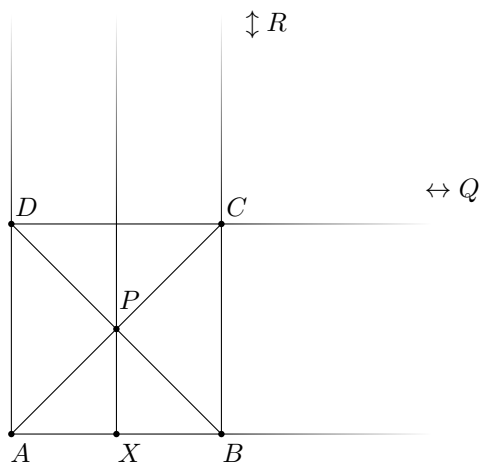
Cvičení 39. Dokaž zbývající dvě implikace tvrzení *dvě ze tří*.

Tvrzení 40. (Ceva¹⁴–Menelaus) *Mějme čtyřúhelník $ABCD$ a označme v něm $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$, $P = AC \cap BD$. Průsečík RP a AB označíme X . Potom platí $(A, X, B, Q) = -1$.*

¹⁴Čti [Čeva].



Důkaz. Uvažme kolineaci takovou, která zobrazí QR do nekonečna. BÚNO jsme tím dostali R, Q nevlastní. V takovém případě je $ABCD$ rovnoběžník. Uvážíme afinní zobrazení, které z něj vytvoří čtverec. Bod X pak ze symetrie leží ve středu AB . Takže $\mathcal{H}(A, X, B, Q)$. $\square$



Úloha 41. V trojúhelníku ABC leží na stranách BC, CA, AB postupně body A', B', C' tak, že AA', BB', CC' prochází jedním bodem. Nechť p je rovnoběžka k BC vedená bodem A . Přímka $A'B'$ protíná p v X . Přímka $A'C'$ protíná p v Y . Dokaž, že $|AX| = |AY|$.

Úloha 42. Dokaž tvrzení 3. (Blanchet) pomocí kolineace a dvojpoměrů.

Úloha 43. Nechť AD je výška v ostroúhlém trojúhelníku ABC . Dále P je libovolný bod na AD . Přímky BP a CP protínají AC a AB postupně v M, N . Přímka MN protíná AD v Q . Dále nechť F je libovolný bod na AC . Přímka FQ protíná CN v E . Dokaž, že $|\angle FDA| = |\angle EDA|$.

Úloha 44. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokaž, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC , leží na pevné kružnici (tzv. *Apoloniově kružnici*).

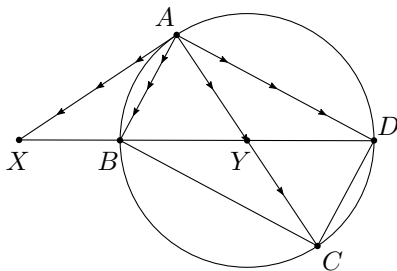
Úloha 45. Úhlopříčky AC, BD tětiového čtyřúhelníka $ABCD$, vepsaného do kružnice k se středem O , se protínají v $P \neq O$. Polopřímka OP protne k v X . Ukaž, že obraz přímky CA podle CX , obraz přímky DB podle DX a přímka OX procházejí jedním bodem.

Úloha 46. V trojúhelníku ABC jsou dány ceviany¹⁵ AD, BE, CF , které se protínají v bodě K . Označme X průsečík FD a BK . Označme P střed AK . A nakonec Y průsečík EP a AB . Dokaž, že $XY \parallel AD$.

Harmonické čtyřúhelníky

Obdobně jako je dvojpoměr na přímce harmonický, pokud $(A, B, C, D) = -1$, budeme říkat, že je dvojpoměr na kružnici harmonický, pokud $(A, B, C, D) = -1$. Tím získáváme definici velmi zajímavého geometrického objektu, harmonických čtyřúhelníků. Pojďme si rozmyslet vlastnosti, které mají.

Tvrzení 47. (o obdélnících) *Jediným harmonickým obdélníkem¹⁶ je čtverec.*



Důkaz. Mějme obdélník $ABCD$ s kružnicí opsanou ω . Označme p přímkou BD a X průsečík tečny k ω v bodě A s přímkou p . Dále necht Y je průsečík AC a BD . Pak

$$(A, B, C, D) \underset{\wedge}{=} (X, B, Y, D).$$

Ale Y je středem BD , takže (X, B, Y, D) je harmonická právě tehdy, když X je nevlastní. To platí právě tehdy, když tečna k ω v bodě A je rovnoběžná s BD , což je právě tehdy, když je $ABCD$ čtverec. $\square$

Tvrzení 48. (o deltoidech¹⁷) *Všechny tětiové deltoidy jsou harmonické.*

¹⁵Ceviany v trojúhelníku jsou tři přímky, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníka a protínají se v jednom bodě.

¹⁶Čtverec bereme jako speciální případ obdélníka.

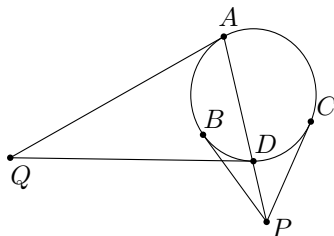
¹⁷Deltoid je konvexní čtyřúhelník osově souměrný podle jedné z úhlopříček.

