Jak číst seriál

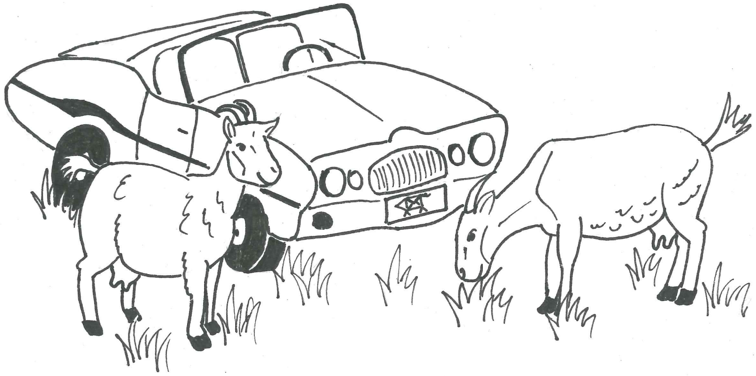
Milý příteli,
nejistota je ústřední součástí světa, ve kterém žijeme. Pokusy vypořádat se s tímto faktem zahrnují věštění z karet, astrologii, Murphyho zákony a také teorii pravděpodobnosti – matematickou disciplínu, která je tématem letošního seriálu.

Věříme, že s pravděpodobností ses už někdy setkal(a) a máš i jistou intuici, jak se má chovat. Zdání ovšem často klame! Během našeho trojdílného putování tak narazíme na všemožná tvrzení, která na první pohled budou vypadat neintuitivně nebo dokonce paradoxně. A i když se Ti možná nějakou chvíli bude zdát, že pravděpodobnost v konečném důsledku vždy spočívá jenom v tupém počítání možností, postupem času se dopracujeme k fascinujícím principům, které jsou onomu tupému počítání na hony vzdálené. Pravděpodobnost se také vyznačuje tím, že úzce souvisí s mnohými dalšími obory, matematickými i nematematickými. Na konci celého seriálu bychom Ti rádi některé takové souvislosti ukázali.

Také jsme do seriálu zařadili několik výletů pro nadšence či znalce, které ukazují složitější použití daných metod nebo předpokládají nějaké hlubší znalosti. Takové kapitoly značíme hvězdičkou (*). Žádné z těchto odboček nicméně nebudou nutné k pochopení zbytku textu. Při prvním čtení seriálu Ti doporučujeme vyhnout se hvězdičkovaným částem, pokud Ti nehvězdičkované části nepřijdou vyloženě jednoduché; vrátit se k nim můžeš vždy po dočtení daného dílu.

V seriálu se vyskytuje celá řada řešených úloh, na kterých vysvětlujeme nové principy. Stejně tak jsme pro tebe přichystali ještě více úloh, které si zkus vyřešit samostatně. Pokud nebudeš vědět, jak na ně, hledej na konci textu nápovědu, případně jejich stručná řešení. Pro pochopení seriálu rozhodně není nutné vyřešit všechny úlohy, ale doporučujeme se v každé kapitole alespoň o pár z nich pokusit.

Letos pro Tebe seriál píší Danil Koževnikov a Vašek Rozhoň, obrázky k němu kreslí Hanka Pařízková. V případě jakýchkoli nejasností, nebo pokud v seriálu třeba najdeš chybu, nás neváhej kontaktovat na mailech *dk581@cam.ac.uk* (Danil) a *vaclavrozhon@gmail.com* (Vašek). Teď už ale pojďme na to!



Pravděpodobnost I. – Společenstvo elementárních jevů

Kostky jsou vrženy.
Julius Caesar

Když házeš kostkou, i nepatrná počáteční odchylka v hodu obvykle znamená, že padne jiné číslo. Snaha fyzikálně odvodit, jaká čísla budou padat, je v podstatě marná, takže se obvykle spokojíme s mnohem jednodušším modelem: předpokládáme, že na „férové“ kostce budou padat všechna čísla přibližně stejně často.

