Obvodové a úsekové úhly – Crash Course

Vítej u tohoto studijního textu! Obvodové a úsekové úhly jsou krásná část geometrie, která může člověku i v nevinně vypadajícím obrázku najít nečekané souvislosti. Ať už tento text čteš kvůli přípravě na řešení matematických příkladů, nebo si jen chceš přečíst něco zajímavého, určitě pokračuj.

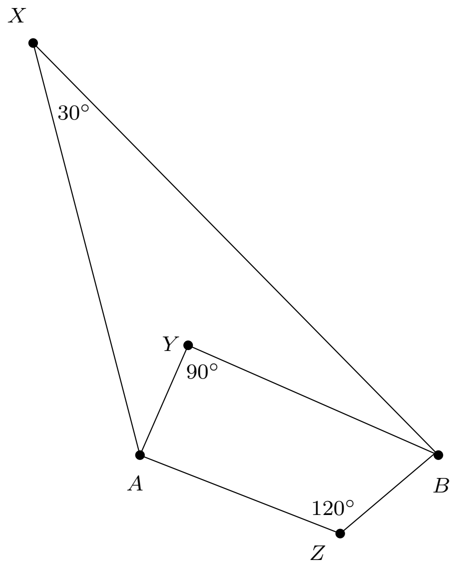
Ačkoliv je napsán primárně jako studijní text pro sérii Tečny, zdaleka se nejedná o zbraň pouze na úlohy s tečnami, a proto je tento text trošku obšírnější. Znalosti o obvodových a úsekových úhlech jsou nepostradatelné alespoň u poloviny pokročilejších geometrických úloh a jsou jednoznačně nejdůležitějším výpadem, který je třeba pro boj s geometrií bravurně ovládat. *Pokud nicméně spěcháš s řešením série, stačí Ti mrknout na užitečná tvrzení zde označená jako Zbraně. Tato tvrzení můžeš při řešení matematických příkladů využívat bez důkazu.*

Pojďme na to – těžko na cvičišti, lehko na bojišti!

Když se body dívají

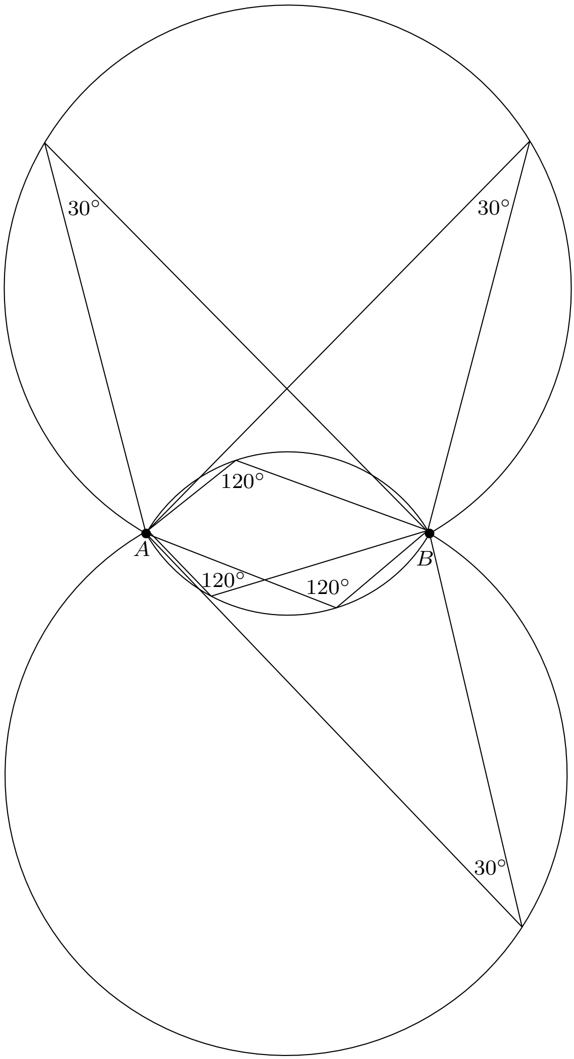
Definice. Bod X se *dívá* na úsečku AB pod úhlem o velikosti $|\sphericalangle AXB|$.

Zde je příklad bodů X, Y, Z, které se dívají na úsečku AB postupně pod úhly $30°$, $90°$ a $120°$.



