

Austrálie

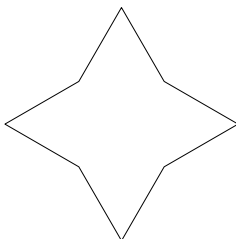
1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 1. ŘÍJNA 2018

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Na australské pláži se válí hvězdice, jejíž tvar vidíte na obrázku¹. Rozřežte ji čtyřmi přímkami na třináct částí.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Rodinka 2018 koalů leží na přímce, přičemž vzdálenost každých dvou sousedních je 1. Na jednom z krajních koalů sedí blecha. Dokažte, že blecha umí postupně kousnout každého koalu, pokud použije pouze skoky délky $1, 2, \dots, 2017$, každý právě jednou.

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

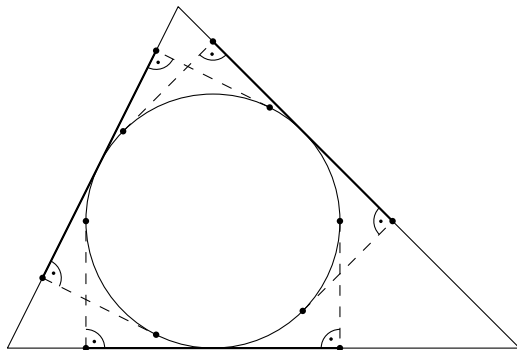
Na šachovnici 100×100 je rozmístěno 50 ježur, které se pohybují jako šachovní králové. Pak se na dalším neobsazeném políčku objeví Štěpán, který se pohybuje jako šachová věž, ježury však nemůže vyhazovat ani přeskakovat. Nejdříve se najednou pohne všech 50 ježur, poté Štěpán – to se opakuje, dokud není Štěpán vyhozen. Ukažte, že ať jsou ježury a Štěpán na začátku rozmístění jakkoli, existuje pro ježury strategie, se kterou Štěpána vždy vyhodí.

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Z vrcholu hory Uluru si Petr přinesl kámen s vyrytým tajuplným obrazcem. Je na něm trojúhelník a úsečky vzniklé kolmými průměty jeho kružnice vepsané na jednotlivé strany. Dokažte, že koncové body těchto průmětů leží všechny na jedné kružnici.

¹Na obrázku je čtverec s čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky na jeho stranách.



ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Marian na svém pozemku nakreslil tabulku se dvěma řádky a jedenácti sloupci. Na každé políčko spodního řádku postavil jednoho klokana. Klokany očísloval postupně zleva doprava jako $-5, -4, \dots, 4, 5$. Následně začal tleskat. Po každém tlesknutí právě jeden klokan přeskočil na některé políčko sousedící hranou s tím, na kterém stál. V žádném kroku nebyli dva klokani na jednom políčku. Kolikrát nejméně musel Marian tlesknout, aby na konci každý klokan stál na místě, na kterém na začátku stál klokan s opačným číslem?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Dingo, klokan a ptakopysek se potkali u limonády a bavili se o svých oblíbených prvočíslech d, k, p . Pak zjistili, že ta splňují vztah $\frac{d}{k} - \frac{4}{p+1} = 1$. Určete všechny možné trojice d, k, p .

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termít. Tito termítí byli v nějakém pořadí označeni čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Večer se každý termít nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Jediné, co termítí umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termítí se součtem čísel 2019.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Chrabrý Hedvules se vydal na dovolenou do Austrálie. Uprostřed buše potkal hydry sestávající ze spousty hlav, z nichž některé byly spojené krky². Poté, co na něj hydra zaútočila, praštil Hedvules hydry do jedné z jejích hlav. I stala se zvláštní věc: zmizely všechny krky vyrůstající z této hlavy, ale naopak z ní vyrostly krky do všech hlav, s nimiž tato hlava předtím nebyla spojena. Kolik takových ran mu určitě stačí na to, aby se hydra rozpadla na alespoň dvě části, když víme jen to, že hydra měla na začátku právě 100 krků?

²Každý krk vždy spojuje právě dvě hlavy.