Důkaz. (kolineací) Vzpomeň si, že kolineace zachovávala dvojpoměry na kružnicích. Mějme tětivotý deltoid $ABCD$, ve kterém AC je průměr kružnice opsané. Označme P průsečík tečen ke kružnici opsané v bodech B, D . Ze symetrie P leží na AC . Kolmici na AC procházející P označme p . Uvažme kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici opsanou. Ta z BD vytvoří průměr kružnice opsané, který je kolmý na AC . Z $ABCD$ tím vznikl čtverec, o kterém víme, že je harmonický. $\square$

Důkaz. (promítáním) Mějme tětivotý deltoid $ABCD$, ve kterém AC je průměr kružnice opsané. Ten promítneme skrz bod A na přímku BD . Označme X střed BD a Y nevlastní bod přímky BD . Pak

$$(A, B, C, D) \stackrel{A}{\underset{\wedge}{=}} (Y, B, X, C) = -1. \quad \square$$

Příklad 49. Máme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω . Tečny k ω v bodech B a C se protínají v bodě P . Druhý průsečík AP s ω označme D . Pak (A, B, C, D) je harmonický.

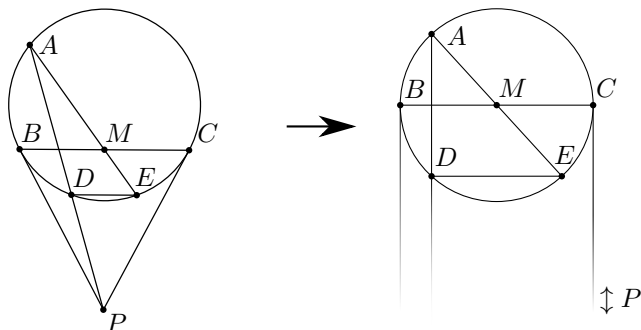


Řešení. Označme Q průsečík tečen k ω v bodech A a D . Uvažme kolineaci, která zobrazí PQ na nevlastní a ω na kružnici. Tím dostaneme nějakou kružnici ω , na ní v bodech B a C rovnoběžné tečny a v bodech A a D rovnoběžné tečny neboli BC i AD jsou průměry ω . Ale zároveň AD je rovnoběžné s PB , tudíž kolmé na BC . Takže $PB \perp QD$. Z toho plyne, že $ABCD$ musí být čtverec, tedy je harmonický. $\square$

Poznámka. Nezvykej si moc, že vždycky můžeš takovou kolineaci uvážit. Dobře si proto rozmysli, že daná přímka nikdy neprotíná kružnici, kterou chceš zachovat. Když Ti to není jasné, zkus kolineovat pomalu. Nejdřív jeden bod a až pak i ten druhý. Často to může zjednodušit argumentaci, proč se opravdu nikdy neprotínají.

Poznámka. Přímka AD , která se v předchozí úloze objevila, má v geometrii dokonce vlastní název. Říká se jí *symediána* bodu A vzhledem k ABC .

Tvrzení 50. (překlopená těžnice) *Symediána bodu A v trojúhelníku ABC je osově překlopená těžnice podle osy úhlu.*



Důkaz. Označme M střed BC , D průsečík A -symediány s kružnicí opsanou, P průsečík tečen z B a C ke kružnici opsané a nakonec E průsečík AM s kružnicí opsanou.

Tvrzení je ekvivalentní s $|\angle MAB| = |\angle DAC|$. Z obvodového úhlu to znamená, že je úloha ekvivalentní s tvrzením, že oblouky BE a CD mají stejnou velikost neboli $BC \parallel ED$.

Mějme rovnoběžku p s BC procházející bodem P . Uvažíme kolineaci zobrazující p na nevlastní a zachovávající kružnici opsanou. Ta zachová poměr $\frac{|BM|}{|MC|}$, tedy M bude stále středem BC . Z BC se stane průměr kružnice, takže z M se stane střed kružnice opsané. Příмка AP je teď kolmá na BC . Z Thaletovy věty je ED kolmá na AD neboli $BC \parallel ED$. $\square$

Úloha 51. Úhlopříčky tětívového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P . Dokaž, že pokud je BP symediána v ABC , pak AP je symediána v ABD .

(Rumunsko TST 2006)

Úloha 52. Je dána kružnice ω a bod A mimo ni. Označme body dotyku tečen z A k ω postupně X, Y . Mějme na kružnici tětivu BC takovou, že A leží na přímce BC . Označme M střed BC . Dokaž, že $|\angle XMA| = |\angle YMA|$.

Úloha 53. Mějme kružnici k a bod P vně této kružnice. Z bodu P vedeme tečny PX a PY ke k . Na kratším oblouku XY zvolíme bod A . Příмка PA protne kružnici podruhé v bodě B . Označme M střed AB . Dokaž, že trojúhelníky BXM a YBM jsou podobné.