Například vezmeme-li množinu všech bodů, které se na úsečku AB dívají pod úhlem 90°, dostaneme Thaletovu kružnici nad úsečkou AB.[1]

Co kdybychom se snažili najít množinu bodů, které se na tuto úsečku dívají pod úhlem třeba 30° či 120°? Prozradíme, že by vypadala takhle!



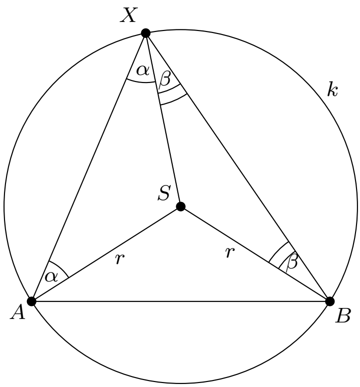
[1] Jako bedlivý čtenář si jistě všimneš, že do Thaletovy kružnice patří i samotné body A, B. Umí se tyto dva body taky koukat na úsečku AB? Dodejme tedy pro matematickou korektnost – pro body na přímce AB, ale mimo úsečku AB dává smysl říct, že se na úsečku AB dívají pod úhlem 0°. Naopak body uvnitř AB se musí „pořádně rozhlédnout“ na obě strany, aby zkoukly oba konce úsečky; dívají se tedy pod přímým úhlem 180°. Samotné krajní body A, B se na úsečku AB mohou dívat pod jakýmkoli úhlem, tedy i 90°.

A proč? To se brzy dozvíš ;).

O středu kružnice

Podívejme se na následující obrázek – bod S je středem kružnice k o poloměru r. Na této kružnici je vyznačená nějaká její tětiva AB a bod X. Pod jakým úhlem se bod X dívá na AB? Nazvěme úhel $\sphericalangle ASB$ *středový úhel* a úhel $\sphericalangle AXB$ *obvodový úhel*.

Ihned si můžeme všimnout, že trojúhelník SAB je rovnoramenný díky $|SA| = |SB| = r$, platí tedy $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA|$. Stejnou úvahu můžeme provést i pro trojúhelníky ASX a BSX. Abychom si udrželi přehled o tom, které úhly jsou stejné, označíme si je písmenky – viz obrázek.



Nyní vidíme, že musí platit

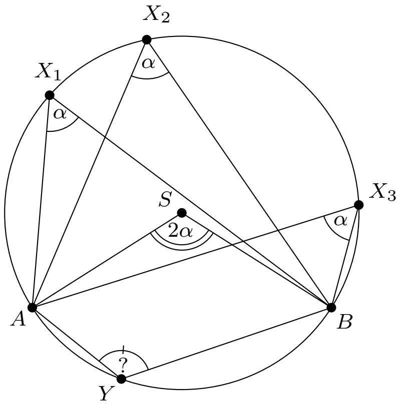
$$\alpha + \alpha + \beta + \beta + |\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA| = 180^\circ.$$

Můžeme si všimnout, že $\alpha + \beta$ se rovná velikosti obvodového úhlu $|\sphericalangle AXB|$. Úhly $\sphericalangle SBA$ a $\sphericalangle SAB$ spolu musí doplňovat středový úhel do 180°. S těmito znalostmi upravíme naši rovnici na

$$\begin{aligned} 180^\circ = 2(\alpha + \beta) + (|\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA|) &= 2|\sphericalangle AXB| + (180^\circ - |\sphericalangle ASB|), \\ 2|\sphericalangle AXB| &= |\sphericalangle ASB|. \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ má oproti středovému úhlu $\sphericalangle ASB$ poloviční velikost.

To je velmi zajímavé zjištění – ale pozor, z tohoto obrázku můžeme vytěžit ještě mnohem více. Všimněme si, že bod X jsme si na kružnici vybrali náhodně – co kdybychom jej vybrali na jiném místě delšího oblouku AB? Důkaz by vypadal velmi podobně. Bod X by se na AB opět díval pod úhlem o velikosti poloviny středového úhlu. **Jinak řečeno, všechny body delšího oblouku AB kružnice k se na úsečku AB dívají pod stejným úhlem.**



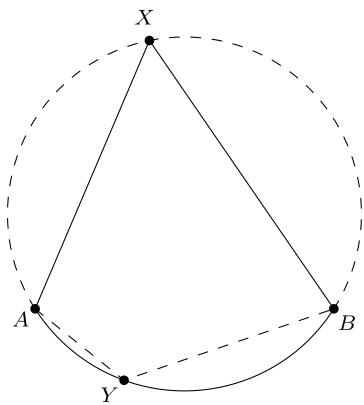
U tohoto obrázku na chvíli ještě zůstaneme. Nabízí se totiž další otázka – pod jakým úhlem se na AB dívají body kružnice k, které jsou „pod“ AB?

