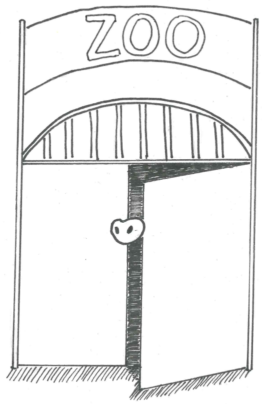
Pravděpodobnost II. – Žádné věže

Teorie pravděpodobnosti není nic jiného než selský rozum přeložený do řeči výpočtů.
Pierre Simon Laplace

Milý příteli,
vítáme Tě u druhého dílu seriálu o pravděpodobnosti!

Dříve než se pustíme do neprobádaných vod, bleskurychle si zopakujeme, co už známe z dílu prvního. Začali jsme představením základních kombinatorických pojmů. Ty nás i nadále budou provázet minimálně na každém druhém kroku.[1] Připomeňme si, že počet podmnožin množiny s n prvky je 2^n. Pro každý prvek množiny totiž máme nezávisle na těch ostatních dvě možnosti – buď ho do podmnožiny přidáme, nebo ne. Dále počet způsobů, kterak seřadit n objektů, je $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Možným uspořádáním také říkáme permutace. A konečně, počet způsobů, jak z n objektů vybrat nějakých k, je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tomuto výrazu se říká kombinační číslo.

Zásadním pravděpodobnostním pojmem je nezávislost. Dvojice nezávislých jevů se pozná podle toho, že je pravděpodobnost, že oba zároveň nastanou, rovna součinu jejich pravděpodobností. Nakonec jsme si v prvním díle vysvětlili, jak funguje podmíněná pravděpodobnost, která se hodí zejména, potřebujeme-li spočítat pravděpodobnost jevu, který nějakým způsobem závisí na jiných jevech. Také jsme si ve hvězdičkové části řekli, co dělat, když pracujeme s nekonečnými prostory, a zde se k nim znovu vrátíme (opět v nepovinné části).



[1] Jako věrný přítel nebo žvýkačka na podrážce boty; záleží na Tvém vztahu k nim.

V tomto díle jsou na programu dvě novinky. Nejprve si řekneme, jak se naše pravděpodobnostní znalosti dají překvapivě aplikovat na řešení úloh, které na první pohled s pravděpodobností vůbec nesouvisejí. Nenech se zaskočit tím, že takováto aplikace pravděpodobnosti působí značně nepravděpodobně. :-) Technice, kterou si za chvíli předvedeme, se říká pravděpodobnostní metoda. Jako druhou novinku zavedeme náhodné veličiny a ukážeme si, k čemu je dobré znát jejich průměrnou hodnotu. Naše znalosti pak použijeme pro vylepšení pravděpodobnostní metody.

Pravděpodobnostní metoda vůbec není jednoduchá, takže pokud se budeš ztrácet, přečti si nejprve kapitolu o náhodných veličinách, která na pravděpodobnostní metodě nezávisí. Ačkoli se Ti pravděpodobnostní metoda může hodit v řešení seriálových příkladů, v příštím díle na ni nebudeme navazovat. Nakonec opět podotýkáme, že pro pochopení nových pojmů není potřeba pokoušet se vyřešit všechny úlohy, ale je dobré se v každé sekci alespoň o několik úloh pokusit. Pokud se Ti to ovšem nebude moc dařit, vždy jsou tu pro Tebe nápovědy na konci seriálu.

Pravděpodobnostní metoda

Metoda v matematice je trik, který je použit více než jednou.
Ron Getoor

Jak jsme avizovali, na úvod si ukážeme, jak naše stávající znalosti použít v nezvyklém prostředí. Doteď jsme se totiž věnovali především úlohám, v nichž se pravděpodobnost přímo vyskytuje. Teď si ale ukážeme, že pravděpodobnost je ten správný trik i pro mnohé úlohy, které o pravděpodobnosti vůbec nemluví. Ilustruje to následující příklad, jehož překvapivé řešení následuje po pár odstavcích vysvětlujících, proč je těžké úlohu vyřešit jinak.

Úloha 1. Na soustředění přijelo dvacet čtyři účastníků, které je potřeba na závěrečnou hru rozdělit do dvou týmů. Týmy nemusí být stejně velké, jeden z nich by mohl obsahovat i všechny účastníky. Na soustředění už několik her proběhlo a organizátoři nechtějí, aby se týmy opakovaly: stanovili si tedy deset podmínek, přičemž každá z nich říká, že nějaká konkrétní šestice nemá být celá ve stejném týmu. Dokaž, že je možné účastníky rozdělit tak, aby všechny podmínky byly splněny.

Než budeš pokračovat ve čtení, zkus si nejprve nad úlohou popřemýšlet sám (sama). Nejpřirozenější způsob, jak k ní přistoupit, je snažit se nějak explicitně říct, jak budou oba týmy vypadat. Ale ouha: o deseti podmínkách toho moc nevíme, takže není vůbec jasné, jak týmy zkonstruovat. Jediné, co víme naprosto přesně, je to, jak budou vypadat týmy, které některou podmínku porušují, takže se tuto znalost pokusíme v řešení zužitkovat.

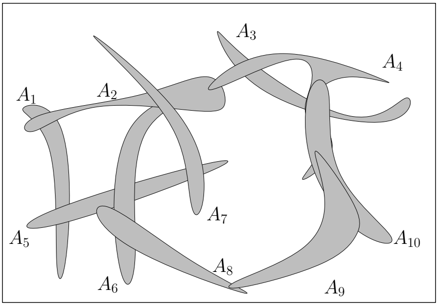
Vžij se do role ubohého organizátora, který má týmy sestavit. Podmínky mezi sebou mohou komplikovaným způsobem interagovat, což vede na nesmírně úmorné rozebírání spousty možností. Nějaký nekonstruktivní důkaz, který se tomuto rozboru vyhýbá elegantní oklikou, sice může prokázat, že vyhovující rozdělení existuje, ale jen velmi těžko dá přímý návod na jeho nalezení. Ze zoufalství může organizátor prostě tipovat rozdělení na týmy doufaje, že nakonec jedno z nich bude fungovat. Ověřit, zda dané rozdělení vyhovuje, či ne, je totiž naštěstí velmi jednoduché.

Poněkud nečekaně se tento na první pohled nezodpovědný přístup dá dotáhnout do podoby formálního důkazu. Můžeme si totiž představit pravděpodobnostní prostor, jehož elementární jevy jsou všechna možná rozdělení do týmů. Trik je následující: Dokážeme-li, že pro náhodně vybraný tým z tohoto prostoru budou všechny podmínky najednou splněny s nenulovou pravděpodobností, plyne z toho, že pro alespoň jeden elementární jev jsou všechny podmínky splněny. To ale znamená, že alespoň jedno rozdělení vyhovuje. A to přesně chceme dokázat!

Motto triku, který chceme využít, tedy je: *Pokud má náhodné zvíře ze ZOO rypáček s nenulovou pravděpodobností, pak v ZOO existuje zvíře, které má rypáček.* Pojďme nyní tuto (zcela triviální a zdánlivě nezajímavou) myšlenku využít ke spojení všech nastíněných nápadů a dořešení příkladu:

Řešení. Rozdělit účastníky na dva týmy vlastně znamená zvolit podmnožinu účastníků, kteří budou v prvním týmu. My tuto podmnožinu zvolíme náhodně. Zvolení takové podmnožiny si můžeme představovat buď jako náhodný výběr z 2^{24} možných podmnožin, nebo jako 24 nezávislých náhodných rozhodnutí, zda bude daný účastník v prvním týmu (volíme s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Druhý přístup se mnohem lépe hodí pro naše účely.

Nyní si zaveďme deset jevů $A_1, \ldots, A_{10}$, přičemž jev A_i zahrnuje elementární jevy odpovídající rozdělením, která jsou nepřípustná kvůli tomu, že i-tá ze zakázaných šestic je ve stejném týmu. Spočítejme nyní pravděpodobnosti toho, že nastane nějaký z těchto jevů. Aby takový jev nastal, musí být buď všech šest účastníků v prvním týmu, nebo všech šest účastníků ve druhém týmu. Pravděpodobnost každého z těchto jevů je díky nezávislosti 2^{-6}; celková pravděpodobnost toho, že nastane jev A_i, je díky disjunktnosti těchto dvou jevů rovna 2^{-5}.



Obrázek obsahující našich deset jevů naznačuje, že spolu můžou souviset nějakým dost komplikovaným způsobem. Žádný jev ale není moc pravděpodobný, takže jejich sjednocení (vše, co je šedou barvou) v žádném případě nepokryje celý pravděpodobnostní prostor (obdélník).

Stačí tedy spočítat, že $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}) < 1$. K tomu využijeme odhad z prvního dílu, že pravděpodobnost sjednocení je vždy nejvýše rovna součtu pravděpodobností. Jinými slovy, nic horšího, než že jsou všechny jevy disjunktní, se nemůže stát. Dostáváme tak

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{10}) \leq \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_{10}) \leq 10 \cdot 2^{-5} = \frac{10}{32}.$$

Pravděpodobnost, že ani jeden z jevů A_1 až A_{10} nenastane, je tedy alespoň $\frac{22}{32}$, což je rozhodně větší než nula. Tím je úloha vyřešena.

Pokud Tě tento důkaz zaskočil, nesmutni! Když autoři tohoto seriálu poprvé viděli podobný pravděpodobnostní důkaz, považovali jej za velký podvod. To proto, že takovýto důkaz by se přece dal stejně, ba možná dokonce jednodušeji, říct i bez pravděpodobnostních termínů, například takto:

Řešení. Máme 2^{24} možností, jak účastníky rozdělit do dvou týmů. Spočítáme, že 10 podmínek ze zadání dohromady zakazuje méně než 2^{24} možných rozdělení, a proto aspoň jedno bude vyhovovat.

Každá podmínka říká, že daných 6 lidí nesmí být ve stejném týmu. Kolik je možných rozdělení do dvou týmů takových, že daných 6 lidí je ve stejném týmu? Stačí si vybrat jeden ze dvou týmů, ve kterém bude oněch 6 lidí, a pro zbylých 18 si můžeme vybrat libovolně. Každá podmínka tedy zakazuje $2 \cdot 2^{18}$ možných rozdělení do týmů. Všech deset podmínek tak dohromady zakáže nejvýše $10 \cdot 2 \cdot 2^{18}$ rozdělení, což je ale méně než 2^{24}. Proto nějaké vhodné rozdělení existuje.

Všimni si, že tento důkaz je ve své podstatě úplně stejný jako ten pravděpodobnostní, jenom nepoužíváme termíny jako „klasický pravděpodobnostní prostor“ či „nezávislost jevů“. Možná je i intuitivnější, neboť přesně ukazuje, proč úloha platí: podmínky ze zadání toho prostě dohromady nemohou moc zakázat.

Proč si tedy dáváme tu práci a vysvětlujeme první řešení? Na danou otázku budeme odpovídat po zbytek tohoto dílu. Ukážeme si několik těžších úloh, jejichž řešení bude založeno na podobném principu. Později pak začneme používat složitější pravděpodobnostní pojmy. Čím složitější pojmy, tím těžší bude vymyslet „počítací řešení“, které jsme právě předvedli. Tím elegantnější Ti, doufejme, bude připadat řešení pravděpodobnostní. Zkus se ještě jednou zamyslet nad předešlou úlohou a polož si následující otázky:

Úloha 2.

(1) Co by se stalo, kdyby zakázané skupiny účastníků mohly být větší než 6?

(2) Co kdyby počet účastníků směl být větší než 24?

(3) Rozmysli si, že existují minimálně dva elementární jevy, které leží v průniku $A_1 \cap \cdots \cap A_{10}$ (obrázek jevů tedy není moc přesný). Na základě toho vyřeš Úlohu 1 pro 32 podmínek místo 10.

(4) (poučná) Co by se stalo, kdybychom požadovali, aby oba týmy byly stejně velké, a v řešení bychom tedy místo pravděpodobnostního prostoru všech 2^{24} podmnožin pracovali s prostorem všech $\binom{24}{12}$ podmnožin velikosti 12? V tomto případě se neboj použít kalkulačku.