Co ještě umí kolineace

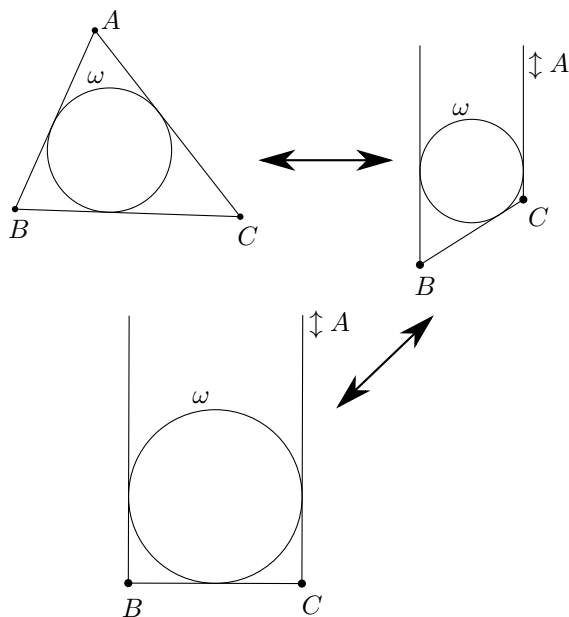
Tvrzení 54. (kolineace a čtyřúhelníky) Ukážeme si, že pro body A, B, C, D v obecné poloze a body A', B', C', D' v obecné poloze existuje kolineace, která zobrazuje $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C', D \rightarrow D'$.

Důkaz. Označme $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap DA$. Uvažme kolineaci, která zobrazí PQ na nevlastní přímku. Takhle kolineace zobrazí $ABCD$ na rovnoběžník. Pro každý rovnoběžník umíme najít afinní zobrazení, které z něj vytvoří čtverec. Neboli

pro $ABCD$ existuje kolineace, která jej zobrazí na čtverec. Obdobně pro $A'B'C'D'$ existuje kolineace, která ho zobrazí na stejný čtverec. Inverzní kolineace k této je také kolineací, takže existuje kolineace, která čtverec zobrazí na $A'B'C'D'$. Takže složením kolineace, která zobrazí $ABCD$ na čtverec, a té, co zobrazí čtverec na $A'B'C'D'$, dostaneme hledané zobrazení. $\square$

Poznámka. Taková kolineace existuje právě jedna. Důkaz, který známe, je spíše pracný a nezajímavý, tak jej neuvádíme.

Tvrzení 55. (trojúhelník s kružnicí vepsanou) *Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a trojúhelník $A'B'C'$ s kružnicí vepsanou ω' . Pak existuje kolineace, která zobrazuje $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ a $\omega \rightarrow \omega'$.*



Důkaz. Uvažme kolineaci, která zobrazí A do nekonečna a kružnici ω zobrazí na kružnici. Dostaneme tím přímky AB a AC rovnoběžné, mezi nimi vepsaná kružnice ω . Chtěli bychom, aby BC bylo kolmé na AB , ale to zatím nemusí. Uvažme body dotyku ω s AB a AC postupně D , E . Označme P průsečík DE a BC . Nakonec mějme přímku p rovnoběžnou s AB procházející bodem P . Uvážíme kolineaci, která p zobrazí na nevlastní a ω zobrazí na kružnici. Pak ze symetrie je BC kolmé na AB . Tím jsme našli kolineaci, která z obecného trojúhelníka ABC s kružnicí vepsanou vytvoří „trojúhelník“ s jedním nevlastním bodem a pravými úhly u zbylých vrcholů a ω zobrazí na kružnici. Neboli existuje i kolineace, která tenhle „trojúhelník“ převádí na obecný trojúhelník s kružnicí vepsanou. Složením těchto kolineací dostáváme kolineaci, která zobrazuje $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ a $\omega \rightarrow \omega'$. $\square$

Poznámka. Pokud chceme zobrazit trojúhelník na rovnostranný a zachovat kružnici vepsanou, existuje jedna přímka, kterou můžeme zobrazit na nevlastní, a tím se z obecného trojúhelníka stane rovnostranný. Můžeš si zkusit rozmyslet, která to je.

Úloha 56. Máme trojúhelník ABC . Označme body dotyku kružnice vepsané ke stranám BC , AC , AB postupně X , Y , Z . Označme K , L , M průsečíky postupně AB a XZ , BC a ZY , CA a XY . Dokaž, že body K , L , M leží na jedné přímce.

Zobecňování dvojpoměrů

Tahle kapitolka je pouze doplňující, její pochopení není nutné k pochopení zbytku seriálu, ani k řešení soutěžních úloh.

V kapitole o dvojpoměrech jsme si mohli vybrat jakýkoli sudý počet bodů a na nich definovat nějaký n -poměr. Zastavili jsme se u čtyř, ale co když pokračujeme dál. I vícepoměry se občas dají použít v důkazu. Ukážeme si, jak využít trojpměr neboli vlastnost šesti bodů k nahlédnutí Cevovy věty.

Věta 57. (Ceva) Mějme trojúhelník ABC . Na stranách BC , CA a AB zvolíme postupně body X , Y , Z tak, že přímky AX , BY , CZ prochází jedním bodem X . Pak

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

Důkaz. Všimni si, že obdobně jako u dvojpoměru jsme se mohli zbavit pomocného bodu, pokud všechny ležely na přímce, tak u trojpměru se můžeme pomocného bodu zbavit, když leží po třech na přímce. Neboli hodnota zmíněná v Cevově větě je vlastně trojpměrem šesti bodů (A, Z, B, X, C, Y) . Trojpměr se podobně jako dvojpoměr zachovává při promítání, takže můžeme na rovinu aplikovat jakoukoli perspektivu nebo afinní zobrazení a hodnotu trojpměru nezměníme.