Cvičení. Rozmysli si, že $\frac{|\sphericalangle ASB|}{2}$ to asi nebude.

Nicméně by intuitivně opět mělo platit, že se všechny body tohoto kratšího oblouku také dívají na AB pod stejným úhlem – označme si nějaký takový bod Y.

Nyní se nám hodí začít přemýšlet nejen nad úhly, ale i nad oblouky kružnice, které oněm obvodovým či středovým úhlům přísluší.

Přestože se oba body X, Y dívají na úsečku AB, bod X se dívá na **kratší** oblouk kružnice k vymezený body A, B, zatímco bod Y se dívá na ten **delší**.



To samé můžeme rozlišit i u středového úhlu. Středový úhel příslušející kratšímu oblouku AB má velikost $|\sphericalangle ASB|$, zatímco velikost středového úhlu příslušejícímu delšímu oblouku AB je $360° - |\sphericalangle ASB|$.[2]

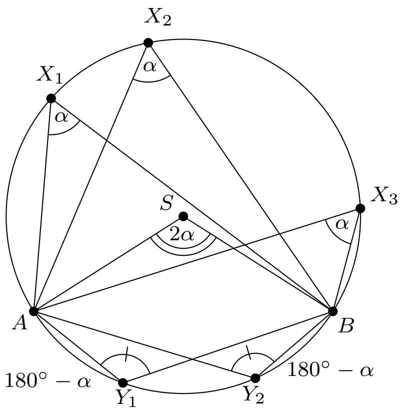
[2]Těmto „škaredým“ úhlům, které mají velikost větší než 180°, se říká nekonvexní úhly.

Nebudeme to nyní exaktně dokazovat, ale je to tak. Všechny body, které jsou pod úsečkou AB, se na ni dívají stále pod úhlem o velikosti rovné polovině středového úhlu – pouze je to tentokrát ten větší středový úhel příslušný většímu oblouku AB.

Velikost úhlu $\sphericalangle AYB$ je tedy $180° - \frac{|\sphericalangle ASB|}{2}$. Za chvíli se nám bude hodit další důležité pozorování: součet úhlů, pod kterými se na AB dívají body X a Y, je roven $180°$.[3] Pojďme zformulovat to, co jsme nyní zjistili.

Zbraň I. (o obvodových úhlech)
Mějme libovolnou kružnici a nějakou její tětivu AB. Pak se všechny body na obvodu kružnice, které leží ve stejné polorovině vůči přímce AB, dívají na tětivu AB pod stejným úhlem. Součet úhlů, pod kterými se na AB dívají body kružnice z různých polorovin vymezených přímkou AB, je $180°$.

Zbraň II. (o obvodovém a středovém úhlu)
Mějme libovolnou kružnici a nějaký její oblouk AB. Středový úhel jemu příslušný je dvojnásobkem jeho obvodového úhlu.



Cvičení. Rozmysli si, že Thaletova kružnice je speciálním případem Zbraně I.

Cvičení. Rozmysli si, že obrázek množin bodů, které se na nějakou úsečku koukají pod úhly $30°$ a $120°$, dává dobrý smysl.

Tětivové čtyřúhelníky

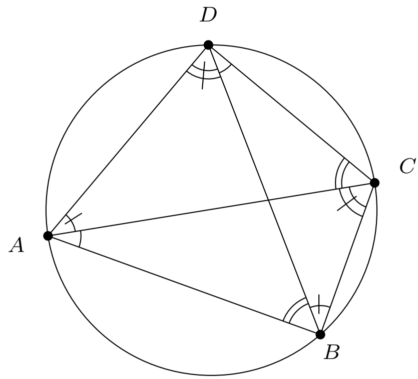
Tětivový čtyřúhelník je čtyřúhelník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na jedné kružnici.

Cvičení. Rozmysli si, že lichoběžník je tětivový tehdy a pouze tehdy, je-li rovnoramenný.

Proč bychom se o tětivové čtyřúhelníky měli zajímat? Můžeme si všimnout, že jsme se na ně vlastně již narazili – $AXBY$ byl v předchozích obrázcích tětivovým čtyřúhelníkem.