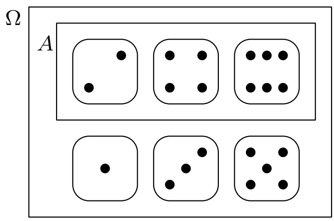
Jakmile máme tento předpoklad, můžeme kupříkladu hned nahlédnout, že sudá čísla budou padat přibližně stejně často jako lichá, neboť stěn se sudým počtem ok je stejně jako těch s lichým.

Z předpokladu, že daný pokus může skončit různě a všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné, budeme vycházet hodně často (třeba při házení mincí, vybírání kuličky ze sáčku, …). Pojďme si proto nyní pro tento případ zavést značení.

Pravděpodobnostní prostor je množina všech možných výsledků daného pokusu; v případě házení kostkou to je šest jejích stěn. Z historických důvodů se pravděpodobnostní prostor obvykle značí velkým řeckým písmenem omega: Ω.

Elementární jev je prvek pravděpodobnostního prostoru. Prozatím předpokládáme, že každý elementární jev (tedy možný výsledek pokusu) nastává stejně často. V našem případě máme šest elementárních jevů, můžeme tedy psát $\Omega = \{\text{padla jednička}, \text{padla dvojka}, \ldots, \text{padla šestka}\}$.

Jev je nějaká množina elementárních jevů, čili podmnožina pravděpodobnostního prostoru. V našem případě jsme pracovali s jevem „padlo sudé číslo“. Jevy se obvykle značí velkými písmeny $A, B, C, \ldots$ Označíme-li zmíněný jev písmenkem A, máme $A = \{\text{padla dvojka}, \text{padla čtyřka}, \text{padla šestka}\}$.



Pravděpodobnost jevu je v tomto případě poměr počtu prvků jevu ku počtu prvků celého prostoru. Pravděpodobnost budeme značit velkým tiskacím P, tedy $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Všimni si, že musíme předpokládat, že náš prostor je konečný, jinak by dělení jeho velikostí nedávalo smysl.

Pravděpodobnost jevu je tak vždy číslo od nuly do jedničky, přičemž pravděpodobnost vyjde 0 právě tehdy, je-li zkoumaným jevem prázdná množina, a vyjde 1 právě tehdy, je-li odpovídajícím jevem celý prostor.

Jak už jsme viděli na příkladu kostky, intuitivně pravděpodobnost chápeme tak, že pokud bychom daný pokus (např. házení kostkou) mnohokrát zopakovali, bude poměr úspěšných pokusů (těch, kdy nastal daný jev) vůči všem pokusům přibližně roven spočítané pravděpodobnosti $\mathrm{P}(A)$. Všimni si vágního slova „přibližně“. Pokud hodíme kostkou tisíckrát, předpokládáme, že zhruba pětsetkrát padne sudé číslo. Ale jak asi správně tušíš, pravděpodobnost, že padne přesně pětsetkrát, bude mizivá. Takže ačkoli je správné si tuto intuici držet, je důležité, že pravděpodobnost je pouze abstraktní pojem, kterým si pomáháme při popisu daného experimentu.

Množiny

Jak sis jistě všiml(a), v teorii pravděpodobnosti pracujeme s množinami. Musíme tedy vědět, co množiny vůbec jsou a jak se s nimi pracuje. Předpokládáme, že ses s nimi už někdy setkal(a), takže nyní následuje pouze bryskní opakování.[1]

Pro účely seriálu si vystačíme s intuitivní představou, že množina je prostě souborem nějakých objektů (věcí, čísel nebo klidně i jiných množin).[2] Množina může být určena jak explicitně, tj. výčtem prvků (například prázdná množina nebo $\{1, 2, \text{lachtan}\}$), tak implicitně, tedy pomocí nějaké společné vlastnosti prvků (například množina všech sudých přirozených čísel nebo $(0, 1)$, interval reálných čísel mezi 0 a 1). Pojďme si nyní zopakovat základní množinové operace, jejichž znalost bude při čtení nezbytná.