Použití pravděpodobnostní metody si můžeš ozkoušet na následujících úlohách. Podobně jako vzorový příklad se dají vyřešit i prostým počítáním možností. Přesto však doporučujeme použít pravděpodobnost, i pokud je Ti používání pravděpodobnostních úvah zatím pořád trochu proti srsti; slibujeme[2], že se Ti budou zkušenosti s ní v budoucnu velmi hodit.

Ještě předtím si dovolíme krátkou vsuvku. Základním trikem, který se zpravidla používá při řešení pravděpodobnostní metodou, je prostinký, leč značně užitečný odhad pravděpodobnosti sjednocení jevů pomocí součtu odpovídajících pravděpodobností[3], tedy

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n).$$

Stručný návod, jak řešit pravděpodobnostní metodou následující úlohy[4], je tedy:

(1) Vyber si, co budeš volit náhodně; někdy se totiž nabízí víc možností. Pak si rozmysli, jak vypadá pravděpodobnostní prostor odpovídající této volbě.

(2) Jak v rámci tohoto pravděpodobnostního prostoru vypadají podmínky, které musíš splnit? Každou podmínku bude vyjadřovat nějaký jev, který odpovídá tomu, že *nebyla* splněna.

(3) Spočítej (nebo aspoň odhadni) pravděpodobnosti těchto jevů.

(4) Odhadni shora pravděpodobnost sjednocení těchto jevů (tedy pravděpodobnost toho, že nastal alespoň jeden tento jev) pomocí součtu jejich pravděpodobností.

(5) Ověř, že součet pravděpodobností je ostře menší než jedna; pokud náhodou není, tak zkontroluj všechny svoje výpočty, a pokud to stále nefunguje, vrať se k bodu (1).

(6) Všechny podmínky budou splněny s nenulovou pravděpodobností, takže existuje volba, která všechny podmínky splňuje. Hotovo!

Úloha 3. Chceme rozdělit skupinu PraSátek na čtyři týmy. Máme přitom podmínky typu „z této skupinky PraSátek o velikosti n musí být alespoň jedno PraSátko v každém týmu“. Dokaž, že je-li podmínek méně než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, lze PraSátka rozdělit požadovaným způsobem.

Obecně platí, že vždy chceme pracovat s co nejjednodušším pravděpodobnostním prostorem, aby se s ním dobře počítalo. Překvapivě často totiž i poměrně „hloupé“ metody dají dostatečně silný odhad. Například pokud se v následujících úlohách rozhodneš, že budeš volit k náhodných objektů z n, tak je nejintuitivnější vybrat náhodnou k-tici, což se dá udělat $\binom{n}{k}$ způsoby. Mnohdy se však vyplatí provést místo toho k nezávislých náhodných výběrů, takže máš n^k možných výsledků a některý objekt může být vybrán vícekrát. Počítání bude nicméně jednodušší a úlohy obvykle povolují i taková řešení, ačkoli vedou na trochu horší odhad.

[2] Nebo vyhrožujeme – záleží na Tvém úhlu pohledu.

[3] V angličtině (a často i v češtině) se mu říká *union bound*.

[4] Kromě té, která je označená jako těžká. Není těžká pro nic za nic.

Úloha 4. V matematické soutěži řešilo 200 studentů šest úloh. Víme, že každou úlohu vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokaž, že můžeme vybrat dvojici studentů tak, aby dohromady vyřešili všechny úlohy. (IMC 2002)

Úloha 5. Protáhni se. Pokud je poblíž příroda, jdi se projít a zaposlouchej se do cvrlikání ptáků. Pokud si toto čteš při hodině pod lavicí, dojdi si na záchod.

Úloha 6. V jazykové škole je 500 učitelů, kteří vyučují dohromady $2n$ jazyků, přičemž každý učitel ovládá alespoň n jazyků. Ukaž, že můžeme vybrat nejvýše 14 jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Úloha 7. (počítací) Na školní výlet jede 90 dětí, přičemž každé z nich má alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokaž, že děti můžeme rozdělit do tří 30členných skupin tak, že každé dítě bude mít ve své skupince alespoň jednoho kamaráda. (Celostátní kolo MO 2011/2012)

Úloha 8. (těžká) Řekneme, že permutace množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ je *roztomilá*, pokud se některé dva po sobě jdoucí prvky liší právě o n. Ukaž, že roztomilých permutací je alespoň tolik jako neroztomilých. (IMO 1989)

Zatímco pravděpodobnostní pojmy, se kterými jsme pracovali v předchozím díle, byly matematikům známé již několik set let, pravděpodobnostní metoda je mnohem mladší: ve druhé polovině dvacátého století ji zpopularizoval známý maďarský matematik Paul Erdős[5]. Následující překvapivý fakt, který pro Tebe formulujeme jako úlohu, je jen jedním z mnoha, které Erdős pomocí pravděpodobnostní metody dokázal.

Úloha 9. (těžká) Na večírek přišlo $2^{n/2}$ hostů. Každí dva se buď znají, nebo neznají (známosti jsou vzájemné). Dokaž, že se mohlo stát, aby se na večírku nevyskytlo ani n lidí, kteří se všichni navzájem znají, ani n lidí, kteří se všichni navzájem neznají.

Proč je tento fakt tak překvapivý? Zkus sám (sama) najít co největší večírek, kde neexistuje ani n lidí, kteří se všichni znají, ani n lidí, kteří se všichni neznají. Není tak těžké dosáhnout velikosti $(n-1)^2$ tak, že pozveme $n-1$ skupinek o velikosti $n-1$ takových, že hosté uvnitř každé skupinky se všichni znají, ale mimo skupinky se nikdo nezná. Na první pohled ale vůbec není jasné, jestli jde nějaký větší večírek najít. Předchozí úloha však tvrdí, že je možné najít večírek o velikosti dokonce $2^{n/2}$, což je pro dostatečně velké n mnohem více než pouhé $(n-1)^2$: například pro $n = 100$ je první výraz přibližně 10 000, zatímco ten druhý je přibližně 1 000 000 000 000 000. Navíc z poctivého výpočtu plyne, že pro $n = 100$ má alespoň 99,999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999 99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999998 procent[6] večírků s $2^{100/2}$ účastníky požadovanou vlastnost. Přesto je těžké nějaký konkrétní popsat! Úloha se tak trochu podobá příslovečnému hledání sena v kupce sena. Kupka obsahuje zatraceně málo jehel, tedy večírků, kde najdeme 100 lidí, kteří se navzájem znají, nebo 100 lidí, kteří se navzájem neznají. Na druhou stranu, když saháme do kupky, tedy pokoušíme se sestrojit nějaký večírek s požadovanou vlastností, taháme samé jehly. Pravděpodobnostní metoda elegantně tento problém řeší tím, že pouze dokáže, že uvnitř kupky nějaké seno musí být.

Rovněž platí, že pokud na večírek přijde 4^n lidí, určitě najdeš n takových, kteří se buď všichni

[5] Paul (maďarsky Pál) Erdős (1913–1996) proslul tím, že za svůj život vyřešil obrovskou spoustu problémů a spolupracoval s podobně ohromným počtem lidí.

[6] Seriózní vědci samozřejmě takovéto zápisy čísel nepoužívají, protože jsou nepraktické. Hodí se leda tak k tomu, když chcete někoho šokovat, o což jsme teď právě usilovali. Ty se nás prosím ve svých řešeních šokovat nesnaž a piš radši 10^{15} či $100(1-10^{-143})$ než ty naše zrůdy.

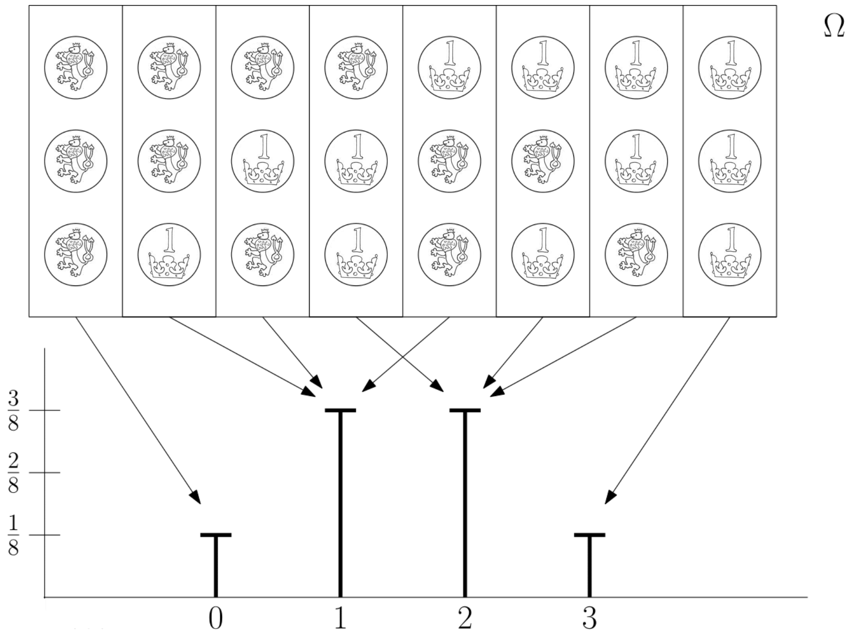
znají, nebo všichni neznají. Tomuto faktu se říká Ramseyova věta[7] .

Náhodné veličiny

Doufáme, že sis na předchozích příkladech osvěžil(a), jak fungují pravděpodobnostní prostory. Nyní je na čase předvést si nový koncept. Podobně jako u pravděpodobnostních prostorů či nezávislosti však vlastně nebudeme dělat nic jiného, než exaktně formulovat věci, které jsou Ti asi intuitivně docela jasné.

Výsledkem pravděpodobnostních pokusů je obvykle číslo. Proto i elementární jevy našeho prostoru jsou často čísla – kupříkladu v případě hodu kostkou byla naším prostorem množina čísel $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Pokud jsou skutečně prvky prostoru čísla, můžeme dále klást zvídavé otázky, třeba: „Jaký je průměrný výsledek pokusu?“ Třeba v našem příkladu s kostkou je aritmetický průměr možných výsledků roven $\frac{1+2+\cdots+6}{6} = 3{,}5$ ok. Jinými slovy, při průměrném hodu padne 3,5 ok. Samozřejmě 3,5 ok nikdy padnout nemůže, ale intuice nám velí očekávat, že pokud hodíme kostkou stokrát, celkový počet ok se bude pohybovat okolo 350.

Ne vždy je ale náš prostor takto jednoduchý. Uvažme třeba prostor odpovídající hodu třemi mincemi. V takovém případě máme $2^3 = 8$ možných výsledků. Řekněme, že nás zajímá, kolikrát padla panna. Prostým výčtem možností zjišťujeme, že s pravděpodobností $\frac{1}{8}$ nepadla žádná a s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ padla jedna panna. Dále s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ padly dvě panny a s pravděpodobností $\frac{1}{8}$ padly tři panny.



Nyní nás opět může zajímat, kolik panen padne v průměru, hodíme-li třikrát mincí. V takovém případě buď budeme počítat průměr ze všech osmi možných výsledků, nebo si ušetříme práci a použijeme vážený průměr, tedy každý možný výsledek vynásobíme jeho pravděpodobností. Dostáváme,

[7]Frank Ramsey (1903–1930) touto větou založil obor, kterému se dnes říká Ramseyova teorie.

že průměrný počet panen je $\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3+6+3}{8} = 1{,}5$. To je zcela v souladu s naší intuicí, protože v jednom hodu mincí průměrně padne 0,5 panny, takže ve třech hodech očekáváme $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ panny.

Ačkoli nás tento příklad na začátku předchozího dílu vedl k zavedení pravděpodobnosti, vlastně zatím nemáme žádný způsob, jak zformalizovat úvahu „třikrát hodíme mincí a pokaždé v průměru padne 0,5 panny, takže dohromady v průměru padne 1,5 panny". Neboj, za chvíli se to změní!

Úloha 10.