[3] To intuitivně odpovídá tomu, že součet středových úhlů odpovídajícím kratšímu a delšímu oblouku AB musí pokrýt celou kružnici, což odpovídá $2 \cdot 180° = 360°$.

Tětivové čtyřúhelníky jsou velmi pevně spjaty s obvodovými úhly. Představme si, že máme nějaký čtyřúhelník $ABCD$, o kterém víme, že je tětivový. Nyní na něj vypustíme Zbraň I:



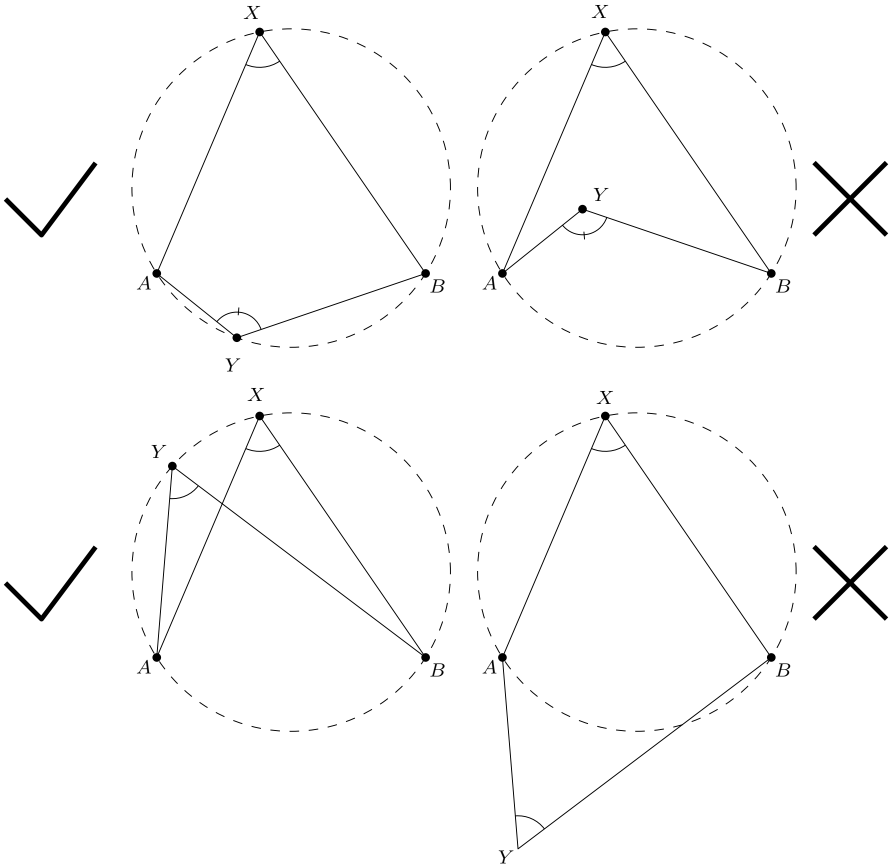
Dostaneme celkem dost informací, a to jsme si ještě mohli dokreslit střed kružnice a použít Zbraň II. Tětivové čtyřúhelníky by se evidentně hodilo umět hledat. Nabízí se tedy otázka – jak bychom dokázali, že nějaké čtyři body leží na kružnici? Máme štěstí – tvrzení, která jsme dosud dokázali, platí i obráceně!

Zbraň III. (detektor tětivových čtyřúhelníků)
Mějme libovolnou úsečku AB a nějaké body X, Y ležící mimo přímku AB. Pak body $ABXY$ leží na jedné kružnici, právě když platí jedna z následujících podmínek:

(1) *Body X, Y leží ve stejné polorovině vymezené přímkou AB a dívají se na úsečku AB pod stejným úhlem.*
(2) *Body X, Y leží v opačných polorovinách vymezených přímkou AB a součet úhlů, pod kterými se na úsečku AB dívají, je $180°$.*

Zbraň III nám zaručuje, že kdykoliv najdeme libovolné dva body dívající se na nějakou úsečku ze stejné strany pod stejným úhlem, pak tyto dva body spolu s koncovými body úsečky tvoří tětivový čtyřúhelník. Totéž platí, kdykoliv najdeme dva body, které se dívají na úsečku z opačných stran a součet jejich „dívacích“ úhlů je $180°$.

