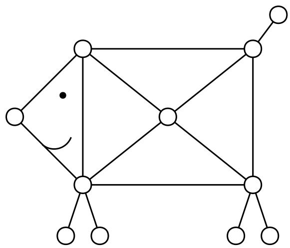
Dělitelnost

3. podzimní série Termín odeslání: 3. prosince 2018

Pokud není v úloze řečeno jinak, číslem rozumíme kladné celé číslo.

Úloha 1. (3 body)

Do každého kolečka napište jedno z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 21, 30, 34 a 6006 tak, aby poměr čísel ve dvou kolečkách byl celočíselný právě tehdy, když jsou tato kolečka spojená čárou.



Úloha 2. (3 body)

Martin si napsal své oblíbené číslo do sešitu. Petr mu ho vzal a škrtl cifru na místě jednotek. Pak si všiml, že původní číslo je dělitelné tím novým. Najděte všechna aspoň dvouciferná čísla, která mohl Martin napsat.

Úloha 3. (3 body)

Žabička Danýlek skáče po očíslovaných kamenech. Vždy, když stojí na kameni s číslem n, najde největšího a nejmenšího prvočíselného dělitele čísla n. Pak skočí na kámen označený součtem těchto dělitelů. Ukažte, že ať začne kdekoli, může takto navštívit jen konečně mnoho různých kamenů.

Úloha 4. (5 bodů)

Najděte všechna prvočísla, která nelze zapsat jako $\sqrt{24n+1}$ pro žádné přirozené n.

Úloha 5. (5 bodů)

Číslo n nazveme *vypečené*, jestliže ho můžeme vyjádřit jako součet tří čísel a, b, c, pro která platí

$$a < b < c, \qquad a \mid b, \qquad b \mid c.$$

Dokažte, že existuje pouze konečně mnoho čísel, která nejsou vypečená.

Úloha 6. (5 bodů)

Anička chce číslo n s následující vlastností: pro všechny nenulové cifry a a b platí, že když před n přidáme a a za n připíšeme b, bude výsledné číslo dělitelné číslem $\overline{ab}$. Může Anička takové číslo najít?

Úloha 7. (5 bodů)

Najděte všechny monické polynomy[1] f s celočíselnými koeficienty takové, že platí

$$p \mid 2 \cdot \big(f(p)!\big) + 1$$

pro nekonečně mnoho prvočísel p, pro která je $f(p) > 0$.

Úloha 8. (5 bodů)

Rozhodněte, zda existuje číslo a takové, aby pro nekonečně mnoho čísel n platilo:

$$n! + a \mid (2n)!$$

[1] Polynom $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ nazveme monickým, pokud $a_n = 1$.