Mějme dvě množiny A a B. Jejich průnikem $A \cap B$ je množina, která obsahuje právě prvky obsažené v obou množinách A, B. Jejich sjednocením $A \cup B$ je množina prvků obsažených v alespoň jedné množině. Rozdílem $A \setminus B$ je množina obsahující ty prvky A, které nejsou v B.

Vzhledem k pravděpodobnostnímu prostoru Ω pak můžeme definovat doplněk jevu A jako $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Speciálně doplňkem Ω je prázdná množina $\emptyset$.

Obsahuje-li B všechny prvky, které obsahuje A (a možná nějaké další), říkáme, že A je podmnožinou B, a píšeme $A \subseteq B$.

Obecně platí, že provádíme-li více množinových operací za sebou, může záležet na pořadí (například si zkus rozmyslet, že obecně $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$). V takových případech využíváme závorky k označení toho, která operace se provede jako první. Velmi často však na pořadí vyhodnocování záležet nebude, například když nás zajímá pouze průnik či sjednocení více množin.

Mezi zavedenými operacemi platí různé vztahy, a pokud si jimi nejsi jistý (jistá), hodí se nakreslit si tzv. Vennův diagram[3]. Na rozehřátí si dej následující rozcvičku:

Úloha 1. Rozmysli si, že pro libovolné množiny A, B, C platí:

(1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
(3) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
(4) $(A \setminus (A \cap B)) \cup B = A \cup B$;
(5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Pravděpodobnost se k množinám a k množinovým operacím chová vyloženě pěkně. Pokud máme dva jevy A a B, jejich průnik $A \cap B$ odpovídá tomu, že nastaly zároveň oba jevy A, B. Například průnikem jevů $\{2, 4, 6\}$ (padlo sudé číslo) a $\{4, 5, 6\}$ (padlo číslo větší než tři) je jev $\{4, 6\}$, což skutečně odpovídá tomu, že na kostce padlo nějaké sudé číslo větší než 3. Obdobně sjednocení

[1] Jestliže se ztrácíš, podívej se třeba na stránku *https://goo.gl/zVsrR3*.

[2] Korektní zavedení množin jako matematických objektů najdeš například ve druhém dílu seriálu z 35. ročníku, pro naše účely by ale tento přístup byl spíše matoucí.

[3] Pokud ses s těmito diagramy ještě nepotkal(a), podívej se třeba na *https://goo.gl/eJz43s*.

$A \cup B$ odpovídá tomu, že nastal alespoň jeden z jevů A, B, rozdíl $A \setminus B$ znamená, že nastal jev A, ale nikoliv B, a konečně doplněk $\overline{A}$ odpovídá tomu, že jev A nenastal.

Při počítání pravděpodobnosti se pak hodí znát několik vlastností, které jsme shrnuli do následující úlohy. Zkus si projít všechny položky, a pokud si nebudeš jistá (jistý), proč platí, podívej se na řešení.

Úloha 2. Rozmysli si, že máme-li pravděpodobnostní prostor Ω a v něm jevy A, B (případně $A_1, \dots, A_n$ či $B_1, \dots, B_n$), pak platí:

(1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
(2) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$;
(3) je-li $A \subseteq B$, je $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$;
(4) $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$, přičemž jsou-li jevy po dvou disjunktní (neboli pro každé $1 \leq i < j \leq n$ platí $A_i \cap A_j = \emptyset$), nastává rovnost;
(5) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$;
(6) $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$ pro kterékoliv B;
(7) obecně platí-li $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, máme $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$; pokud jsou navíc jevy B_i po dvou disjunktní, máme $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B_1) + \mathrm{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathrm{P}(A \cap B_n)$.

Kombinatorické počítání

Pět ze čtyř lidí má problémy se zlomky.
Steven Wright

Určování pravděpodobnosti nějakého jevu často vede na prosté počítání, kolika způsoby se něco mohlo stát. Takovému počítání se obvykle říká kombinatorika a my si teď na příkladech ukážeme některé základní principy, které se při něm mohou hodit. Bohužel nemůžeme být moc obšírní a ani to v našem případě nebude zapotřebí – podrobnější úvod najdeš třeba v PraSečím seriálu z 27. ročníku.