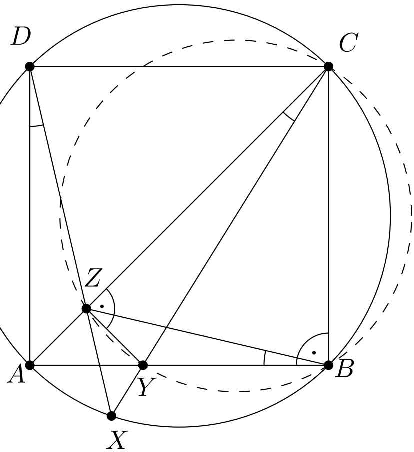
Pozor, neověřit, ve kterých polorovinách vůči AB se body X, Y nachází, je chyba, kvůli které pravidelně ztrácejí body v soutěžích i zkušení řešitelé. Jak Zbraň III správně použít a nenachytat se, můžeme shrnout následujícími čtyřmi obrázky:



Víme, že tětivové čtyřúhelníky jsou hodně užitečné, a umíme je hledat. Pojďme si to vyzkoušet na příkladu.

Příklad. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB jemu opsané kružnice zvolíme libovolně bod X. Průsečík úsečky XC se stranou AB označíme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označíme Z. Ukažte, že YZ je kolmá na AC.

Řešení. Zkusme nad příkladem přemýšlet od konce. Pokud má opravdu být YZ kolmá na AC, pak by se body Z a B dívaly na úsečku YC pod úhlem $90°$ – tedy body B, C, Z, Y by v tomto pořadí ležely na Thaletově kružnici nad CY, tudíž by tvořily tětivový čtyřúhelník.



Díky této úvaze již víme, co máme dělat – stačí nám z toho, co známe, nějak dokázat, že čtyřúhelník $BCZY$ je skutečně tětivový. Ze zadání víme, že body A, X, B, C, D leží v tomto pořadí na jedné kružnici. Z obvodových úhlů příslušných tětivě AX vyplývá $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle ADX|$. Ze symetrie bodů B, D vůči úhlopříčce AC máme $|\sphericalangle ADZ| = |\sphericalangle ABZ|$. Dohromady tedy

$$|\sphericalangle YBZ| = |\sphericalangle ABZ| = |\sphericalangle ADZ| = |\sphericalangle ADX| = |\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle ZCY|.$$

Víme tedy, že úhly $\sphericalangle YBZ$ a $\sphericalangle ZCY$ mají stejnou velikost, a jelikož leží vůči YZ ve stejné polorovině, tak body Y, B, C, Z dle Zbraně III tvoří tětivový čtyřúhelník.

Nyní již stačí pouze říct, že v tětivovém čtyřúhelníku je součet protějších úhlů roven vždy $180°$, proto $|\sphericalangle YZC| = 180° - |\sphericalangle YBC| = 90°$, YZ a CA jsou na sebe tedy skutečně kolmé.

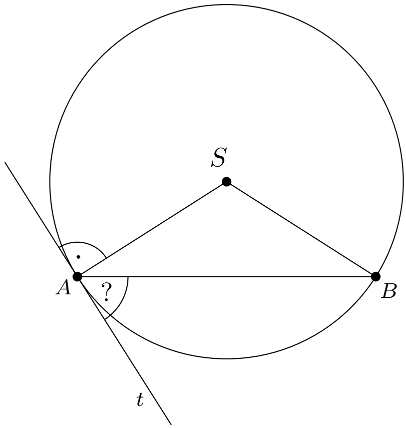
Obvodové úhly nám ovšem ještě neřekly poslední slovo.

Tečny a úsekové úhly

Definice. Mějme kružnici k. Přímce, která se této kružnice k dotýká v jediném bodě, říkáme *tečna* ke kružnici k. Prochází-li přímka navíc bodem X, můžeme říct, že je to tečna ke kružnici k z bodu X.

Základní vlastností tečny je, že v bodě dotyku svírá s poloměrem kružnice pravý úhel.

Představme si podobnou konfiguraci, s jakou jsme začali – opět mějme kružnici se středem S a na ní nějakou tětivu AB. Nyní veďme bodem A tečnu t. Úhlu označenému otazníčkem, který svírají přímka t a úsečka AB, se říká *úsekový úhel* (v tomto případě kratšího) oblouku AB. Jaká je jeho velikost vůči středovému úhlu pro tento oblouk AB?