Vzpomeň si na tvrzení *kolíneace a čtyřúhelníky*. Takové kolíneace se dá dosáhnout využitím pouze perspektivy a afinních zobrazení, takže tahle kolíneace zachovává trojpměry¹⁸. Uvažme čtyřúhelník A, B, C, X . Podle tvrzení *kolíneace a čtyřúhelníky* ho zobrazíme na rovnostranný trojúhelník ABC , kde X je jeho středem. V takovém případě Cevova věta zřejmě platí, takže platí vždycky. $\square$

¹⁸Dokonce každá kolíneace zachovává jakékoli n -poměry.

Shrnutí

Shrneme, co jsme si v prvním díle seriálu ukázali.

Afinní zobrazení:

- (1) Zachovává přímky.
- (2) Zachovává poměry na přímkách.
- (3) Zachovává rovnoběžky.
- (4) Elipsy zobrazuje na elipsy.
- (5) Zachovává poměry obsahů.
- (6) Pro každou elipsu existuje afinní zobrazení, které ji zobrazí na kružnici.
- (7) Pro každé dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ existuje afinní zobrazení, které je na sebe převádí. (Existuje dokonce právě jedno.)
- (8) Složení afinních zobrazení je afinní.
- (9) Inverzní zobrazení k afinnímu je afinní.
- (10) Příklady afinních zobrazení jsou: podobná zobrazení, zkosení, zmačknutí.

Dvojpoměry

- (1) Hodnotu čtyř bodů na přímce značíme (A, B, C, D) , čtyř bodů vzhledem k pátému $(A, B, C, D)_P$, čtyř přímek procházejících jedním bodem (a, b, c, d) nebo čtyř bodů na kružnici (A, B, C, D) .
- (2) Dvojpoměry jsou měřícím nástrojem v projektivním světě, protože všechna projektivní zobrazení ho zachovávají.
- (3) Hodnotu $(A, B, C, D)_P$ spočítáme postupným násobením a dělením obsahů trojúhelníků.
- (4) *Promítací tvrzení.*
- (5) S jedním bodem nevlastním degeneruje do obyčejného poměru.
- (6) Skrz bod na kružnici se dají promítat na kružnici.
- (7) Jsou jednoznačné, neboli pokud $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, tak $X = Y$.

Kolineace

- (1) Zachovává přímky.
- (2) Zachovává dvojpoměry na přímce, dvojpoměrové svazky i dvojpoměry na kružnici.
- (3) Kuželosečky zobrazuje na kuželosečky. Kuželosečky, které neprotínají nevlastní přímku, jsou elipsy. Kuželosečka, co se jí dotýká, jsou paraboly, a ty, co ji protínají ve dvou bodech, jsou hyperboly.
- (4) Pro každou přímku existuje kolineace, která ji zobrazí na nevlastní. (Je to perspektiva.)
- (5) Pro každou kružnici a přímku, která ji neprotíná, existuje kolineace, která danou přímku zobrazí na nevlastní a kružnici zachová.

- (6) Pro každý tečnový čtyřúhelník s kružnicí vepsanou existuje kolineace, která z něj vytvoří **kosočtverec** a zachová kružnici vepsanou.
- (7) Pro každý tětiový čtyřúhelník s kružnicí opsanou existuje kolineace, která z něj vytvoří **obdélník** a zachová kružnici opsanou.
- (8) Pro každé dva čtyřúhelníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ existuje kolineace, která je na sebe převádí.
- (9) Pro každé dva trojúhelníky s kružnicí vepsanou ABC a $A'B'C'$ existuje kolineace, která je na sebe převádí a zachová kružnici vepsanou. Obdobně i s kružnicí opsanou.

Harmonické dvojpoměry

- (1) Hodnota dvojpoměru je pro ně rovna -1 .
- (2) Čtveřice A, M, B, ∞ je harmonická, právě když M je střed AB .
- (3) Tvrzení *Ceva-Menelaus* je známou harmonickou čtveřicí.
- (4) Pro harmonické svazky platí tvrzení *dvě ze tří*.
- (5) $\mathcal{H}(A, B, C, D) = \mathcal{H}(A, D, C, B) = \mathcal{H}(D, C, B, A)$.

Harmonické čtyřúhelníky

- (1) Čtyři body na kružnici, jejichž dvojpoměr je roven -1 .
- (2) Z obdélníků je harmonický právě čtverec.
- (3) Všechny deltoidy jsou harmonické.
- (4) Označme X průsečík tečen ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodech B a C . Pak A -symediána v trojúhelníku ABC je přímka AX .
- (5) Čtyřúhelník $ABCD$ je harmonický právě tehdy, když AD je symediána v ABC .

Pár slov závěrem

Gratuluje, dočetl(a) jsi se až sem! V seriálu jsme si ukázali, jak matematicky popsat koukání se na obrázky z jiných úhlů a jak nám to může pomoci při řešení úloh. Začali jsme s afinními zobrazeními, která nás provázela po zbytek seriálu. Naučili jsme se perspektivu, kolineaci, dvojpoměry, a co to znamená, když jsou harmonické.