Jak jsme si již řekli, nejpřímočařejší způsob, jak určit pravděpodobnost nějakého jevu, je prostě určit počet vyhovujících výsledků a vydělit ho celkovým počtem možných výsledků. K tomu se často hodí znalost některých kombinatorických pojmů jako permutace či kombinační čísla. Ilustrujeme si je na následujících příkladech.

Úloha 3. (úvod do permutací) Dvanáct orgů, mezi nimi i Danil a Vašek, přišlo do obchodu, načež si v náhodném pořadí stoupli do fronty na banány. Jaká je pravděpodobnost, že Danil s Vaškem budou stát vedle sebe, aby si mohli povídat o seriálu?

Řešení. Ještě před tím, než se pustíme do řešení úlohy, si rozmyslíme, co v daném případě tvoří pravděpodobnostní prostor. Jeho elementárními jevy jsou všechna různá uspořádání dvanácti orgů do fronty. Pojďme si nyní spočítat, kolik jich je.

Představme si, že bychom orgy do fronty vybírali postupně. Na první místo máme dvanáct možností, na druhé jich bude už jen jedenáct a tak dále, na jedenácté místo zbudou dvě možnosti a dvanáctý org bude už jednoznačně určen zbylými jedenácti. Celkem tedy máme $12 \cdot 11 \cdots 2 \cdot 1$ možností. Pro přehlednost se pro součin prvních n přirozených čísel používá název **faktoriál** a zápis $n!$. V tomto případě je tedy elementárních jevů $12!$.

Fronta je typickým příkladem **permutace**, což není nic jiného než uspořádání nějakého počtu různých prvků za sebe (často jsou těmito objekty prostě čísla $1, 2, \dots, n$). Protože výše uvedený postup lze použít pro libovolně dlouhou frontu, vlastně jsme si rozmysleli, že existuje právě $n!$

permutací na n prvcích. Zvykem je dodefinovat $0! = 1$.[4]

Teď zbývá určit, kolik je vyhovujících možností, neboli počet elementárních jevů spadajících do jevu „Danil a Vašek stojí vedle sebe“. Pokud naši hrdinové stojí vedle sebe, pak první z nich určitě bude někde mezi 1. a 11. místem. Máme tedy 11 možností, kde se může tato dvojice nacházet ve frontě. Ve chvíli, kdy už víme, kde přesně se naše dvojice nachází, existují vždy dva způsoby, v jakém pořadí za sebou Danil a Vašek stojí (buď je první Danil, nebo Vašek). Nakonec existuje 10! možností, jak mohou stát zbylí orgové ve zbytku fronty. Hledaný počet je proto $11 \cdot 2 \cdot 10! = 2 \cdot 11!$ a pravděpodobnost ze zadání vyjde $\frac{2 \cdot 11!}{12!} = \frac{2 \cdot 11!}{12 \cdot 11!} = \frac{1}{6}$.

Protože při řešení tohoto typu úloh je často těžké spočítat konkrétní číslo, za řešení považujeme i výrazy obsahující faktoriál nebo jiný dlouhý součin. Občas budeme pro lepší představu uvádět i přibližné numerické výsledky, což ale v soutěžních úlohách rozhodně dělat nemusíš.

Úloha 4. Jaká je pravděpodobnost, že po náhodném prohození pořadí písmen ve slově PRAVDĚPODOBNOST dostaneme opět slovo PRAVDĚPODOBNOST?

Úloha 5. Deset lachtanů a devět tuleňů si v náhodném pořadí stouplo do fronty. Jaká je pravděpodobnost, že žádní dva lachtani nestojí vedle sebe?

Pokud už rozumíš permutacím, bude pro Tebe hračka pochopit, co to jsou kombinační čísla. Znovu si to předvedeme na příkladu.

Úloha 6. (úvod do kombinačních čísel) Dvacet orgů PraSátka přišlo na zkoušku z předmětu Pravděpodobnost a statistika[5]. Výsledek zkoušky je značně náhodný, takže všechny možnosti, jak zkouška mohla dopadnout (každý org buď zkouškou prošel, nebo ne), jsou stejně pravděpodobné. Jaká je pravděpodobnost, že uspělo právě osm orgů?