(1) Rozmysli si, že hodíme-li n mincemi, je pravděpodobnost, že padne k panen, stejná jako pravděpodobnost toho, že padne $n-k$ panen.
(2) Na základě toho spočti průměrný počet panen, které padnou při hodu n mincemi.

Náhodné veličiny jsou způsob, jak se vypořádat se situacemi, kdy máme složitější prostor, ale vlastně nás z něj zajímá jen jeden jeho aspekt, tedy chceme každý elementární jev nahradit nějakým číslem.

Formálně je náhodná veličina funkce, která každému prvku prostoru přiřadí nějaké reálné číslo.

Definice. Mějme konečný pravděpodobnostní prostor Ω. Náhodná veličina X na prostoru Ω je libovolná funkce z Ω do $\mathbb{R}$.

Náhodné veličiny je zvykem značit velkými písmeny z konce abecedy, tedy X, Y, Z. V případě hodu třemi mincemi můžeme zavést náhodnou veličinu, která pro každou trojici hodů říká, kolik panen celkově padlo. Tento příklad možná působí až příliš jednoduše. Pravděpodobnostní prostory jsou ale často mnohem složitější. Představ si třeba, že zajdeš do knihovny a půjčíš si tam náhodnou knížku. Tomuto pokusu odpovídá nesmírně složitý prostor obsahující všechny knihy v knihovně. Třeba nás ale zajímá jen to, jaký je průměrný počet stránek půjčené knížky nebo kolik je v ní obrázků. Potom se hodí pro tento parametr zavést náhodnou veličinu.

Všimni si, že pokud se díváme na náhodnou veličinu na obrázku, jsou tyto tři elementární jevy $\omega_1 =$ (panna, orel, orel), $\omega_2 =$ (orel, panna, orel) a $\omega_3 =$ (orel, orel, panna) nerozlišitelné – všechny dávají tu samou hodnotu. Vzhledem k tomu, že náhodná veličina je funkce, můžeme také psát $X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1$. Jakmile zavedeme náhodnou veličinu, nabízí se seskupit si myšlenkově elementární jevy daného prostoru podle toho, jaký pro ně dá naše náhodná veličina výsledek.

Jev, který je tvořen právě těmi elementárními jevy, pro které dává veličina X výsledek x, se značí prostě „$X = x$". V našem případě s náhodnou veličinou X, jejíž hodnotou je celkový počet panen, jevem $X = 1$ myslíme přesně množinu trojic (panna, orel, orel), (orel, panna, orel) a (orel, orel, panna). Můžeme pak psát $\mathrm{P}(X = 1) = \frac{3}{8}$. Zcela obdobně pak můžeme definovat jevy $X \geq x$ atd. V našem příkladě tak $\mathrm{P}(X \geq 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, neboť jev $X \geq 2$ je sjednocením dvou disjunktních jevů $X = 2$ a $X = 3$.

Tento způsob práce s náhodnými veličinami přesně odpovídá histogramu na obrázku. Když pracujeme s náhodnou veličinou, často můžeme v jistém smyslu zapomenout na to, jak vypadá původní pravděpodobnostní prostor. Stačí umět spočítat pravděpodobnosti jevů typu $X = x$.

S náhodnými veličinami budeme později chtít pracovat podobně jako s normálními čísly, speciálně je budeme chtít sčítat. Dvě náhodné veličiny můžeme sečíst pouze tehdy, jsou-li obě definovány pro stejný pravděpodobnostní prostor. Součtem $X_1 + X_2$ pak prostě myslíme veličinu, která pro každý elementární jev ω dává $X_1(\omega) + X_2(\omega)$. Třeba v našem případě s hodem kostkou, kde X značí počet ok, která padla (tedy jsou na horní stěně kostky), můžeme také definovat veličinu Y značící, kolik ok je na dolní stěně kostky. Obě jsou definované pro stejný pravděpodobnostní prostor, takže je můžeme sečíst. Výsledkem je poněkud nudná náhodná veličina $X + Y$, která pro každý možný jev dává hodnotu 7.

Stejně jako součet můžeme definovat i jiné operace jako $c \cdot X$ (hodnoty X vynásobíme konstantou c), $X_1 \cdot X_2$ nebo $1/X$. V našem příkladu z knihovny tak kupříkladu můžeme uvážit počet slov a počet kapitol v náhodně vybrané knize, což jsou dvě náhodné veličiny. Po jejich vydělení dostaneme průměrný počet slov na kapitolu, což je opět náhodná veličina nabývající různých hodnot pro různé knížky.

Úloha 11.

(1) Pro jaké náhodné veličiny X platí $X + X = 2 \cdot X$?

(2) Pro jaké náhodné veličiny X platí $X \cdot X = X$?

Střední hodnota náhodné veličiny

Lottery: a tax on people who are bad at math.
Ambrose Bierce

Když jsme dávali příklady toho, k čemu jsou dobré náhodné veličiny, ukazovali jsme, jak spočítat vážený aritmetický průměr hodnot náhodné veličiny. Tomuto „průměru náhodné veličiny“ se říká **střední hodnota**[8].

V případě klasického pravděpodobnostního prostoru (např. hodu kostkou) je střední hodnotou normální aritmetický průměr. Pokud ale pracujeme s obecným konečným prostorem (a obvykle i při práci s klasickým prostorem), používáme vážený aritmetický průměr, tedy sčítáme možné výsledky vynásobené jejich pravděpodobností.

Definice. Mějme náhodnou veličinu X definovanou pro prostor $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.[9] Potom střední hodnotou X myslíme výraz

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(\omega_1) \cdot X(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) \cdot X(\omega_2) + \cdots + \mathrm{P}(\omega_n) \cdot X(\omega_n).$$

V případě klasického pravděpodobnostního prostoru tak speciálně dostáváme $\mathrm{E}(X) = (X(\omega_1) + {} + X(\omega_2) + \cdots + X(\omega_n))/n$. Když jsme motivovali střední hodnotu tím, že jsme spočítali střední počet padlých panen při hodu třemi mincemi, bylo pro výpočet snazší elementární jevy seskupit podle toho, jaký výsledek dala náhodná veličina. Nabývá-li obecně náhodná veličina hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_m$, můžeme použít následující vzoreček:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = x_1) \cdot x_1 + \mathrm{P}(X = x_2) \cdot x_2 + \cdots + \mathrm{P}(X = x_m) \cdot x_m.$$

Úloha 12. Rozmysli si, že tento vzoreček opravdu plyne z definice střední hodnoty.

Úloha 13. Najdi náhodnou veličinu X nabývající kladných hodnot, pro kterou platí $\mathrm{E}(X) \geq 2$ a zároveň $\mathrm{E}(1/X) \geq 2$.

K čemu je střední hodnota dobrá v praxi? Abychom si odpověděli na tuto otázku, vraťme se do poloviny sedmnáctého století, kdy byly základy teorie pravděpodobnosti poprvé zformulovány v korespondenci dvou věhlasných francouzských matematiků: Pierra de Fermata[10] a Blaise Pascala[11]. Teorii vymysleli, aby odpověděli na zvídavé otázky jistého francouzského šlechtice, který si vydělával hraním hazardních her. Jednou z her, která šlechtice zajímala, byla následující:

Hra. Hodíme 24krát dvěma kostkami. Pokud alespoň jednou padnou dvě šestky, vyhrajeme jeden livre[12]. Pokud ne, prohrajeme jeden livre.

Vyplatí se hrát tuto hru? To zjistíme, když porovnáme pravděpodobnost výhry s pravděpodobností prohry.

[8] V angličtině se používá *expected value*, což v doslovném překladu znamená očekávaná hodnota.

[9] Jinými slovy, náš pravděpodobnostní prostor Ω sestává z elementárních jevů $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

[10] Pierre de Fermat (1601–1665) je znám jako autor Malé a Velké Fermatovy věty.

[11] Blaise Pascala (1623–1662) asi znáš hlavně z fyziky, ačkoli se Pascal věnoval i matematice nebo teologii. Také sestrojil jednu z prvních mechanických kalkulaček.

[12] Jedná se o název historické měny, která byla ve Francii používána od 9. století do roku 1795.

Úloha 14. Vyjádři pravděpodobnost výhry v této hře.

Pravděpodobnost výhry činí v tomto případě asi 49 procent, takže se hru hrát nevyplatí, i když to na první pohled není vůbec jasné. Výherní částka však nemusí vždy být rovna proherní. Zamysli se nad následující hrou.

Hra. Hodíme si poctivou kostkou. Pokud padne $1, 2, 3$ nebo 4, dostaneme 1 Kč. Jinak prohrajeme 10 Kč.

Chtěl(a) bys hrát takovouto hru? Troufáme si tvrdit, že ne, intuice totiž říká, že i když je pravděpodobnost výhry dvakrát větší než pravděpodobnost prohry, při prohře zaplatíme desetkrát víc, než kolik vyděláme při výhře.

A přesně v této situaci vstupuje na scénu střední hodnota náhodné veličiny. Je-li náhodnou veličinou náš zisk (prohrajeme-li peníze, prostě to znamená, že zisk je záporný), střední hodnota nám říká, jaký je „očekávaný" zisk jedné takové hry. Pokud bychom tedy danou hru hráli tisíckrát za sebou, očekáváme, že náš výdělek bude činit přibližně $1000 \cdot \mathrm{E}(X)$. Dalo by se říct, že zajímavost i záludnost hazardních her se skrývá v tomto vágním „přibližně": sice si můžeš spočítat, jaký bude očekávaný výdělek, ale nikdo Ti nezaručí, že ho skutečně dosáhneš, protože mohou nastat i extrémně nepravděpodobné jevy.

Pro druhou z uvedených her tak prostě spočítáme, že střední hodnota výdělku X je $\mathrm{E}(X) = \frac{4}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot (-10) = \frac{-16}{6}$. Ačkoli je tedy pravděpodobnost výhry větší než pravděpodobnost prohry, lze očekávat, že budeme-li hrát dostatečně dlouho, ztratíme v průměru necelé 3 Kč každou hru.

Na zákonech pravděpodobnosti si postavila živobytí kupříkladu kasina. Pokud se v kasinu rozhodneš hrát nějakou hru založenou na náhodě, můžeš se spolehnout na to, že vypočítáš-li si střední hodnotu svého výdělku, bude vždy záporná.

Úloha 15. Při ruletě se kulička kutálí po obvodu kola, dokud neskončí v jedné z 37 přihrádek očíslovanými od 0 do 36 včetně. Uvažme zjednodušenou variantu rulety, kde sudá čísla kromě nuly jsou černá, lichá čísla jsou červená a nula zelená. Dají se s ní hrát kupříkladu následující hry:

(1) Vsadíš si x Kč na to, že kulička skončí na černém políčku. Pokud se tak stane, vrátí se Ti $2 \cdot x$ Kč. Jinak se Ti nevrátí nic.

(2) Vsadíš si x Kč na to, že kulička skončí na konkrétním políčku. Pokud se sázka vydaří, vrátí se Ti $36 \cdot x$ Kč. Jinak se Ti nevrátí nic.

Ověř, že v obou případech je střední hodnota výdělku záporná.

Právě díky principům pravděpodobnosti fungují i pojišťovny. Pojišťování se je totiž vlastně také forma hazardu. Můžeš si být jistý (jistá), že částka, kterou po Tobě bude chtít pojišťovna za pojištění proti povodni, bude zaručeně větší než pravděpodobnost povodně vynásobená škodou, která nastane, pokud povodeň opravdu přijde.

Přesto máme o pojišťování poněkud jiné smýšlení než o hazardu. Jeden důležitý rozdíl je v tom, že povodně nepřicházejí moc často, ale když přijdou, napáchají obvykle velké škody. Nám tak nevadí, že si platíme za to, že v případě nepravděpodobné události nepřijdeme na mizinu.