V dalším díle budeme pokračovat v naší cestě projektivní geometrií. Dozvíš se například, co znamená podivně znějící věta: „Polára bodu na poláře prochází pólem původní poláry.“, jak tyhle věci souvisí s komplexními čísly, a hlavně, co je to dualita. Dualita pro nás bude dokazovací nástroj podobně jako v tomto díle perspektiva či kolineace. Na rozdíl od nich se ale nebude na obrázek koukat jen z jiného úhlu pohledu, ale celkově nám obrázek úplně překreslí. Z přímek nám udělá body a z bodů

zase přímky. Ale nemůžeme přece prozradit všechno, na víc se můžeš těšit v druhém díle.

Návody

6. Mají stejný. Rozmysli si, že afinní zobrazení zachovává poměry obsahů a zobraz na rovnoramenný.

11. Zobraz P na nevlastní tak, aby se zachoval poměr na přímce AY a kružnice.

12. Dokaž, že $PA \parallel BC$. Zobraz rovnoběžku s BC procházející bodem A na nevlastní a ukaž, že pak je P také nevlastní.

13. Zobraz $ABCD$ na kosočtverec a zachovej kružnici vepsanou.

14. Zobraz tak, aby se zachovala kružnice a získal jsi z $ABCD$ kosočtverec.

15. Nechť I je středem ω a E je bod dotyku ω se stranou BC . Zobraz EI a KL na rovnoběžky a zachovej poměry a kružnici.

16. Zobraz PQ a UV na rovnoběžné a zachovej kružnici. Rozmysli si, že pravý úhel mezi RS a UV se zachová, protože se zachovává symetrie podle UV .

17. Označ K průsečík $CB \cap EF$. Zobraz AK na nevlastní.

18. Zobraz C na nevlastní a zachovej poměry. Následně srovnej afinním zobrazením.

19. Pošli A na nevlastní.

20. Zachovej kružnici a zobraz A na nevlastní.

21. Ukaž, že umíš všechny povolené konstrukce na sebe převést nějakou kolineací.

22. Dokresli Thaletovu kružnici nad AD . Zobraz BC a AD na rovnoběžky a zachovej tuhle kružnici.

32. Označ A_3 průsečík AA_2 s BC . Obdobně B_3 a C_3 . Dokaž, že $(A_1, B, A_3, C) = (B_1, A, B_3, C)$. Promítni oba tyto dvojpoměry na čtyřúhelník $ABCX$, kde X je hledaným bodem na kružnici.

33. Označ $K = A_1C_2 \cap B_1A_2$ a $L = C_1A_2 \cap B_1C_2$. Zkus ukázat, že $(A_2, X, K, B_1) = (L, Z, C_2, B_1)$.

34. Označ X průsečík AB a CD . Dokaž, že $(X, A, M_1, B) = (X, A, M_1, B)$. Promítni (X, A, M_1, B) na BC skrz bod D . Následně na CD skrz bod A . Obdobně promítni dvanáctkrát.

41. Zobraz BC na nevlastní. Poměr $\frac{|AX|}{|AY|}$ se zachová.

42. Převeď pomocí tvrzení *dvě ze tří* na úlohu, co chce dokázat, že je nějaký svazek harmonický. Jakoukoli přímku zobraz na nevlastní a všiměj si symetrií.

43. Převeď na podmínku, že je svazek harmonický. Zobraz BC na nevlastní a neboj se, že je nevlastní přímka součást harmonického svazku. Pokud čtyři přímky tvoří harmonický svazek, tak každou další přímku protnou v harmonickém svazku.

44. Dokresli čtvrtého do party k B, D, C a využij tvrzení „dvě ze tří“.

- 45.** Protáhni polopřímku i na druhou stranu a použij „dvě ze tří“.
- 46.** Využij promítací tvrzení z bodu Y . S jeho pomocí je úloha ekvivalentní s $\mathcal{H}(B, X, K, E)$. Teď už je úloha lehkou kořistí pro kolineaci.
- 51.** Převed' na harmonický a využij symetrií harmonických čtveřic.
- 52.** Promítni úhel na kružnici a převed' úlohu na tvrzení o rovnoběžnosti. Zobraz A na nevlastní.
- 53.** Vyber si dvojici úhlů, o které chceš dokázat, že jsou stejné. Zobraz je na kružnici a převed' tím úhlovou podmínku na rovnoběžnost. Pak už můžeš použít kolineaci.
- 56.** Zobraz pomocí tvrzení trojúhelník s kružnicí vepsanou ABC na rovnostranný.
- 56.** Pomocí tvrzení trojúhelník s kružnicí vepsanou zobraz trojúhelník na rovnostranný.