Řešení. Ze všeho nejdřív si musíme zase rozmyslet, jak přesně vypadá náš pravděpodobnostní prostor. Tentokrát je tvořen všemi různými podmnožinami dvacetiprvkové množiny orgů, neboť výsledek zkoušky je jednoznačně dán množinou orgů, kteří ji udělali. Kolik obsahuje náš prostor elementárních jevů? Pro každého orga se nezávisle rozhodujeme, zda ve zkoušce uspěl, nebo ne. Dvacet výběrů ze dvou možností má dohromady 2^{20} možných výsledků, takže tentokrát sestává náš prostor z $2^{20} = 1\,048\,576$ elementárních jevů.

Proto nám teď stačí pouze spočítat, kolik různých osmic (přičemž nezáleží na pořadí) můžeme z dvaceti orgů vytvořit. Takovou osmici orgů můžeme vybrat tak, že nejprve vybereme prvního orga (20 možností), pak druhého (19 možností) atd. Počet takovýchto výběrů je $20 \cdot 19 \cdots 13$. Sice jsme tímto způsobem prošli všechny osmice, ale každou jsme započítali několikrát! Konkrétně lze každou osmici seřadit 8! způsoby a přesně tolikrát jsme ji započítali. Proto je počet různých osmic roven $\frac{20 \cdot 19 \cdots 13}{8!} = \frac{20!}{12!8!}$. Náš předchozí postup by se dal zobecnit na důkaz toho, že pro $n \geq k \geq 0$ je počet způsobů, jak z n prvků vybrat nějakých k, roven $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. Tento výraz je potřeba tak často, že dostal název **kombinační číslo** a zkráceně se zapisuje $\binom{n}{k}$; čteme jej „n nad k“.[6] Kýžená pravděpodobnost tedy vyjde $\binom{20}{8}/2^{20} \doteq 0{,}12$.

Úloha 7. Danil vlastní třicet plyšových tuleňů. Radovi, který nemá tuleně tak moc v oblibě, přijde, že jenom deset z nich je roztomilých. Když si Danil na sous vezme pět náhodných tuleňů, jaká je pravděpodobnost, že všichni vybraní plyšáci budou podle Rada roztomilí?

Úloha 8. Michal dostal bonboniéru ve tvaru čtverce 10×10 a náhodně z ní snědl deset bonbónů. Jaká je pravděpodobnost, že:

(1) Z každého řádku vybral právě jeden bonbón?

[4] To se Ti může zdát zvláštní, ale skutečně existuje právě jeden způsob, jak uspořádat prázdnou množinu. :-)

[5] Lidově se jí také říká paštika.

[6] Díky tomu, že jsme položili $0! = 1$, platí tenhle vzoreček i v okrajových případech, neboli $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Skutečně máme právě jednu možnost, jak z n prvků vybrat n prvků, a také, jak z nich nevybrat nic.

(2) Z každého řádku i sloupce vybral jeden bonbón?

Úloha 9. (těžká) Na každé políčko hracího plánu $n \times n$ náhodně nakreslíme šipku doprava nebo dolů a na levé horní políčko postavíme robota. Robot se vždy posouvá na sousední políčko ve směru šipky. Jaká je pravděpodobnost, že robot opustí hrací plán krokem z pravého dolního políčka?

(Náboj 2013)

Občas je přímé vyčíslování počtu vyhovujících možností příliš pracné a zdlouhavé. Nemusíš však zoufat! Existuje totiž řada užitečných triků, které Ti v takových situacích mohou ulehčit život. Můžeme se například podívat na pravděpodobnost doplňkového jevu, která může být mnohem jednodušší na vyjádření.

Úloha 10. Viki má doma šest párů bot. Když se jednoho rána probudil, poslepu náhodně vybral pět bot. Jaká je pravděpodobnost, že je mezi nimi alespoň jeden pár?