Pokud se Ti někdy v budoucnu přihodí, že budeš vlastnit hotel, asi se Ti vyplatí jej pojistit proti živelné pohromě, vypuknutí nakažlivé nemoci apod. Pokud se Ti ale někdy v budoucnu přihodí, že budeš vlastnit tisíce hotelů po celém světě, vzpomeň si na tuto kapitolu[13] a uvědom si, že se nevyplatí pojišťovat jednotlivě každý hotel. Každým rokem sice pravděpodobně několik hotelů postihne nějaká pohroma, ale ušlý zisk bude více než vyvážen výdělkem zbylých hotelů. Kdybys místo toho každý hotel pojistil(a), sice by Ti pojišťovna v případě pohromy zaplatila ušlý zisk, ale dohromady bys zaplatil(a) víc, než kolik bys dostal(a).[14]

Sumační notace

Dříve než budeme moci pokračovat ve zkoumání náhodných veličin, zavedeme si nové značení, které

[13] A na nás.

[14] Tomuto principu se říká samopojištění.

je k nezaplacení, jakmile je potřeba zapisovat složitější součty. To bude brzy i náš případ.

Celkem často se stává, že chceme sečíst nějaký velký počet čísel, třeba všechna přirozená čísla od 1 do 100. V takovém případě napíšeme prostě jen $1+2+\cdots+100$ a předpokládáme, že každý pochopí, co tím myslíme. Někdy dokonce počet sčítanců ani neznáme předem; třeba když sčítáme čísla od 1 do n, zapíšeme to prostě jako $1+2+\cdots+n$. V předchozím díle v kapitole o nekonečných prostorech jsme se dokonce setkali s nekonečnými součty, což vedlo k výrazům jako $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$.

Tento trojtečkový zápis je pohodlný a skvěle funguje pro jednoduché případy. Nicméně má i své problémy. Může stát, že existuje víc než jedna rozumná interpretace takového zápisu, což může vést k nedorozuměním: například $3+5+7+\cdots+97$ může znamenat součet všech lichých čísel od 3 do 97, ale stejně tak dobře to může být součet všech lichých prvočísel menších než 100. Těžce spoléháme na lidskou intuici, protože vlastně neexistuje žádná jednoznačně správná interpretace tří teček, takže i nejjednodušší výrazy jako $1+2+\cdots+100$ oplývají jistou nejednoznačností.

Taky se nám může stát, že místo posloupnosti budeme sčítat čísla v nějaké tabulce. Pak začíná být intuitivní zápis nepřehledný a komplikovaný, protože tam těch trojteček zkrátka je trochu moc. V úplně obecném případě však ani nevíme, jestli se množina čísel, která sčítáme, dá pěkně představit jako posloupnost, tabulka nebo něco úplně jiného. Příkladem je třeba naše definice střední hodnoty náhodné veličiny. Tu spočteme tak, že sečteme výrazy $\mathrm{P}(\omega)\cdot X(\omega)$ pro všechna $\omega\in\Omega$.

Hodil by se tedy nějaký elegantnější zápis pro „podívej se na všechny $\omega\in\Omega$, spočti, kolik je $\mathrm{P}(\omega)\cdot X(\omega)$, a všechna tahle čísla sečti".

Takový zápis si teď představíme. Základním kamenem nové notace je velké řecké písmeno sigma: Σ.[15] Výrazu, který s jeho pomocí vytvoříme, pak říkáme **suma**. Notaci používáme následovně: pokud chceme prostě sečíst čísla od a do b včetně, napíšeme

$$\sum_{i=a}^{b} i\,.$$

Tím myslíme: Představ si, že proměnná i je na začátku a a my k ní v každém kroku přičteme jedna, než se dostaneme na b. V každém kroku (včetně toho, kdy $i=b$) si navíc připočteme i k výslednému součtu. Pokud bychom tak chtěli sečíst lichá čísla od 3 do 97, napíšeme prostě $\sum_{i=1}^{48}(2i+1)$. Tato notace totiž znamená součet $(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+\cdots+(2\cdot48+1)=3+5+\cdots+97$. Pokud chceme sčítat hodnoty nějaké obecné funkce f, napíšeme prostě $\sum_{i=a}^{b} f(i)$.

Novou proměnnou, kterou jsme zavedli v Σ notaci, je zvykem značit i, j nebo k. Samozřejmě ji můžeš značit jak chceš, pokud se tak nejmenuje nějaká jiná proměnná, kterou už používáš. Pozor, tato nová proměnná má význam pouze „uvnitř sumy"!

Úloha 16. Rozmysli si, že

(1) $\sum_{i=a}^{b}(f(i)+g(i))=\sum_{i=a}^{b} f(i)\;+\;\sum_{i=a}^{b} g(i)$,

(2) $\sum_{j=a}^{b} c\cdot f(j)=c\cdot\sum_{j=a}^{b} f(j)$,

(3) $\sum_{k=a}^{b} c=(b-a+1)\cdot c$.

Nová notace na první pohled může působit zbytečně složitě, ale její výhoda se dostaví, hned jak se rozhodneme sčítat něco složitějšího než posloupnost, třeba tabulku. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Úloha 17. V tabulce 10×10 jsou napsána přirozená čísla tak, že v políčku na i-tém řádku a j-tém sloupečku je napsáno číslo $i+2\cdot j$. Jaký je součet čísel v tabulce?

Úloha se dá vyřešit různými způsoby. My si ukážeme přístup „prostě to sečtu", který je velice snadný, pokud ses již se sumami trochu sžil(a).

[15] V řecké abecedě Σ odpovídá „S", jež je počátečním písmenem latinského *summa*. Mimochodem, jestli ses už někdy setkal(a) se znakem pro integrál $\int$, asi už tušíš, proč připomíná protáhlé písmeno S.

Řešení. Pro i-tý řádek si napíšeme součet čísel na tomto řádku jako $\sum_{j=1}^{10}(i+2\cdot j)$. Celkový součet všech čísel v tabulce je tak

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}(i+2\cdot j)\,.$$

Z předešlé úlohy už víme, že vnitřní sumu můžeme upravit jako

$$\sum_{j=1}^{10}(i\ +2\cdot j)=10\cdot i\ +2\cdot\sum_{j=1}^{10}j.$$

Snadno spočteme, že $\sum_{j=1}^{10} j = 55$. Můžeme tak dosadit do výrazu s dvojitou sumou a spočítat

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}(i\ +2\cdot j)=\sum_{i=1}^{10}(2\cdot 55+10\cdot i)=10\cdot 2\cdot 55+10\cdot\sum_{i=1}^{10}i\ =1100+10\cdot 55=1650.$$

Všimni si, že nezáleží na tom, jestli se rozhodneme čísla v tabulce sčítat po řádcích, nebo po sloupečcích (my sčítali po řádcích). To zní jako nevinný a zcela triviální fakt, ale jedná se o jeden z největších triků v matematice[16], který zanedlouho také nejednou použijeme.

Sumy se navíc na rozdíl od trojtečkové notace dají použít i ve chvíli, kdy sčítáme přes netradiční množiny, jako třeba lichá prvočísla menší než 100. V takovém případě se obvykle prostě napíše

$$\sum_{\substack{p \text{ je prvočíslo,}\\ 3\le p\le 100}} p.$$

Jak jsme již naznačili, pro nás budou sumy nesmírně užitečné při počítání s náhodnými veličinami, například střední hodnota se spočítá tak, že pro všechny elementární jevy ω našeho prostoru sečteme $\mathrm{P}(\omega)\cdot X(\omega)$. V naší notaci pak prostě píšeme

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathrm{P}(\omega)X(\omega).$$

Tím myslíme, že daný výraz sečteme pro úplně všechny ω, pro která platí $\omega\in\Omega$.

Jak víš, střední hodnotu také můžeme počítat tak, že seskupíme elementární jevy podle toho, jaký dávají výsledek, a spočítáme vážený průměr. Označíme-li obor hodnot X jako $H(X)$, můžeme psát $\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in H(X)}\mathrm{P}(X=x)\cdot x$.

Linearita střední hodnoty

Náhodné veličiny jsou nesmírně užitečným nástrojem, ale aby se projevily v plné síle, musíme jich obvykle mít vícero. V této kapitole si ukážeme, jak pracovat s několika náhodnými veličinami. Základním nástrojem je takzvaná linearita střední hodnoty, což není nic jiného než pozorování, že střední hodnota součtu několika veličin je rovna součtu jejich středních hodnot.

Vraťme se nyní k našemu pravděpodobnostnímu prostoru odpovídajícímu třem hodům mincí. Uvažovali jsme náhodnou veličinu X, která odpovídá počtu panen, které padly. Spočetli jsme, že střední hodnota X je 1,5.

Jak jsme si také řekli, výsledek 1,5 je velice přirozený: pokud si totiž hodíme jen jednou mincí, střední hodnota počtu panen bude 0,5. Při hodu třemi mincemi tak očekáváme, že střední hodnota bude třikrát větší.

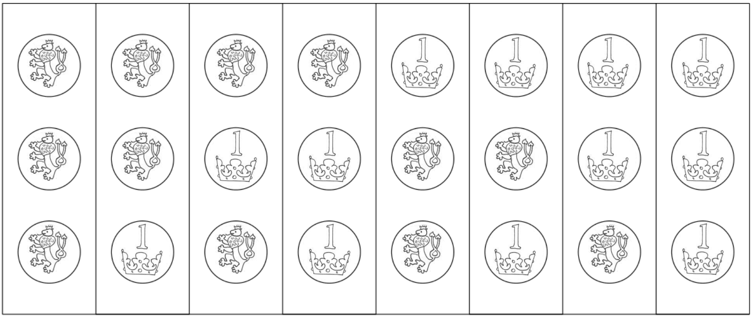
[16] A také v účetnictví před příchodem počítačů: chceš-li si být opravdu jistý (jistá), že jsi správně sečetl(a) výplaty deseti zaměstnanců za dvanáct měsíců, sečti nejprve výplaty v tabulce po zaměstnancích a pak po měsících.

To je velice intuitivní myšlenka, ale i takové se musejí dokázat. Z definice náhodné veličiny nic takového totiž neplyne! Veličina „počet panen při hodu třemi mincemi“ je dokonce definovaná na jiném prostoru než veličina „počet panen při hodu jednou mincí“. Ukažme si nyní jednoduchý důkaz této myšlenky řečený v jazyce náhodných veličin.

Zavedeme si na našem osmiprvkovém prostoru tři náhodné veličiny X_1, X_2 a X_3, kde X_i říká, kolik panen padlo v i-tém kroku. Například X_1 je rovno jedné pro čtyři elementární jevy (panna, panna, panna)[17], (panna, panna, orel), (panna, orel, panna) a (panna, orel, orel). Jinak je X_1 rovno nule.

Všimni si, že pro každý jev ω platí $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$. Například pro jev $\omega = (\text{panna}, \text{orel}, \text{panna})$ je $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 0$, $X_3(\omega) = 1$ a $X(\omega) = 1 + 0 + 1 = 2$. To v našem zápisu zapisujeme jako $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Ω



$X_1:$	0	0	0	0	1	1	1	1
$X_2:$	0	0	1	1	0	0	1	1
$X_3:$	0	1	0	1	0	1	0	1
$X = X_1 + X_2 + X_3:$	0	1	1	2	1	2	2	3

Dále si všimni, že $\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \mathrm{E}(X_3) = 0{,}5$. A teď přijde trik: Protože $X = X_1 + X_2 + X_3$, můžeme vyjádřit střední hodnotu X jako součet středních hodnot veličin X_1, X_2 a X_3, který ale snadno spočítáme:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot X(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot (X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega))\\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot X_1(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot X_2(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot X_3(\omega)\\ &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3) = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}5.\end{aligned}$$

Faktu, že předchozí výpočet funguje, se říká **linearita střední hodnoty**. Pojďme si ho nyní zformulovat jako obecné tvrzení.

Tvrzení. (linearita střední hodnoty) *Pro libovolnou náhodnou veličinu X a reálné číslo c platí $E(c\cdot X) = c\cdot E(X)$. Dále nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované pro stejný pravděpodobnostní prostor Ω. Potom $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$.*

Důkaz. V prvním případě chceme dokázat, že

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot cX(\omega) = c\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\cdot X(\omega),$$

[17] Tedy v prvním, druhém i ve třetím kroku padla panna.

což je ale pouhé vytknutí čísla c před sumu.