1. podzimní série – Historky ze školní jídelny

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

	Jméno	Příjmení	r.	Škola	1	2	3	4	5	6	7	8	re±im	celkem
1.–9.	Vašek	Janáček	3	GJarošeBO	–	–	–	5	5	5	5	5	25 + 2i	25,00
1.–9.	Jiří	Kalvoda	3	GJarošeBO	3	3	3	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Lucia	Krajčoviechová	4	GJHroncaBA	–	–	–	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Magdaléna	Mišinová	3	GKepleraPH	–	–	3	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Jakub	Parada	4	G Gröss BA	2	–	–	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Zdeněk	Pezlar	2	GJarošeBO	3	3	3	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Jan	Růžička	3	GKepleraPH	3	3	3	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Lukáš	Veškrna	2	GKepleraPH	3	3	3	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–9.	Adéla Karolína	Záčková	3	GZborovPH	3	3	3	5	5	5	5	5	25 + i	25,00
10.–11.	Benedikt	Bareš	2	G Dobruška	3	3	3	5	5	0	5	5	23	23,95
10.–11.	Matouš	Safránek	2	GKepleraPH	–	3	3	5	5	–	5	5	23	23,95
12.	Michal	Beránek	2	GVoděraPH	–	3	–	5	4	5	5	5	24 + i	23,91
13.	Samuel	Rosiar	1	GKepleraPH	3	3	3	5	5	2	4	5	22	23,86
14.	Vendula	Onderková	2	GJŠkodyPŘ	3	3	3	5	5	–	5	5	23	23,84
15.–16.	Jakub	Kislinger	3	G Klatovy	3	–	–	5	0	5	5	5	23	23,63
15.–16.	Jáchym	Němeček	3	SPŠERožnov	3	3	3	5	5	–	5	5	23	23,63
17.	Karel	Chwistek	3	MendelG OP	3	3	3	5	5	5	–	5	23	23,56
18.–19.	Vít	Hanika	1	GKepleraPH	3	3	–	5	5	–	–	5	21	23,42
18.–19.	Jakub	Štepo	1	GEbenešeKL	3	3	3	5	5	–	5	–	21	23,42
20.	Petro	Velychko	2	GKepleraPH	3	3	3	4	4	5	4	5	22	23,38
21.–23.	Jakub	Jedlička	2	GZborovPH	3	3	–	5	–	–	5	5	21	22,79
21.–23.	Adam	Pavelka	2	MendelG OP	3	3	0	5	0	0	5	5	21	22,79
21.–23.	Nikita	Ustinov	2	GKepleraPH	3	3	3	5	5	–	5	–	21	22,79
24.	Mikuláš	Brož	3	GNadŠtolPH	3	3	–	5	5	5	1	5	23	22,59
25.	Klára	Pernicová	3	GJarošeBO	3	3	3	5	5	–	5	5	23	22,51
26.–27.	Olga	Dvořáková	1	GJarošeBO	3	3	3	5	3	–	1	5	19	22,43
26.–27.	Veronika	Chovancová	1	PiarGTn	3	3	3	5	2	1	5	–	19	22,43
28.	Adam	Mendl	3	GCoubTábor	3	3	3	5	5	–	5	5	23 + i	22,42
29.–30.	Vojtěch	David	3	WichtG OS	3	3	3	5	5	5	–	5	21 + i	22,37
29.–30.	Petr	Hladík	2	GMikul23PL	3	3	3	5	5	–	–	5	21	22,37
31.–32.	Jakub	Polák	0	GNPrazačPH	3	3	3	5	–	3	–	–	17	22,17
31.–32.	Zdeněk	Tomis	3	GStudHavíř	3	3	–	5	5	–	–	5	21	22,17
33.	Ondřej	Sladký	3	GMikul23PL	3	3	3	5	5	5	–	–	21 – i	21,97
34.	Tomáš	Flidr	2	G Kojetín	3	3	3	5	5	–	5	–	21	21,73
35.	Tomáš	Macháček	2	GKepleraPH	3	2	3	3	1	5	5	–	19 + i	21,70
36.	Markéta	Hanušková	2	G VelMeziř	3	3	–	5	4	–	5	–	20	21,68
37.	Jonáš	Havelka	4	G Jírov ČB	3	3	3	5	5	5	5	5	23	21,63
38.–39.	Martin	Fof	2	MendelG OP	3	3	–	5	2	–	3	5	19	21,52
38.–39.	Josef	Vácha	2	GKepleraPH	3	3	3	2	2	–	5	5	19	21,52
40.	Eva	Feldbabelová	2	KGTrěbič	3	3	3	5	5	–	4	–	20	21,46
41.–42.	Antonín	Otmar	3	GNadKavaPH	3	3	3	5	4	–	–	5	20	21,41
41.–42.	Adam	Šlegl	3	GJosefskPH	3	–	2	5	5	–	–	5	20	21,41
43.	Tobiáš	Krupa	4	G RožnRadh	3	3	2	5	–	5	–	5	21	21,00
44.	František	Dvořák	2	G ČKrumlov	2	3	3	4	3	–	–	5	18	20,84
45.	Teodor	Machart	2	GKepleraPH	3	3	3	4	5	–	–	–	18	20,77
46.	Filip	Brecher	1	GKepleraPH	3	3	–	5	5	–	–	–	16	20,67
47.	Ondrej	Dulanský	2	GJŠkodyPŘ	3	3	2	5	2	–	5	–	18	20,65