Řešení. Počítat pravděpodobnost, že se objevil alespoň jeden pár, zní dost složitě. Spočtěme místo toho pravděpodobnost, že se mezi botami žádný pár neobjevil. Vybíráme-li pět různých bot, nejprve si musíme z šesti typů bot vybrat nějakých pět – to lze $\binom{6}{5} = 6$ způsoby. Dále si pro každý typ musíme vybrat, zda bereme levou, či pravou botu. Celkový počet způsobů je proto $6 \cdot 2^5$ a pravděpodobnost, že se žádný pár neobjevil, je tak $\frac{6 \cdot 2^5}{\binom{12}{5}} = \frac{8}{33}$. Nás zajímá pravděpodobnost doplňkového jevu, a ta je rovna $1 - \frac{8}{33} = \frac{25}{33}$.

Úloha 11. Anička si desetkrát hodila férovou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že jí padla aspoň jedna jednička?

V úlohách se též občas setkáváme s jistou formou symetrie, což nám může také značně zjednodušit práci. V jedné z předchozích úloh jsme například vybírali náhodnou pětici ze skupiny třiceti tuleňů. Formálně to znamená, že si představíme pravděpodobnostní prostor obsahující všech $\binom{30}{5}$ pětic a z něj jednu vybereme. Intuitivnější představa je, že nejprve z 30 tuleňů vybereme jednoho, ze zbylých 29 druhého atd. Toto je jiný proces než vybrání pětice z množiny pětic, nicméně dává úplně stejný výsledek. To proto, že všichni tuleni jsou stejní a jenom prostým přejmenováním tuleňů získáme z nějaké pětice libovolnou jinou. Takže každá pětice tuleňů je vybrána se stejnou pravděpodobností, neboť přejmenování tuleňů nemůže změnit pravděpodobnost, že danou pětici vybereme. Vybírání každé pětice tuleňů se stejnou pravděpodobností je ale přesně to, co děláme v prvním procesu.

Podobné úvahy, kdy si uvědomíme, že dva způsoby výběru jsou vlastně stejné, se dají často s úspěchem využít. Například v následující úloze používáme užitečné pozorování, že pokud zamícháme černé a bílé králíky a náhodně je seřadíme, pravděpodobnost, že první, druhý, ..., poslední králík je černý, musí vyjít pro všechny králíky stejně.

Úloha 12. V klobouku kouzelníka Pokustóna se krčí osm černých a čtyři bílí králíci. Náhodně z klobouku vytáhneme šest králíků. Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažený králík bude černý?

(Náboj 2010)

Řešení. Stačí si rozmyslet, že kýžená pravděpodobnost vyjde stejně pro prvního i posledního králíka. Potom bude jasné, že odpověď je $\frac{8}{12}$.

Vybírání králíků si lze představit tak, že vybereme náhodnou permutaci králíků (neboli postavíme je do řady) a pak postupně vytáhneme prvních šest králíků v řadě. Víme, že v $\frac{8}{12}$ případů bude první králík černý. Platí ale, že pokud v každé možné permutaci prohodíme prvního a šestého králíka, dostaneme zase všechny permutace. To znamená, že počet permutací, v kterých je první králík černý, je stejný jako počet permutací, v kterých je šestý králík černý. Šestý králík tak bude černý s pravděpodobností $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Úloha 13. Áďa a Bára hrají kostky. Áďa hází férovou dvacetistěnnou kostkou, zatímco Bára si třikrát hodí šestistěnnou kostkou a sečte čísla, která na ni padnou. Je větší pravděpodobnost, že Áďa hodí víc než Bára, nebo že Bára hodí víc než Áďa?

Úloha 14. (těžká) Do stomístného letadla nastupuje 100 lidí, každý má místenku na jedno sedadlo. První nastupující ale ztratil svou místenku, a tak si sedne náhodně. Každý další si sedne na svoje sedadlo, je-li volné, a v opačném případě si sedne na náhodné volné sedadlo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední příchozí si sedne na svoje sedadlo?