Přepíšeme-li druhý bod tvrzení v jazyce sum, chceme dokázat, že výraz

$$\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\omega) \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\omega) X_i(\omega)$$

je rovný výrazu

$$\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\omega) X_i(\omega).$$

To je ale pouhé přehození sum (chceš-li, sčítáme prvky po řádcích a po sloupečcích).

Poznamenejme, že ačkoli jsme si linearitu střední hodnoty ukázali na příkladu hodu třemi mincemi, které jsou na sobě nezávislé, linearita střední hodnoty vůbec žádnou nezávislost nevyžaduje, funguje vždy!

Úloha 18. Viki si hodil deseti kostkami a Jáchym si dvacetkrát hodil falešnou mincí, na které padá panna s pravděpodobností 0,2. Potom od celkového počtu ok, která padla Vikimu, odečetli dvojnásobek celkového počtu panen, které padly Jáchymovi. Jaká je střední hodnota výsledku?

Dej si pozor na to, že předchozí tvrzení funguje pouze pro součet náhodných veličin a obecně neplatí pro jiné operace.

Úloha 19. Najdi dvě náhodné veličiny X_1, X_2 takové, že $\mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) \neq \mathrm{E}(X_1 \cdot X_2)$.

Linearita střední hodnoty je nesmírně užitečný nástroj. Pojďme si ukázat jeho použití na následující úloze.

Úloha 20. Na celostátní kolo matematické olympiády dorazilo n soutěžících, přičemž každý dostal visačku. Visačky se nicméně nedopatřením zamíchaly a byly rozdány náhodně – každé možné rozdělení má stejnou pravděpodobnost. Jaký je střední počet soutěžících, kteří dostali visačku se svým jménem?

Spočítejme nejprve, jaký je výsledek pro nějaké malé n, řekněme $n = 4$. Označme si čtyři účastníky písmeny A, B, C, D. Každé možné rozdělení visaček odpovídá nějaké permutaci čtyř písmenek A, B, C, D. My máme pro každou permutaci spočítat, kolik účastníků dostalo svojí visačku – takové účastníky budeme nazývat spokojenými. V následující tabulce každá permutace odpovídá jednomu sloupečku a spokojení účastníci jsou vyznačeni tučně. My máme spočítat průměrný počet spokojených účastníků, tedy máme sečíst hodnoty pro všechny sloupečky, což jsme udělali v poslední řádce. Následně máme vydělit $4! = 24$, abychom dostali pravděpodobnost.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Σ
A:	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D	6
B:	**B**	**B**	C	C	D	D	A	A	C	C	D	D	A	A	**B**	**B**	D	D	A	A	**B**	**B**	C	C	6
C:	**C**	D	B	D	B	**C**	**C**	D	A	D	A	**C**	B	D	A	D	A	B	B	**C**	A	**C**	A	B	6
D:	**D**	C	**D**	B	C	B	**D**	C	**D**	A	C	A	**D**	B	**D**	A	B	A	C	B	C	A	B	A	6
Σ:	4	2	2	1	1	2	2	0	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	0	1	1	2	0	0	24

Označíme-li X počet spokojených účastníků, pohledem na poslední řádku vidíme, že $\mathrm{P}(X = 0) = \frac{9}{24}$, $\mathrm{P}(X = 1) = \frac{8}{24}$, $\mathrm{P}(X = 2) = \frac{6}{24}$, $\mathrm{P}(X = 3) = \frac{0}{24}$ a $\mathrm{P}(X = 4) = \frac{1}{24}$. Tedy

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{8 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{24} = 1.$$

Tento způsob je dost pracný a vůbec není jasné, jak ho zobecnit pro libovolné n. Co kdybychom ale spokojené účastníky sčítali po řádcích a ne po sloupečcích? Vidíme, že v každé řádce je přesně šest spokojených účastníků (poslední sloupeček tabulky), což vůbec není náhoda. Všechny visačky jsou totiž stejné a pro libovolného účastníka proto musí být pravděpodobnost, že dostane danou visačku, stejná pro všechny visačky. Jinými slovy, když se podíváš na sloupečky, ve kterých je A na svém místě, zjistíš, že odpovídají $3! = 6$ permutacím písmenek B, C, D. Tento postup je velice snadné zobecnit pro libovolné n a sepsat na jeho základě čistě kombinatorické řešení. My si ukážeme, jak se dá důkaz elegantně zformulovat s využitím linearity střední hodnoty, jejíž podstata, jak víme, je přesně sčítání prvků tabulky po řádcích a po sloupečcích.

Řešení. Zaveďme si n náhodných veličin X_i, přičemž $X_i = 1$, pokud i-tý soutěžící dostal svou visačku, a $X_i = 0$ jinak. Povšimněme si, že pro náhodnou veličinu X „počet soutěžících, kteří dostali svou visačku" platí $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Povšimněme si, že pravděpodobnost, že i-tý soutěžící dostal svou visačku, je přesně $\frac{1}{n}$, neboť pravděpodobnost, že dostal danou visačku, musí být stejná pro všech n visaček, protože se všechny chovají stejně. Pro náhodnou veličinu X_i tak platí $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 0 = \frac{1}{n}$. Z linearity střední hodnoty tak plyne

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

V předchozím důkazu jsme použili náhodné veličiny, které nabývaly pouze hodnoty nula, nebo jedna. Taková veličina se dá plně popsat tím, pro které elementární jevy našeho prostoru dává výsledek jedna. Odpovídá tak vlastně přesně nějakému jevu. Proto se náhodné veličiny, které nabývají pouze hodnoty 0, nebo 1, nazývají **indikátory**, neboť indikují, zda nastal nějaký jev.

Na první pohled se může zdát, že jsou indikátory směšně jednoduché. Linearita střední hodnoty ale ukazuje, že mohou být nesmírně užitečné, neboť i komplikovanější náhodné veličiny se často dají vyjádřit jako součet indikátorů (i počet padlých panen jsme tak ostatně zapsali). Hlavní výhodou této metody je, že nás vůbec nemusí zajímat, jestli jsou jednotlivé jevy nezávislé, protože i kdyby mezi sebou byly provázány nějakými složitými vztahy, tak se jejich střední hodnota stále bude chovat pěkně díky linearitě střední hodnoty.

Tvrzení. *Nechť I_A je indikátor jevu A, tedy náhodná veličina, která nabývá hodnoty 1, nastal-li jev A, a jinak je 0. Potom platí $E(I_A) = P(A)$.*

Důkaz. Indikátor dá jedničku pro všechny elementární jevy, které leží v A, takže z definice střední hodnoty platí $\mathrm{E}(I_A) = 0 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} \mathrm{P}(\omega) + 1 \cdot \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega) = \mathrm{P}(A)$.

S indikátorovým trikem po ruce se již můžeš pustit do řešení následujících úloh!

Úloha 21. Na stole leží balíček 32 hracích karet. Otočíme prvních pět z nich. Jaká je střední hodnota počtu otočených srdcových karet?

Úloha 22. Na sluníčku se v kroužku hrálo 2018 tuleňátek. Jelikož jsou tuleňátka malá a neposedná, každé z nich v jednu chvíli šťouchlo do náhodně zvoleného souseda (do každého s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Jaká je střední hodnota počtu šťouchnutých tuleňátek?

Úloha 23. Pomocí střední hodnoty nahlédni, že $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \frac{n}{2} \cdot 2^n$.

Následující úloha ukazuje, jak moc je užitečná linearita střední hodnoty. Zatímco spočítat $\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{E}(Y)$ je jednoduché, zbylé tři části úlohy ukazují, že se zkoumané náhodné veličiny X a Y chovají v různých ohledech velmi rozdílně.

Úloha 24. Kuba a Rado si n-krát hodili mincí. Za každé dva po sobě jdoucí orly dostane Kuba bod (dvojice, za které dostává body, se mohou překrývat). Za každého orla následovaného pannou dostane jeden bod Rado. Označme X a Y náhodné veličiny udávající počet bodů, které dostane Kuba, respektive Rado.

(1) Kolik je $\mathrm{E}(X)$ a kolik $\mathrm{E}(Y)$?

(2) Jaké jsou maximální možné hodnoty X a Y?

(3) Řekněme, že Kuba získá bod za dvojici hodů $i, i+1$. Jaká je pravděpodobnost, že získá bod za dvojici hodů $i+1, i+2$? A kolik to vyjde pro Rada?

(4) (těžší) Dokaž, že pro $n \geq 4$ je $\mathrm{P}(X = 0)$ větší než $\mathrm{P}(Y = 0)$.

Počítání s indikátory se také dobře chová vůči základním množinovým operacím, jak ukazují následující příklady:

Úloha 25.

(1) Rozmysli si, že jsou-li I_X, I_Y indikátory jevů X, Y, tak $I = I_X I_Y$ je indikátor jevu $X \cap Y$.

(2) Se stejnou notací jako v první části dokaž, že $I' = 1 - (1 - I_X)(1 - I_Y)$ je indikátor $X \cup Y$.

(3) (těžká, princip inkluze a exkluze) Ukaž, že pro libovolnou n-tici jevů $A_1, \ldots, A_n$ platí (v sumě dole sčítáme přes všechny neprázdné podmnožiny S množiny $\{1, \ldots, n\}$)

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{S=\{s_1,\ldots,s_k\}} (-1)^{k-1} \mathrm{P}(A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \cdots \cap A_{s_k}).$$

Diskrétní prostory*

Nejprve poznamenejme, že Σ notace, kterou jsme si zavedli, se dá zobecnit i na nekonečné součty. Chceme-li „sečíst“ hodnoty nějaké funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pro všechna přirozená čísla, můžeme místo $f(1) + f(2) + \ldots$ psát $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$. Všimni si uvozovek v předchozí větě: v přímém smyslu totiž není možné doslova sečíst nekonečně mnoho čísel.[18] S dostatečně krotkými součty, což bude i náš případ, nicméně můžeme zacházet úplně stejně jako s těmi konečnými. Speciálně stále můžeme používat úpravy pro konečné součty, které známe z Úlohy 16. To mimo jiné znamená, že se naše definice náhodné veličiny a střední hodnoty dají velmi snadno zobecnit z konečných pravděpodobnostních prostorů i na nekonečné diskrétní.

Vraťme se nyní k příkladu z minulého dílu, kde jsme uvažovali prostor odpovídající pokusu, kdy házíme mincí tak dlouho, než nám padne panna. V našem příkladě byla mince falešná a panna padla v každém pokusu nezávisle s pravděpodobností p. Přirozená otázka je, jaký je průměrný počet hodů, po kterém nám panna padne. Jinými slovy chceme znát střední hodnotu náhodné veličiny, která pro všechna přirozená i nabývá hodnoty i s pravděpodobností $p \cdot (1-p)^{i-1}$ – to je totiž přesně pravděpodobnost, že panna padne poprvé v i-tém kroku. Potřebujeme tedy znát hodnotu nekonečného součtu $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p\,(1-p)^{i-1}$. Ta se dá spočítat pěkným trikem, který si nyní ukážeme.

Tvrzení. *Házíme-li mincí, na které padá panna s pravděpodobností $p > 0$, než poprvé padne panna, je střední hodnota počtu hodů rovna $1/p$.*

Ověřme, že výsledek dává smysl – čím menší pravděpodobnost, že padne panna, tím déle se v průměru musíme snažit. Speciálně dostáváme, že je-li mince férová, tedy $p = 1/2$, v průměru jsou potřeba dva hody na to, aby padla panna.

Důkaz. Označme X náhodnou veličinu odpovídající prvnímu kroku, ve kterém padne panna. Uvažme nyní první krok. Pokud padne panna (to se stane s pravděpodobností p), máme $X = 1$. Co když panna nepadne? Jednotlivé hody jsou nezávislé (mince nemá paměť), takže střední počet hodů, než padne panna, je pořád $\mathrm{E}(X)$. K tomu je potřeba přičíst právě vykonaný krok. Dostáváme tak rovnici

$$\mathrm{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p)(\mathrm{E}(X) + 1),$$

jejímž řešením je $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Úloha 26. Zkus najít alternativní důkaz předešlého tvrzení podle následujícího návodu:

(1) Rozmysli si, že pro libovolnou náhodnou veličinu X, která může nabývat pouze kladných celočíselných hodnot, platí $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq i)$.

