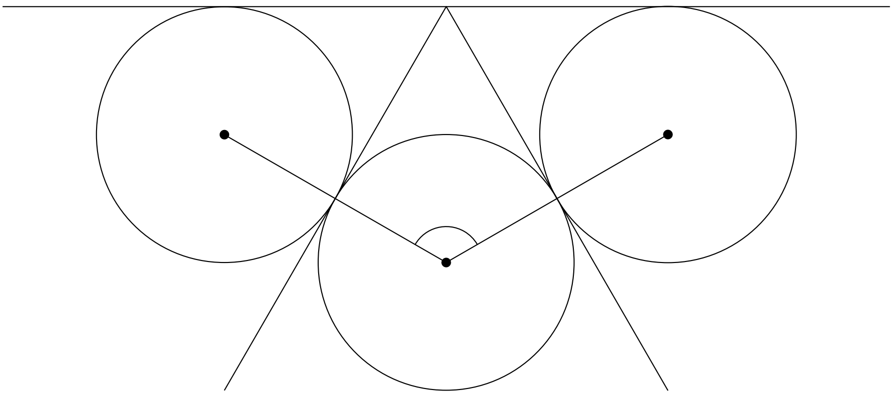
Tečny

2. jarní série Termín odeslání: 4. března 2019

Úloha 1. (3 body)

Petr si do sešitu namaloval takovýto obrázek tvořený třemi jednotkovými kružnicemi a jejich společnými tečnami, které procházejí jedním bodem. Všiml si, že krajní kružnice se dotýkají prostřední kružnice. Jakou velikost má vyznačený úhel?



Úloha 2. (3 body)

E.T. nakreslil do roviny tři jednotkové kružnice a tři přímky tak, aby žádné dvě kružnice ani žádné dvě přímky nesplývaly a každá přímka se dotýkala všech tří kružnic. Nalezněte nějaký možný obsah trojúhelníku vytvořeného ze středů těchto kružnic.

Úloha 3. (3 body)

Nechť $ABCD$ je lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice opsaná trojúhelníku BCD protne přímku DA v bodě E různém od D. Ukažte, že CB je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABE.

Úloha 4. (5 bodů)

Na straně AC trojúhelníku ABC leží bod X. Na stranách AB a BC nalezneme takové body P a Q, aby PX byla tečna ke kružnici opsané XBC a QX byla tečna ke kružnici opsané XBA. Ukažte, že přímka PQ je rovnoběžná s AC.

Úloha 5. (5 bodů)

Kružnice k a l se protínají ve dvou bodech, jeden z nich označme B. Tečna ke kružnici l procházející bodem B protíná kružnici k podruhé v bodě A. Analogicky tečna ke kružnici k procházející bodem B protíná kružnici l podruhé v bodě C. Označme M druhý průsečík kružnice k a přímky AC a N druhý průsečík kružnice l a přímky AC. Ukažte, že pokud body leží na přímce AC v pořadí A, N, M, C, pak platí $2|MN| < |AC|$.

Úloha 6. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě K. Označme M střed oblouku[1] BAC. Druhý průsečík přímky MK s kružnicí opsanou ABC označíme D. Tečny ke kružnici opsané ABC z bodů A a D se protínají v bodě T. Nechť R je průsečík kolmice na AK v bodě A s kolmicí na DK v bodě D. Ukažte, že body T, R a K leží na jedné přímce.

Úloha 7. (5 bodů)

Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k. Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k, body dotyku pojmenovala A a B. Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ. Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L. Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protla k podruhé v bodě T. Ukažte, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\sphericalangle PBT| = |\sphericalangle QLA|$.

Úloha 8. (5 bodů)

Buď ABC trojúhelník splňující $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA|$. Označme ω kružnici jemu opsanou. Nechť tečna k ω z bodu A protíná přímku BC v bodě E. Buď Ω kružnice procházející bodem B, které se přímka AC dotýká v bodě C. Nechť přímka AB podruhé protíná Ω v bodě F. Z bodu E vedeme tečnu k Ω s bodem dotyku K tak, aby body A a K byly na různých stranách od přímky BC. Označme M střed oblouku BC na ω neobsahujícího A. Ukažte, že $AFMK$ je tětivový čtyřúhelník.

[1] Obloukem BAC myslíme oblouk s koncovými body B a C procházející bodem A.