Váhy

1. jarní série | Termín odeslání: 4. února 2019

Vážením na rovnoramenných vahách zjistíme, která strana je těžší, resp. že jsou obě stejně těžké. Na misky vah můžeme dávat i více než jeden předmět.

Úloha 1. (3 body)

Předměty stejných tvarů váží stejně. Seřaďte je podle váhy.

Úloha 2. (3 body)

Fíla do vrcholů pravidelného šestiúhelníka umístil závažíčka s vahami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 gramů (v tomto pořadí vedle sebe). Zlotřilá Hedvika ale v nestřeženém okamžiku dvě závažíčka prohodila a přiznala mu jen, že vyměnila nějaká v protilehlých vrcholech. Fíla by rád pomocí svých rovnoramenných vah zjistil která, ale zároveň je velmi líný, a tak chce vážit pouze jednou. Jak to má udělat?

Úloha 3. (3 body)

Rado má 2^n medailí zabalených ve stejných neprůhledných obalech. Polovina medailí je stříbrných a polovina je zlatých. Všechny medaile stejného typu váží stejně, přičemž zlaté jsou těžší. Michal by rád viděl nějakou zlatou medaili, ale Rado nechce otevřít víc než jeden obal. Jak ji může s jistotou najít na n vážení na rovnoramenných vahách?

Úloha 4. (5 bodů)

Martin má $N > 1$ sušenek. Všechny sušenky jsou stejně těžké až na jednu, která je otrávená a váží jinak, není ale známo, zdali více, nebo méně. Martin ji hledá pomocí rovnoramenných vah. Verča ho ovšem pozoruje a kdykoliv si je z dosavadního měření jistá, že nějaká sušenka není otrávená, okamžitě ji sní a Martin ji pak už nemůže používat k vážení. Martin chce najít otrávenou sušenku a zjistit, zdali je lehčí, nebo těžší než běžné sušenky. Pro která N umí postupovat tak, že se mu to i přes Verčino obžerství a libovolnou dávku smůly vždy podaří?

Úloha 5. (5 bodů)

Tonda má rovnoramenné váhy a 100 stejně vypadajících hůlek, z nichž přesně 30 je kouzelných. Každá kouzelná hůlka je lehčí než každá nekouzelná, ale hůlky stejného typu nemusí vážit stejně. Určete nejmenší N takové, že Tonda umí najít alespoň jednu zaručeně kouzelnou hůlku pomocí nanejvýš N vážení.

Úloha 6. (5 bodů)

Áďa našla 2000 plechovek, z nichž 1000 je plných a 1000 prázdných. Všechny plné váží 500 g a všechny prázdné 100 g. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách lze vždy vytvořit dvě stejně početné hromady plechovek (není potřeba použít všechny plechovky), aby každá hromada měla jinou váhu?

Úloha 7. (5 bodů)

Pavel má pět mincí, každou jinak těžkou, a kouzelné váhy se třemi miskami. Ty pro každou uspořádanou trojici mincí řeknou, jestli jsou uspořádané podle hmotnosti od nejlehčí po nejtěžší, nebo ne. Ukažte, že když bude mít Pavel smůlu, nebude schopen na devět vážení seřadit mince podle hmotnosti.

Úloha 8. (5 bodů)

Kuba má 3^{2n} mincí, mezi nimiž je jedna falešná – lehčí než ostatní, které všechny váží stejně. Dále má troje rovnoramenné váhy, z nichž dvoje fungují normálně a jedny ukazují náhodné výsledky. Ukažte, že Kuba umí na $3n+1$ vážení najít falešnou minci.