(2) Uvědom si, kolik je $\mathrm{P}(X \geq i)$ v našem případě, a sečti řadu.

[18] Pročež neexistuje smysluplná odpověď na otázky typu: „Kolik je $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$?“

Náhodné veličiny na spočetných prostorech se ovšem někdy můžou chovat poněkud záludně, speciálně se může stát, že střední hodnota náhodné veličiny vyjde nekonečno. Můžeme si například vymyslet náhodnou veličinu, která má s pravděpodobností 2^{-i} hodnotu 2^i. Potom je střední hodnota takové veličiny rovna součtu $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots = \infty$.[19] To je také zdrojem následujícího paradoxu:

Úloha 27. (Petrohradský paradox) Uvažme následující hru – nejprve zaplatíš 1000 Kč a pak si budeš házet mincí, než Ti padne panna. Pokud padla v i-tém kroku, dostaneš 2^i Kč. Vyplatí se Ti hru hrát?

Dostaneme, že hru se vyplatí hrát, ať už je vkladní částka jakákoli, neboť očekávaný zisk bude vždy nekonečno. Problém je v tom, že jak jsme si řekli na příkladě pojišťování, pro velké částky a značně nepravděpodobné jevy už občas nemá valný smysl vyvozovat ze střední hodnoty nějaké závěry. A v tomto případě už pro $n = 100$ pracujeme s neskutečně malými pravděpodobnostmi, pro které získáme nepředstavitelné bohatství.

Úloha 28. Vyplatilo by se Ti předchozí hru hrát, pokud by byla velikost výhry shora omezena HDP Česka za rok 2017, tj. $5 \cdot 10^{12}$ Kč? Jinými slovy, ve chvíli, kdyby panna v dalším hodu mohla vést k výhře převyšující tuto mez, tak se už ve hře nepokračuje a prostě dostaneš tyto peníze.

Pravděpodobnostní metoda a střední hodnota

Pamatuješ si ještě, jak jsme na začátku seriálu s pravděpodobnostní metodou řešili příklady, které na první pohled s pravděpodobností vůbec nesouvisely? Se střední hodnotou se tato metoda stává ještě silnější! Motto našeho přístupu na začátku bylo, že pokud má náhodné zvíře ze ZOO rypáček s nenulovou pravděpodobností, existuje v ZOO zvíře, které má rypáček. Nyní budeme používat následující: pokud má náhodné zvíře ze ZOO v průměru 4,1 nohou, tak v ZOO existuje zvíře, které má *alespoň* 4,1 nohou, a stejně tak existuje zvíře, které má *nejvýše* 4,1 nohou. Vzhledem k tomu, že zvířata mají celočíselný počet nohou, musí dokonce existovat zvíře s alespoň pěti nohama a zvíře s nejvýše čtyřma nohama. Síla tohoto přístupu spočívá v tom, že díky linearitě střední hodnoty umíme průměrné počty lecčeho počítat neuvěřitelně snadno.

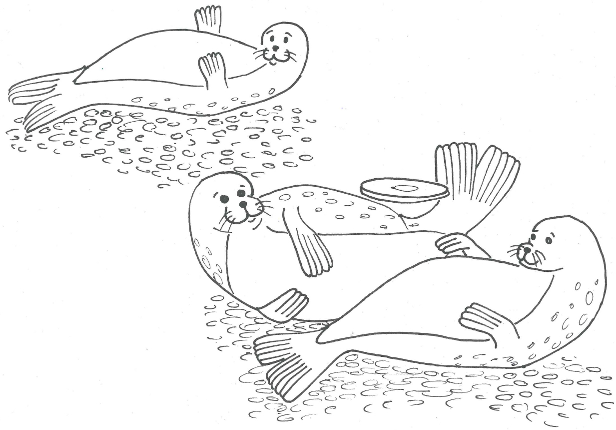
Úloha 29. Na každoroční turnaj ve frisbee dorazilo n tuleňů. Víme, že m dvojic tuleňů se kamarádí. Ukaž, že je můžeme rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) týmů tak, aby dvojic, které se mají rády a jsou spolu ve stejném týmu, bylo alespoň $\frac{m}{2}$.

Řešení. Rozdělme tuleně do týmů náhodně, tedy pro každého se rozhodneme, do jakého týmu přijde, nezávisle na ostatních s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Zaveďme indikátorovou náhodnou veličinu X_i, $1 \leq i \leq m$, pro každou dvojici tuleňů, kteří se kamarádí. Pravděpodobnost, že konkrétní dvojice bude ve stejném týmu, je přesně $\frac{1}{2}$, neboť s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ skončí oba tuleni v prvním týmu a se stejnou pravděpodobností skončí oba v druhém týmu.

Nechť X je náhodná veličina udávající počet kamarádských dvojic ve stejném týmu. Máme $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$. Z linearity střední hodnoty tak dostáváme, že $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_m) = m \cdot \frac{1}{2}$.

To ale nutně znamená, že existuje rozdělení tuleňů, pro které je počet kamarádských dvojic ve stejném týmu alespoň $\frac{m}{2}$. Kdyby totiž pro každé rozdělení byl počet takových dvojic menší než $\frac{m}{2}$, i střední hodnota by musela být menší než $\frac{m}{2}$, neboť se jedná o průměr počtu kamarádských dvojic ve stejném týmu pro všechna možná rozdělení.

[19] Nelekej se symbolu nekonečna, ten tady neznamená nic jiného, než že tento součet roste nad všechny meze.



Jak už se to u ukázkových úloh občas stává, použili jsme zde kanón na vrabce[20]. Existuje totiž i mnohem jednodušší řešení, které na první pohled s tím pravděpodobnostním vůbec nesouvisí.

Úloha 30. Vyřeš předchozí příklad bez použití pravděpodobnosti.

Nyní si zkus tento postup aplikovat sám (sama) na následující příklady. Stejně jako u klasické pravděpodobnostní metody existuje následující recept:

(1) Přečti si v zadání, co máš zvolit, a udělej to náhodně. Rozmysli si, jaký pravděpodobnostní prostor odpovídá této volbě.

(2) Musíš dokázat, že pro danou volbu je počet něčeho nabývá alespoň/nejvýše nějaké hodnoty. Stačí dokázat, že střední hodnota veličiny při náhodné volbě je rovna alespoň/nejvýše této hodnotě.

(3) Spočítej střední hodnotu pro svou náhodnou volbu. Může se hodit rozložit danou veličinu na součet jednoduchých veličin a pak použít linearitu střední hodnoty.

Úloha 31. Máme opět n tuleňů a m kamarádských dvojic. Dokaž, že je můžeme rozdělit do tří (ne nutně stejně velkých) týmů tak, aby počet kamarádských dvojic ve stejném týmu byl *nejvýše* $m/3$.

Úloha 32. Do soutěže Česko hledá Superstar se přihlásilo a soutěžících. Posuzují je čtyři porotci, přičemž každý z nich hodnotí soutěžícího pouze slovy „dobrý“, „ucházející“ nebo „špatný“. Dokaž, že existují dva porotci, kteří se shodli na alespoň šestině soutěžících.

Úloha 33. V turnaji hrálo n hráčů, přičemž každý hrál s každým. Po skončení turnaje bychom rádi soutěžící seřadili tak, že první porazil druhého, druhý třetího atd. Dokaž, že turnaj mohl dopadnout tak, aby počet způsobů, jak soutěžící seřadit, byl alespoň $\frac{n!}{2^{n-1}}$.

Úloha 34. Rozmysli si, že pokud vyřešíš nějaký příklad (např. z první sekce tohoto dílu) s použitím nerovnosti $\mathrm{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$, místo použití této nerovnosti můžeš zavést vhodné indikátory a použít linearitu střední hodnoty. Nová metoda je tedy do jisté míry zobecněním základní pravděpodobnostní metody.

Úloha 35. Na společenském večeru se sešlo n účastníků a n účastnic, kteří si spolu chtějí zatancovat. Předpokládejme, že existuje alespoň $n^2 - n + 1$ párů (tvořených osobami opačného pohlaví),

[20] V tomto případě spíš tuleně.

které by spolu chtěly tancovat. Ukaž, že umíme všech $2n$ tanečníků popárovat tak, aby každý tancoval se člověkem, se kterým tancovat chce.

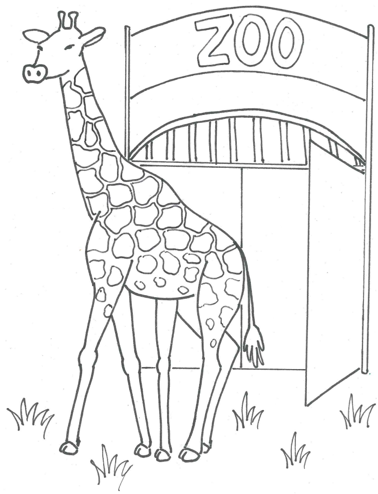
Úloha 36. (těžká) Mějme $n > 1$ reálných čísel, jejichž součet je nula, a zároveň je alespoň jedno z nich nenulové. Ukažte, že je můžeme označit $a_1, \ldots, a_n$ tak, aby platilo $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1 < 0$.

Úloha 37. (těžká a se spojitými prostory) Tulák má kabát o povrchu 1 a na něm pět záplat o obsahu $\frac{1}{2}$. Ukaž, že se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti s obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Závěr

Možná že jistě ale určitě snad.
Jiří Suchý

Hurá! Dočetl(a) jsi až na konec druhého dílu. Doufáme, že ses už sžil(a) s pravděpodobnostními prostory a ani náhodné veličiny Tě dnes nebudou strašit ve spánku. V tomto díle jsme si ukázali, jak aplikovat naše znalosti k řešení příkladů, ale do příštího dílu si hlavně zapamatuj, co to jsou náhodné veličiny, k čemu se může hodit znát jejich střední hodnotu a jak ji vypočíst s použitím linearity střední hodnoty. Těšíme se na Tebe u příštího dílu a do té doby přejeme hodně zdaru při řešení soutěžních úloh!



Návody k úlohám

2. (1) Nic. (2) Nic. (3) Jeden tým může být hodně malý. (4) Pravděpodobnost, že zakázaná skupina je celá v jednom týmu, teď nebude $2 \cdot \frac{2^{18}}{2^{24}}$, ale $2 \cdot \binom{18}{6}/\binom{24}{12}$.

3. Rozděl PraSátka náhodně a pak pokračuj jako ve vzorovém příkladu.

4. Zvol náhodnou uspořádanou dvojici studentů (záleží na pořadí a v obou náhodných výběrech můžeš zvolit téhož studenta). Jaká je pravděpodobnost, že ani jeden z nich nevyřešil první úlohu?

5. Učitel(ka) nejspíš bude říkat, že sis měl(a) dojít o přestávce, ale nakonec Tě pravděpodobně pustí.

6. Náhodně zvol 14 jazyků nezávislými náhodnými výběry; pravděpodobnost, že jeden z učitelů mluví náhodně zvoleným jazykem, je alespoň $\frac{1}{2}$. A ano, konstantu 14 jde výrazně zlepšit.

7. Když děti rozdělíme náhodně, bude pravděpodobnost, že dané dítě nemá ve své skupince žádného kamaráda, rovna nejvýše $\binom{59}{29}/\binom{89}{29}$.

8. Náhodně zvol permutaci a podívej se na jednotlivé za sebou jdoucí dvojice prvků. Chtěli bychom použít odhad na sjednocení pravděpodobností, jenže náš odhad pomocí součtu odhaduje na druhou stranu. Platí ale, že když od součtu pravděpodobností navíc odečteme součet pravděpodobností všech dvojic jevů, otočí se odhad na druhou stranu.

9. Zvol známosti náhodně. Jaká je pak pravděpodobnost, že z daných n lidí se všichni znají?

10. Co se stane, pokud prohodíme orla a pannu? Ve druhé části můžeš popárovat jevy, které mají stejnou pravděpodobnost, vyjde $\frac{n}{2}$.