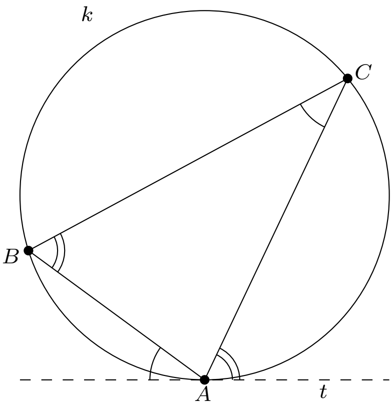


Již víme, že platí $|\sphericalangle SAB| = 90^\circ - \frac{|\sphericalangle ASB|}{2}$. Díky tomu, že tečna svírá s poloměrem pravý úhel, můžeme vyvodit, že spolu t a AB svírají úhel o velikosti $\frac{|\sphericalangle ASB|}{2}$ – tedy o polovině středového úhlu. Ale to je přece rovno velikosti obvodového úhlu pro AB, což nám předkládá novou zbraň.

Zbraň IV. (o obvodovém a úsekovém úhlu)
Mějme kružnici k a její oblouk AB, následně bodem A veďme tečnu ke k. Pak obvodový a úsekový úhel příslušející tomuto oblouku mají stejnou velikost.

Toto důležité tvrzení platí i obráceně.

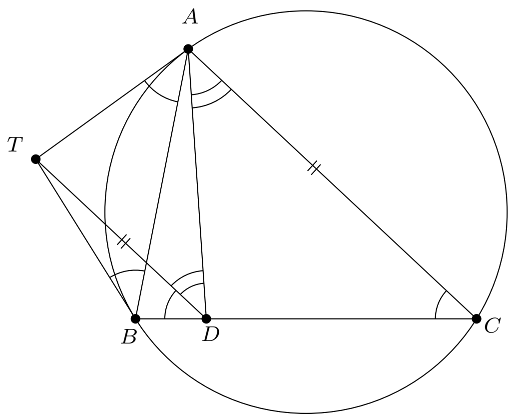
Zbraň V. (detektor tečen)
Mějme trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici k. Nechť bodem A prochází přímka t (viz obrázek) a platí, že úhel svíraný přímkou t a úsečkou AB je roven $|\sphericalangle ACB|$. Pak je přímka t tečnou kružnice k v bodě A.[4]



[4]Jinak řečeno, přímka t nemá s kružnicí k již žádný jiný společný bod kromě A.

Příklad. Mějme trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici. Nechť se její tečny v bodech A a B protínají v bodě T. Dále nechť přímka rovnoběžná s AC procházející bodem T protíná stranu BC v bodě D. Dokaž, že $|AD| = |CD|$.

Řešení. Díky rovnoběžnosti $AC \parallel TD$ víme, že $|\sphericalangle TDA| = |\sphericalangle DAC|$ (střídavé úhly) a $|\sphericalangle TDB| = |\sphericalangle ACB|$ (souhlasné úhly). Z věty o obvodovém a úsekovém úhlu (Zbraň IV) plyne $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TBA|$. Body D, A jsou ve stejné polorovině vůči přímce TB, protože jsou oba uvnitř či na hranici kružnice, která celá leží na jednu stranu od TB. Navíc jsme již dokázali, že $|\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TDB|$, tedy body A i D se na úsečku TB dívají pod stejným úhlem, a $TBDA$ je proto tětivový čtyřúhelník (Zbraň III). Nyní můžeme jeho vlastností využít – z obvodových úhlů (Zbraň I) vyplývá, že $|\sphericalangle TBA| = |\sphericalangle TDA|$.



Dohromady tedy máme tento vyčerpávající řetězec rovností:

$$|\sphericalangle TDB| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TBA| = |\sphericalangle ADT| = |\sphericalangle CAD|.$$

V něm je schována i rovnost $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD|$, která dokazuje rovnoramennost trojúhelníku ACD.

Povzbuzení na konec

Geometrii je těžké se naučit a jen cvičení dělá mistra.[5]

Pokud jsi toho o hledání úhlů v obrázcích moc nevěděl(a) a dočetl(a) ses až sem, tak si můžeš pogratulovat, protože jsi udělal(a) důležitý první krok.

Hodně užitečných úhlů a hodně štěstí při řešení úloh Ti přeje PraSátko! :)

[5]Pokud chceš mrknout na těžší až velmi zapeklité úlohy s obvodovými a úsekovými úhly, je dobrým zdrojem archiv matematické olympiády – namátkou např. B62-II-4, A56-II-3, A62-I-5, A63-III-5 (řazeno dle obtížnosti).