48.	Huu Quy	Nguyen	3	G Rumburk	3 2 3 5 3 - 5 -	19	20,63
49.	Vojtěch	Gaďurek	3	PORG PH	3 3 - 5 5 5 - -	21	20,45
50.	Jan	Brada	3	CírkGPLž	3 3 3 5 5 - - 0	19	20,40
51.-52.	Martin	Nováček	2	G MasNámTŘ	3 1 3 5 5 - - -	17	20,12
51.-52.	Alex	Tabara	2	Gymn.JanŠabr	3 3 - 5 1 0 5 -	17	20,12
53.	Darian	Poljak	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 - 5 - -	19	20,09
54.	Anežka	Kasalová	1	GZborovPH	3 3 0 3 1 1 1 5	15	20,00
55.	Lenka	Poljaková	0	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 - - - -	14	19,92
56.	Daniel	Perout	3	GJarošeBO	3 3 3 5 - - 5 -	19	19,85
57.	Jakub	Kliment	3	GTajBanBys	3 3 3 4 - - 5 -	18	19,83
58.	Jitka	Padronová	1	GSRandyJN	3 2 0 5 1 0 3 0	14	19,28
59.	Kateřina	Panešová	4	G Teplice	3 3 3 5 5 - 5 -	21	19,03
60.-61.	Anastasia	Bredikhina	0	GKepleraPH	3 2 2 1 - - - 4	12	19,02
60.-61.	Vojtěch	Müller	0	GNadKavaPH	3 3 - 2 4 - - -	12	19,02
62.	Petr	Khartskhaev	3	PORG PH	- 3 2 5 - 5 5 -	20	18,96
63.	Jáchym	Mierva	3	GUKlafárŽR	3 3 3 3 5 - - -	17	18,86
64.	Václav	Maštera	2	GCoubTábor	3 3 - 5 1 - 3 -	15	18,59
65.	Denisa	Hanušková	2	G VelMeziř	3 3 - 5 - - 5 -	16	18,58
66.	Vojtěch	Votruba	2	GKepleraPH	3 3 3 5 1 - - -	15	18,54
67.	František	Malý	0	MatičníGOS	3 3 - 5 - - - -	11	18,23
68.	Lucia	Kvasničková	1	GKepleraPH	3 3 - 4 4 - - -	14	18,01
69.-70.	Jana	Maderová	4	FRedmS	3 3 2 5 1 0 - 5	18	18,00
69.-70.	Viktor	Patapeika	4	G41Minsk	3 3 - 3 4 - 5 0	18	18,00
71.	Michal	Kupec	4	G Pisek	3 3 3 5 5 3 - -	19	17,97
72.	Veronika	Kavanová	1	GJungmanLT	3 3 - 4 1 - 1 0	12	17,70
73.	Matej	Hanus	4	GPosKošice	3 3 3 5 5 - - -	19	17,29
74.	Anna	Pecháčková	2	GJŠkodyPŘ	3 1 - 5 1 0 3 0	13	16,90
75.-77.	Martin	Boček	1	MendelG OP	3 3 - - 5 - - -	11	16,83
75.-77.	Věra	Polášková	1	OA Liberec	3 3 - 4 1 - - -	11	16,83
75.-77.	Jakub	Vlček	1	G Příbor	3 3 - 1 4 - - -	11	16,83
78.-79.	Vojtěch	Eibel	0	G Ivančice	3 3 - 3 - - - -	9	16,42
78.-79.	Viktorie	Hulcová	0	G ČKrumlov	3 3 0 3 0 - 0 0	9	16,42
80.-81.	Ema Wayan	Danielová	3	ŠkBřezová	3 3 - 2 1 - - 5	14	16,36
80.-81.	Amálie	Dostalíková	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 - - - -	14	16,36
82.	Alan	Hübsch	2	GKepleraPH	3 3 3 3 1 - - -	13	16,16
83.-84.	Matěj	Kliment	2	LeafAcademy	3 - - 4 1 - - 4	12	16,00
83.-84.	Karel	Procházka	2	GPBystrica	3 3 - 3 1 - - 2	12	16,00
85.	Haikl	Martin	1	G TýnNVlt	3 3 1 2 1 0 - 0	10	15,89
86.	Michal	Vosyka	3	GUKlafárŽR	3 3 3 5 - - - -	14	15,63
87.	Adam	Křivka	4	CMGPGBrno	1 - 3 5 5 - 4 -	18	15,09
88.	Stanislav	Kozák	2	G Holice	3 3 3 1 1 - - -	11	15,05
89.-90.	Patrik	Jendele	1	SPŠsPLZ	3 3 - 2 1 - - -	9	14,89
89.-90.	Štěpán	Tomek	1	GSRandyJN	3 3 - 3 - - - -	9	14,89
91.	Peter	Kochelka	2	GTajBanBys	3 - 3 5 - - - -	11	14,77
92.	Natália	Bátorová	3	GPBystrica	3 3 - 5 - - 1 -	12	14,47
93.	Viktor	Materna	4	GJarošeBO	3 2 - 5 5 1 - -	16	14,26
94.	Lukáš	Frk	3	GNadAlejPH	3 3 - 5 1 - - 0	12	14,25
95.	Klára	Hubínková	2	GMikul23PL	3 3 - 2 - - 2 0	10	14,05
96.	Lucie	Ambrožová	4	G Svitavy	3 3 3 5 - - - -	14	14,00
97.-98.	Markéta	Kořínková	1	BiskG Brno	- 3 - 5 - - - -	8	13,81
97.-98.	Martin	Švanda	1	ArcibisGPH	3 0 0 5 - - - -	8	13,81
99.	Kateřina	Vokálová	4	G Kolín	3 3 - 3 - - - 5	14	13,55