15. Prostě to dosaď do vzorečku.

16. První dvě části plynou ze základních vlastností aritmetických operací; pro třetí část uvědom, kolik sčítanců tam je.

22. Zaveď si indikátory jevů „k-té tuleňátko bylo šťouchnuté“.

23. Vyber si z n prvků náhodnou podmnožinu a podívej se na střední hodnotu její velikosti.

25. (1) Plyne z definice indikátoru.
(2) Vzpomeň na to, jak se průniky a sjednocení operace chovají vůči doplňkům.
(3) Zaveď si indikátory a zkus trochu zobecnit poznatky z prvních dvou částí; na konci kombinatoricky nahlédni, jak se ronásobí jeden výraz.

26. Použij, že $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, atd. Následně sečti tu řadu.

31. Postupuj stejně jako s rozdělováním do dvou týmů.

32. Podívej se na náhodné dva porotce a pro každého soutěžícího zaveď indikátor, že se na něm porotci shodli. Co můžeme říct o pravděpodobnosti toho, že se na daném soutěžícím náhodní dva porotci shodli?

33. Řekněme, že každý zápas skončil náhodně. Jaká je pravděpodobnost toho, že pro dané seřazení hráčů každý porazil toho po své pravici?

35. Jaká je střední hodnota hodnota počtu „dobrých“ párů, popárujeme-li účastníky s účastnicemi náhodně?

36. Označ je náhodně a spočítej $\mathrm{E}(a_1a_2)$. Může se hodit roznásobit si výraz $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$.

37. Uniformně náhodně zvol bod na kabátu, nechť se nachází uvnitř D záplat. Zkus nějak interpretovat a odhadnout výraz $\mathrm{E}(\binom{D}{2})$.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) Nic, prostě by pravděpodobnost jevů A_i nebyla přesně 2^{-5}, ale nejvýše 2^{-5}.
(2) Nic, počet účastníků překvapivě vůbec nehraje roli. Samozřejmě, pokud máme podmínky pro šestice, musí být počet účastníků alespoň 6.
(3) Jsou-li všichni účastníci v jednom, nebo všichni v druhém týmu, určitě bude všech deset požadavků porušeno. To ale znamená, že pro 32 podmínek máme $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{32}) < < \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_{32})$. I pro 32 podmínek tak stejným postupem dostaneme ostrou nerovnost $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{32}) < 1$. Bez tohoto pozorování bychom dostali pouze neostrou nerovnost, která ale nestačí.
(4) V tomto případě už není pravda, že vybrat šestici znamená udělat šest nezávislých rozhodnutí. Vybrat dvanáct účastníků tak, že tato dvanáctice obsahuje danou šestici účastníků,

znamená, že musíme zvolit 6 zbylých účastníků z celkového počtu $24 - 6 = 18$. Máme tedy $\mathrm{P}(A_i) = 2 \cdot \frac{\binom{18}{6}}{\binom{24}{12}}$. Zbývá ověřit, že $10 \cdot \mathrm{P}(A_i) < 1$, což přenecháme kalkulačkám.

3. Rozdělíme PraSátka do týmů náhodně. Musíme odhadnout pravděpodobnost, že daná skupinka nebude mít reprezentanta v jednom týmu. Zafixujme jednu z podmínek ze zadání a označme jevem T to, že daná skupinka PraSátek nemá reprezentanta v nějakém jednom týmu, a jevy T_i, $1 \leq i \leq 4$ to, že daná skupinka nemá žádného reprezentanta v i-tém týmu. Máme $\mathrm{P}(T_i) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, neboť pro každé PraSátko se rozhodujeme nezávisle. Dále $\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \leq \mathrm{P}(T_1) + {}$ $+\mathrm{P}(T_2) + \mathrm{P}(T_3) + \mathrm{P}(T_4) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$, neboť pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností. Máme tedy méně než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ jevů, z nichž každý nastane s pravděpodobností nejvýše $4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Víme, že pravděpodobnost sjednocení nějakých jevů je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, ten je ale menší než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$.

4. Zvolme dvakrát po sobě náhodného studenta z 200. Dokážeme, že s nenulovou pravděpodobností tato dvojice vyřešila všechny příklady. Může se stát, že vybereme dvakrát stejného studenta, ale to nevadí, neboť pokud jeden student vyřešil všechno, přidáme k němu prostě do dvojice libovolného jiného studenta; tato dvojice pak opět vyřešila všechno.
Zaveďme jevy $U_1, U_2, \ldots, U_6$, kde jev U_i znamená „žádný ze zvolených studentů nevyřešil i-tou úlohu“. Nejvýše 80 studentů nevyřešilo první úlohu, takže pravděpodobnost toho, že ji nevyřešil první student, je nejvýše $\frac{80}{200} = \frac{2}{5}$. Pro druhého to vyjde stejně a díky nezávislosti dvou voleb tedy platí $\mathrm{P}(U_i) \leq \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.
Pravděpodobnost, že některá ze šesti úloh nebyla vyřešena ani jedním ze zvolených studentů, odhadneme součtem pravděpodobností, neboli $\mathrm{P}(U_1 \cup \cdots \cup U_6) \leq \mathrm{P}(U_1) + \cdots + \mathrm{P}(U_6) \leq \frac{24}{25} < 1$. Některá dvojice proto musela vyřešit všechny úlohy.

5. Tak, a teď se můžeš s chutí pustit do dalších příkladů!

6. Pro $n \leq 7$ stačí zvolit všechny jazyky. Předpokládejme dále, že se vyučuje alespoň 14 jazyků. Pro náhodně zvolený jazyk je pravděpodobnost toho, že jím bude pevně zvolený učitel mluvit, rovna alespoň jedné polovině, neboť každý učitel ovládá alespoň polovinu všech vyučovaných jazyků.
Zvolme nezávisle náhodně 14 jazyků (jeden jazyk tedy možná zvolíme vícekrát). Nazvěme A_i jev „i-tý učitel nemluví žádným ze zvolených jazyků“. Pravděpodobnost, že první učitel nemluví prvním z nich, je rovna nejvýše $\frac{1}{2}$, stejně tak pro každý z jazyků; jelikož jsme jazyky volili nezávisle na sobě, dostáváme $\mathrm{P}(A_1) \leq 2^{-14}$. Analogickou úvahu můžeme provést i pro ostatní učitele. Teď už stačí odhadnout pravděpodobnost sjednocení pomocí součtu pravděpodobností, tedy $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{500}) \leq \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_{500}) \leq 500 \cdot 2^{-14} < 1$, takže musí existovat volba, pro níž každý učitel umí alespoň jeden zvolený jazyk.

7. Řekněme, že se jedno z dětí jmenuje Fíla. Pak existuje celkem $\binom{89}{29}$ 30členných skupin, ve kterých je Fíla; je-li počet Fílových kamarádů k, tak $\binom{89-k}{29}$ z nich neobsahuje žádného z Fílových kamarádů. Pro $k \geq 30$ je $\binom{89-k}{29} \leq \binom{59}{29}$. To znamená, že pokud zvolíme náhodné rozdělení do tří skupinek, je pravděpodobnost, že Fíla nebude mít ve skupině kamaráda, rovna nejvýše $\binom{59}{29} / \binom{89}{29} = {}$ $= \frac{59 \cdot 58 \ldots 31}{89 \ldots 61} = \frac{59}{89} \cdot \frac{58}{88} \ldots \frac{31}{61}$. Každý z těchto zlomků je roven nejvýše $\frac{2}{3}$. Dále pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, takže je při náhodném rozdělení pravděpodobnost, že nějaké dítě nemá žádného kamaráda ve své skupince, rovna nejvýše $90 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{29} < 1$. Proto musí existovat nějaké vyhovující rozdělení.

8. Pro libovolné množiny S_i platí: $|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| \geq |S_1| + \cdots + |S_n| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - \cdots - |S_{n-1} \cap S_n|$. V prvních n členech totiž započteme každý prvek ze sjednocení k-krát, pokud se vyskytuje v k různých množinách S_i; tentýž prvek se ale bude nacházet i v průsečíku libovolné dvojice řečených množin, takže ho pak odečteme $\binom{k}{2}$-krát. Je tedy dohromady započten přesně $\left(k - \frac{k(k-1)}{2}\right)$-krát. Tento výraz je roven nejvýše jedné pro libovolné nezáporné k, takže na pravé straně započteme každý člen z levé strany nejvýše jednou, čímž je nerovnost dokázána.

Uvažme náhodnou permutaci π a označme pro $1 \le i \le 2n-1$ jako X_i jev „$|\pi(i) - \pi(i+1)| = n$“. Stačí nám ukázat, že platí $\mathrm{P}(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{2n-1}) \ge \frac{1}{2}$. Spočítáme, že $\mathrm{P}(X_i) = \frac{1}{2n-1}$ a $\mathrm{P}(X_i \cup X_j) = 0$ pro $|i-j| = 1$ a $\mathrm{P}(X_i \cup X_j) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}$ jinak. Nakonec použijeme dokázanou nerovnost, kterou ještě před tím vydělíme velikostí celého pravděpodobnostního prostoru, aby se z velikostí množin staly pravděpodobnosti: $\mathrm{P}(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{2n-1}) \ge \mathrm{P}(X_1) + \cdots + \mathrm{P}(X_n) - \mathrm{P}(X_1 \cap X_2) - \mathrm{P}(X_1 \cap X_3) - \cdots - \mathrm{P}(X_{2n-2} \cap X_{2n-1}) = (2n-1)\frac{1}{2n-1} - \left(\binom{2n-1}{2} - (2n-2)\right)\frac{1}{(2n-1)(2n-3)} = 1 - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \ge \frac{1}{2}$.

9. Pro každou dvojici se náhodně rozhodněme, zda se zná, nebo nezná. Pravděpodobnost, že daných n lidí se navzájem zná, je $2^{-\binom{n}{2}}$, neboť pro každý z $\binom{n}{2}$ párů se s pravděpodobností jedna polovina rozhodneme, že se daní dva lidé budou znát. Stejně tak $2^{-\binom{n}{2}}$ je pravděpodobnost, že daných n lidí se navzájem nezná. Počet způsobů, jak z $2^{n/2}$ lidí vybrat n, je $\binom{2^{n/2}}{n}$. Pravděpodobnost, že bude existovat n lidí, kteří se navzájem buď všichni znají, nebo všichni neznají, je tedy nejvýše $\binom{2^{n/2}}{n} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{n}{2}}$ (zde používáme, že pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu pravděpodobností). Nakonec spočítáme, že tento výraz je menší než jedna, což Ti přenecháme jako ne tak docela jednoduché cvičení.

11. (1) Platí to pro všechny veličiny, neboť pro všechny elementární jevy platí $X(\omega) + X(\omega) = 2 \cdot X(\omega)$.

(2) Pro všechny elementární jevy ω musí být $X(\omega) \cdot X(\omega) = X(\omega)$, tedy $X(\omega) = 0$, nebo $X(\omega) = 1$; naopak každá náhodná veličina s touto vlastností zřejmě splňuje zadanou rovnici.

12. Rozdělme elementární jevy do m skupin podle toho, jaký výsledek pro ně dává X. Součet pravděpodobností jevů, pro které je X rovné x_i, je z definice $\mathrm{P}(X = x_i)$. Formuli pak dostaneme jako součet příspěvků všech m skupin.

13. Hodíme si spravedlivou mincí a padne-li panna, položíme $X = 4$, a padne-li orel, definujeme $X = \frac{1}{4}$. Potom je $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(1/X) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} > 2$.

14. Pravděpodobnost, že v nějakém kole hodíme dvě šestky, je $\frac{1}{36}$. Pravděpodobnost, že v daném kole nehodíme dvě šestky je tak $\frac{35}{36}$. Pravděpodobnost prohry je tak z nezávislosti jednotlivých pokusů rovna $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, takže pravděpodobnost výhry je $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0{,}49$.