Úloha 15. (těžká) Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelek a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón rozbalí a sní – každý další bonbón vždy rozbalí, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snědeným bonbónem bude karamelka? (MKS 32–3j–6)

Nezávislost

Ačkoli už v seriálu nějakou dobu mluvíme o pravděpodobnosti, nedělali jsme zatím nic objevnějšího než počítání možností. Nyní se budeme bavit nezávislostí, což už je typický pravděpodobnostní koncept. Představ si, že hodíme naráz dvěma férovými mincemi (tedy orel i panna padají se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna? Jak správně tušíš, vyjde $\frac{1}{4}$. Přibližně v polovině případů totiž bude panna na první minci a přibližně v polovině případů z této poloviny bude panna na druhé minci.

Tato úvaha samozřejmě funguje obecně. Předpokládejme, že jsme n-krát zopakovali nějaký pokus a víme, že v $p \cdot n$ případech ($p \leq 1$) nastal jev A a v $q \cdot n$ případech ($q \leq 1$) nastal jev B. Potom očekáváme, že pokud na sobě jevy A, B nijak nezávisí, nastanou oba zároveň přibližně v $p \cdot q \cdot n$ případech. To proto, že omezíme-li se na $p \cdot n$ případů, kdy nastane jev A, očekáváme, že v rámci těchto případů bude nastávat jev B zhruba se stejnou frekvencí, s jakou nastával v rámci všech n pokusů.

Abychom nezávislost mohli používat, musíme si přesně definovat, co to je. Úvahu o tom, že pro nezávislé jevy se pravděpodobnost průniku těchto jevů dostane jako součin jejich pravděpodobností, tedy otočíme a naopak pomocí tohoto vzorečku nezávislost formálně definujeme.

Definice. Řekneme, že dva jevy A, B jsou **nezávislé**, pokud

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Jakmile máme definici, můžeme mluvit o tom, že dva jevy jsou nezávislé, i když to na první pohled třeba vůbec není jasné. Stačí ověřit, že pro ně platí předchozí vzoreček. Například vytáhneme-li si z balíčku mariášových karet jednu náhodně, jsou jevy „karta je eso“ a „karta je srdcová“ na sobě nezávislé, neboť pravděpodobnost esa je $\frac{1}{8}$, pravděpodobnost srdcové karty je $\frac{1}{4}$ a pravděpodobnost srdcového esa je $\frac{1}{32} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$.

Úloha 16. Dokaž, že jsou-li jevy A, B nezávislé, potom jsou nezávislé i dvojice jevů $\overline{A}, B$, dále $A, \overline{B}$ a také $\overline{A}, \overline{B}$.

Jestliže chceme definovat nezávislost pro více jevů, musíme být opatrní. Co by například měly splňovat tři nezávislé jevy A, B, C? Určitě chceme, aby

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C).$$

Zároveň by mělo platit, že pokud trojice A, B, C je nezávislá, tak i tři dvojice (A, B), (B, C) a (A, C) budou nezávislé podle naší předchozí definice pro dvojice jevů. Tedy bychom rádi, aby zároveň platilo

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C).$$

Asi Tě teď napadá, jestli je opravdu potřeba definovat nezávislost tří jevů pomocí čtyř rovnic. Opravdu to potřeba je. Podívej se na následující dvojici úloh.

Úloha 17. Petr si dvakrát hodil kostkou. Nechť A je jev „na první kostce padlo 2“, B je jev „součet ok na obou kostkách byl 7“ a C je jev „na druhé kostce padlo 3“. Rozmysli si, že všechny dvojice jevů (A, B), (B, C) a (A, C) jsou nezávislé, ale celá trojice nezávislá není.

Úloha 18. (těžká) Najdi tři jevy A_1, A_2, A_3, které splňují $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, ale přitom ani jedna dvojice jevů (A_1, A_2), (A_2, A_3) a (A_1, A_3) není nezávislá.

Pro tři jevy tedy dává smysl nezávislost definovat tak, že musí být splněny čtyři rovnice, každá pro jednu podmnožinu jevů velikosti alespoň dva. Možná už tušíš, jak bude vypadat obecná definice. Budeme prostě požadovat, aby obdobný vzoreček platil pro v podstatě libovolnou podmnožinu jevů.