100.	Dora	Cidlinská	3	KlŠpG Brno	3 3 - 5 - - - -	11	13,47
101.	Václav	Verner	0	PORG PH	3 1 0 2 0 0 1 0	7	13,44
102.-103.	Filip	Hošek	0	MKG Říčany	3 - - 2 - - 1 -	6	13,03
102.-103.	Michaela	Řihová	0	G Broumov	3 3 - - - - - -	6	13,03
104.	Tomáš	Jaroš	2	GOA Pelh	3 3 - 2 0 - 1 0	9	13,00
105.	Martin	Černý	2	G HavlBrod	3 - 3 3 - - - -	9	12,95
106.	Robin	Palán	2	GJarkovPH	3 0 0 3 0 - 3 -	9	12,48
107.	Dominik	Belza	3	GBalbínaHK	3 3 1 2 1 0 1 0	10	12,45
108.	Ondřej	Macháč	4	GStrážnice	3 3 - 3 5 - 0 -	14	12,35
109.-110.	Markéta Anna	Doležalová	4	GUKlafárŽR	3 3 - 2 1 - 3 -	12	12,00
109.-110.	Martin	Kavan	4	GJungmanLT	3 3 0 4 1 1 1 0	12	12,00
111.	Adéla	Křížová	2	G Ústí n O	3 3 - 1 1 - - -	8	11,89
112.	Jakub	Mašek	0	GNeumannŽR	- 3 - 2 0 - - -	5	11,66
113.	Anna	Musilová	4	PORG PH	3 3 2 5 - 1 1 -	14	11,53
114.-115.	Julie	Křinská	1	GKepleraPH	3 1 - 2 - - - -	6	11,38
114.-115.	Bohdana	Vokounová	1	G Domažlice	3 3 - - - - - 0	6	11,38
116.	Lucie Abigail	Kopelentová	2	GKutnáHora	3 - - 3 1 - - -	7	10,72
117.	Matěj	Holubička	4	G Hořice	3 3 - 4 1 1 - -	12	10,39
118.	Míchal	Döme	3	LycCarFR	3 3 - 2 - - - -	8	10,30
119.	František	Kmječ	4	G Brandýs	3 3 - 5 - - - -	11	10,27
120.	Filip	Sedláček	3	GSRandyJN	3 - - 5 0 - - 0	8	10,05
121.	Marek	Eibel	2	G Ivančice	3 3 - - - - - -	6	9,48
122.	Klára	Hloušková	4	G Kolín	3 2 - 5 1 1 - -	12	9,42
123.	Jan	Vavřín	3	PORG PH	3 - - 0 4 - 4 -	11	9,30
124.-127.	Petra	Jirů	3	GPelhřimov	3 3 - 1 0 0 - -	7	9,17
124.-127.	Jiří	Malý	3	GJPekařeMB	3 2 - 1 - - 1 -	7	9,17
124.-127.	Adéla	Tržilová	3	KGTrébíč	3 - - 4 - - - -	7	9,17
124.-127.	Oleksandr	Zezulya	3	G Beroun	3 3 - 1 - - - -	7	9,17
128.	Jan	Nekarda	4	GUHradiště	3 3 - 5 - - - -	11	8,99
129.-130.	Matyáš	Kohut	1	GSOŠ FrMýs	3 - - - 1 0 - 0	4	8,48
129.-130.	Matěj	Venhoda	1	GJMasar JI	3 - - - 1 - - -	4	8,48
131.-132.	Barbora	Šanderová	0	G Broumov	3 0 - - - - - -	3	8,34
131.-132.	Kateřina	Trojtllová	0	G Broumov	3 - - - - - - -	3	8,34
133.	Jiří	Dospěl	2	SPŠS PH	3 0 - 2 - - - -	5	8,08
134.	Míchal	Smieško	3	GOpátovPH	3 3 0 0 0 0 - -	6	8,00
135.	Klára	Chobotová	0	GJNerudyPH	3 - - - - - - -	3	7,86
136.	Marek	Pišťák	2	GHeyrovPH	3 2 - - - - - -	5	7,42
137.	Paulína	Dujavová	2	GGraymanaPV	- 3 - - - - - -	3	5,27
138.	Jan	Vondra	4	G TýnNVlt	3 - - 3 - - - -	6	5,16
139.	Radomír	Mielec	2	GVolgogrOS	3 - - - - - - -	3	4,98
140.	Eliška	Pirnosová	3	GMikul23PL	3 - - - - - - -	3	4,23
141.	Jan	Kaifer	4	GKepleraPH	3 3 - - - - - -	6	3,88
142.	Vojtěch	Turland	4	GJarošeBO	3 - - - - 1 - -	4	3,80
143.	Viktorie	Blahová	4	GJarošeBO	3 - - - - - - -	3	3,00

adresa: Korespondenční seminář

KAM MFF UK

Malostranské náměstí 25

118 00 Praha 1

web: <http://mks.mff.cuni.cz/>

e-mail: mks@mff.cuni.cz