15. Nehraj ruletu o peníze. ;)

18. Nechť X značí celkový počet ok a Y celkový počet panen. Střední hodnota počtu ok při hodu jednou kostkou je 3,5, takže z linearity střední hodnoty máme $\mathrm{E}(X) = 35$. Obdobně $\mathrm{E}(Y) = 20 \cdot 0{,}2 = 4$. Nakonec opět z linearity střední hodnoty máme $\mathrm{E}(X - 2Y) = \mathrm{E}(X + (-2) \cdot Y) = \mathrm{E}(X) + (-2) \cdot \mathrm{E}(Y) = 27$.

19. Uvažme kupříkladu hod férovou mincí a náhodnou veličinu X, která dává 1, padne-li orel, a 0, padne-li panna. Máme $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Jak už víme, platí $X \cdot X = X$, takže zvolíme-li $X_1 = X_2 = X$, máme $\mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) = \frac{1}{4}$, ale $\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$.

21. Pro $1 \le k \le 5$ uvažme jevy A_k „k-tá karta je srdcová“. Dále pro každý jev A_k zaveďme jeho indikátor I_k. Máme $\mathrm{E}(I_k) = \mathrm{P}(A_k) = \frac{1}{4}$. Pro celkový počet srdcových karet X platí $X = I_1 + \cdots + I_5$ a z linearity střední hodnoty tak máme $\mathrm{E}(I_1 + \cdots + I_5) = \mathrm{E}(I_1) + \cdots + \mathrm{E}(I_5) = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

22. Pro každé $1 \le k \le 2018$ zavedeme indikátor I_k pro jev A_k „k-té tuleňátko bylo šťouchnuté“. Platí $\mathrm{E}(I_k) = \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{4}$, neboť tuleňátko nebude šťouchnuto jen tehdy, když oba jeho sousedi šťouchnou svého druhého souseda. Pro počet šťouchnutých tuleňátek X pak máme z linearity střední hodnoty $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(I_1 + \cdots + I_{2018}) = \mathrm{E}(I_1) + \cdots + \mathrm{E}(I_{2018}) = 2018 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3027}{2}$.

23. Uvažme náhodně vybranou podmnožinu n objektů. Pro každý jev A_i „i-tý prvek byl vybrán“ si zavedeme indikátor I_i, pro nějž platí $\mathrm{E}(I_i) = \mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{2}$. Střední hodnota počtu vybraných objektů je tedy $\frac{n}{2}$. Na druhou stranu ji můžeme vyjádřit jako $\sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}/2^n) \cdot k$.

24. Panny budeme označovat jako P a orly jako O.

(1) Zavedeme indikátor pro každou z $n-1$ dvojic. Z linearity střední hodnoty pak vyjde $\frac{n-1}{4}$.

(2) Je to $n-1$ pro sekvenci $OOOO\dots$ a $\lfloor n/2 \rfloor$ pro sekvenci $OPOP\dots$

(3) Vyjde $\frac{1}{2}$ pro Kubu a 0 pro Rada.

(4) Potřebujeme spočítat počet řetězců tvořených písmeny O a P takových, že a) neobsahují podřetězec OO a b) neobsahují podřetězec OP. a) Řekněme, že a_n je počet řetězců na n prvcích neobsahující OO. Potom platí $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Dále uvažme libovolný řetězec na $n \geq 3$ prvcích neobsahující OO. Takový řetězec buď končí na písmeno P, nebo O. V prvním případě může být prvních $n-1$ znaků řetězce libovolným řetězcem neobsahujícím OO. V druhém případě musí být předposlední znak P, ale prvních $n-2$ znaků zase může být libovolný řetězec neobsahující OO. Dostáváme tak rovnici $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, z které může počítat další členy: $2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Této posloupnosti se také říká Fibonacciho. b) Jestliže posloupnost neobsahuje OP, platí, že jakmile je v posloupnosti nějaké O, napravo od něj už musí být samá Očka. Každá taková posloupnost nejdřív obsahuje nějaký počet Pček (klidně nulový) a pak nějaký počet Oček (také klidně nulový). Takových posloupností je $n+1$. Stačí dokázat $a_n \geq n+1$, což Ti přenecháme jako snadné cvičení na matematickou indukci.

25. (1) Součin dvou indikátorů bude roven jedné právě tehdy, pokud budou oba z nich nenulové, takže pro ty jevy, které jsou součástí X i Y, neboli pro jejich průnik, jinak bude roven nule, takže rovnost plyne z definice indikátoru.

(2) Stačí všimnout, že platí $I_{\overline{X}} = 1 - I_X$ a $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, načež pouze použijeme výsledek z první části a dostaneme kýženou rovnost.

(3) Definujeme si pro všech n jevů A_i jejich indikátorové veličiny I_i a pro sjednocení těchto jevů indikátorovou veličinu I. Jelikož platí $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$, vyplývá z minulého cvičení vyplývá rovnost $1 - I = (1-I_1)(1-I_2)\dots(1-I_n)$. Roznásobíme-li pravou stranu, tak po odečtení jedničky a vynásobení -1 dostáváme $I = \sum_{j=1}^{n} I_j - \sum_{1 \leq j < k \leq n} I_j I_k + \dots + (-1)^n I_1 I_2 \dots I_n$. Uvážením střední hodnoty obou stran dostaneme dokazovanou rovnost.

26. (1) Máme $\mathrm{P}(X \geq 1) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) + \dots$, $\mathrm{P}(X \geq 2) = \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3) + \dots$ atd. V sumě $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq i)$ se po takovémto vyjádření všech $\mathrm{P}(X \geq i)$ vyskytuje každý výraz $\mathrm{P}(X = j)$ přesně j-krát. Proto $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq i) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(X = j) = \mathrm{E}(X)$.

(2) V případě s mincí je $\mathrm{P}(X \geq i) = (1-p)^{i-1}$, neboť se to stane právě tehdy, padne-li během prvních $i-1$ hodů pokaždé orel, takže $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{1}{p}$, kde jsme sečetli geometricku řadu.

28. Střední hodnota vyjde nula, jen když můžeme udělat alespoň sto hodů, což vede na částku 2^{100} Kč, jež je zásadně větší než HDP Česka.

30. Budeme tuleně do týmů přidávat po jednom. Pokaždé když přidáváme nového tuleně, uvážíme přátelské vztahy mezi tímto tuleněm a tuleni, které jsme už do týmů rozdělili. Aktuálního tuleně pak prostě dáme do týmu, kde je více jeho kamarádů. Protože v každém kroku byl počet přidaných vztahů uvnitř týmů alespoň roven polovině celkového počtu přidaných vztahů, musí na konci platit, že počet vztahů uvnitř týmů je alespoň poloviční oproti počtu všech vztahů.

31. Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu se dvěma týmy. Rozdělíme tuleně náhodně a pro každou dvojici zavedeme veličinu X_i indikující, zda je ve stejném týmu. Dostáváme $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{3}$. Z linearity střední hodnoty je střední počet dvojic ve stejném týmu roven $m \cdot \frac{1}{3}$, takže existuje rozdělení, kde je takových dvojic nejvýše $m \cdot \frac{1}{3}$.

32. Nechť X je náhodná veličina značící počet soutěžících, na kterých se shodli náhodní dva porotci. Stačí dokázat $\mathrm{E}(X) \geq \frac{a}{6}$. Dále pro každé i označme A_i jev „náhodní dva porotci se shodli

na i-tém soutěžícím". Povšimněme si, že pro každého soutěžícího existují alespoň dva porotci, kteří mu dali stejné hodnocení. Možných dvojic porotců je $\binom{4}{2} = 6$, takže máme $\mathrm{P}(A_i) \geq \frac{1}{6}$.
Pro všechna $1 \leq i \leq a$ budiž X_i indikátor jevu A_i. Máme $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_a) = = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_a) \geq a \cdot \frac{1}{6}$.

33. Představme si, že turnaj dopadnul náhodně, tj. každý hráč vyhrál každý ze svých zápasů s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Existuje celkem $n!$ různých seřazení všech hráčů, protože očíslujeme-li hráče čísly od 1 do n, tak každé seřaení můžeme ztotožnit s nějakou permutací π. Můžeme si tedy zavést indikátor I_π, který je roven jedné právě tehdy, když hráč $\pi(i)$ porazil hráče $\pi(i+1)$ pro $i = 1, \ldots, n-1$, jelikož jsou všechny výsledky zápasů nezávislé, tak $\mathrm{E}(I_\pi) = 2^{1-n}$. Z linearity střední hodnoty je proto průměrný počet vyhovujících seřazení roven (sčítáme přes všechny permutace) $\sum_\pi \mathrm{E}(I_\pi) = \frac{n!}{2^{n-1}}$.

34. Pro jevy $A_1, \ldots, A_n$ zavedeme indikátory $I_1, \ldots, I_n$. Poté náhodná veličina $X = I_1 + \cdots + I_n$ odpovídá „počtu jevů A_i, které nastaly". Nyní z linearity střední hodnoty dostáváme $\mathrm{E}(X) = = \mathrm{E}(I_1) + \cdots + \mathrm{E}(I_n) = \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$. Při použití původní metody bychom se snažili dokázat $\mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) < 1$ a interpretovali to tak, že pravděpodobnost, že nenastane žádný z jevů A_i je větší než nula. Nyní se snažíme dokázat to samé, ale nakonec řekneme, že pokud je střední počet jevů A_i, které nastaly, ostře menší než jedna, musí nastat případ, kdy počet nastavších jevů je přesně nula, neboť tento počet je vždy nezáporné celé číslo.

35. Popárujeme tanečníky náhodně a pro každý pár zavedeme indikátor X_i, který dá jedničku, právě když lidé z i-tého páru spolu chtějí tancovat. Existuje celkem n^2 dvojic účastník-účastnice a alespoň $n^2 - n + 1$ z nich spolu chce tancovat, takže $\mathrm{E}(X_i) \geq \frac{n^2-n+1}{n^2}$. Z linearity střední hodnoty dostaneme $\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = n\mathrm{E}(X_1) \geq \frac{n^2-n+1}{n} > n - 1$, takže musí existovat nějaké popárování, ve kterém bude všech n párů spokojených.

36. Označme si čísla nějakým pevně zvoleným způsobem jako $a_1, \ldots, a_n$. Chceme ukázat, že existuje permutace $\{1, \ldots, n\}$ π taková, že $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \cdots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)} < 0$ (na permutaci se díváme jako na funkci). Pro náhodnou permutaci platí $\mathrm{E}(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, neboť se $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}$ musí rovnat jednomu z těchto součinů a ze symetrie je každý z nich stejně pravděpodobný. Z linearity střední hodnoty (a symetrie) tedy je $\mathrm{E}(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + + \cdots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)}) = n\mathrm{E}(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Zároveň však platí $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, takže pro čísla s nulovým součtem je díky nezápornosti čtverců $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 0$ a kvůli tomu, že aspoň jedno číslo je nenulové, bude nerovnost dokonce ostrá. Proto $\mathrm{E}(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \cdots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)}) < 0$.

37. Pokud máme dvě náhodné veličiny X, Y na Ω a pro libovolný jev $\omega \in \Omega$ je $X(\omega) \geq Y(\omega)$, tak ze vzorečku pro střední hodnotu plyne $\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$. Vyberme uniformně náhodně bod na kabátu, nechť D je počet záplat, které jej pokrývají. Z linearity střední hodnoty je $\mathrm{E}(D) = 5 \cdot \frac{1}{2}$. Pro celá čísla $0 \leq d \leq 5$ platí $\frac{d(d-1)}{2} \geq 2d - 3$, takže $\mathrm{E}(\binom{D}{2}) \leq \mathrm{E}(2D - 3) = 2\mathrm{E}(D) - 3 = 2$. Kombinatoricky můžeme výraz $\mathrm{E}(\binom{D}{2})$ interpretovat jako průměrný počet dvojic záplat, v nichž leží uniformně náhodně zvolený bod, což se díky naší geometrické interpretaci pravděpodobnosti rovná součtu obsahů průniků dvojic různých záplat. Dvojic záplat je celkem $\binom{5}{2} = 10$, takže předpokládáme-li, že libovolné dvě záplaty mají průnik s obsahem menším než $\frac{1}{5}$, dostáváme $\mathrm{E}(\binom{D}{2}) < 2$, což je spor s výše odvozenou nerovností. Proto se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti s obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.