Definice. Jevy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou **nezávislé** právě tehdy, když pro každou jejich podmnožinu $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_l}$, $2 \leq l \leq k$, platí

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_l}).$$

Úloha 19. Kolik rovnic definuje nezávislost k jevů? Co by se stalo, kdybychom v definici povolili případ $l = 1$?

Jakkoli může definice vypadat složitě, využití nezávislosti je obvykle velice intuitivní a často si ani neuvědomujeme, že ji vlastně používáme. Ukažme si nyní typický příklad.

Úloha 20. Množina X má n prvků. Nechť A, B jsou dvě náhodné podmnožiny X. Jaká je pravděpodobnost, že A je podmnožina B? (Náboj 2010)

Řešení. Vybrat náhodnou podmnožinu znamená, že z pravděpodobnostního prostoru obsahujícího 2^n prvků (každý reprezentuje jednu podmnožinu) vybereme náhodně jeden prvek. Užitečnější představa je ale ta, že se postupně pro každý prvek X nezávisle náhodně rozhodneme, zda ho vezmeme, či ne. Z nezávislosti jednotlivých výběrů totiž vyplývá, že pravděpodobnost výběru libovolné podmnožiny je přesně $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n$.

Vybrat dvě náhodné podmnožiny znamená, že náš pravděpodobnostní prostor má dokonce $(2^n)^2$ prvků – každý odpovídá jedné dvojici podmnožin. Znovu ale můžeš nahlédnout, že ekvivalentní způsob je, že se pro každý prvek nezávisle náhodně rozhodneme, zda jej vezmeme do první a zda jej vezmeme do druhé množiny.

Nyní si už jen stačí uvědomit, že při rozhodování o jednom prvku množiny se s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ rozhodneme, že jej vybereme do A, ale nikoli do B. V tomto případě pak A nemůže být podmnožinou B. Opačný jev nastane s pravděpodobností $\frac{3}{4}$. To, že A bude podmnožinou B, pak znamená, že nastalo n nezávislých jevů, každý s pravděpodobností $\frac{3}{4}$, výsledek je tedy $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Pozor, zatímco výběr náhodné množiny dává typický příklad nezávislých jevů, setkali jsme se už i s případem, kde výběr nezávislý není.

Úloha 21. Dvanáct orgů, mezi nimi i Danil a Vašek, přišlo do obchodu, načež si v náhodném pořadí stoupli do fronty na banány. Rozmysli si, že jevy „Vašek stojí na i-té pozici“ a „Danil stojí na j-té pozici“ nejsou nezávislé pro žádná i a j.

To by mělo dávat smysl: pokud víme, kde je Danil, dostali jsme nápovědu o Vaškově pozici, neboť ten nutně musí být jinde! Intuice tedy říká, že dané jevy na sobě „závisí“.

Úloha 22. O jevech A, B, C víme, že A, C jsou nezávislé, B, C jsou nezávislé a A, B jsou disjunktní. Dále $P(A \cup C) = \frac{2}{3}$, $P(B \cup C) = \frac{3}{4}$ a $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$. Kolik je $P(A), P(B)$ a $P(C)$?

Úloha 23. Uvaž pravděpodobnostní prostor na osmi prvcích. Najdi čtyři jevy A, B, C, D takové, že všechny trojice těchto jevů jsou nezávislé, ale čtveřice nezávislá není.

Vylepšená definice prostoru

Ukázali jsme si již několik příkladů, ve kterých se házelo férovou kostkou. Co když ale kostka férová není? Může se třeba stát, že šestka padne v 30 procentech případů, zatímco jednička nebude padat skoro vůbec.[7] V takovém případě se hodí přiřadit prvkům pravděpodobnostního prostoru nějaké váhy. Pořád ale budeme požadovat, aby se všechny váhy sečetly na jedničku. Naše definice pravděpodobnostního prostoru tohle ale bohužel neumožňuje. Pojďme ji tedy upravit.

Definice. **Pravděpodobnostní prostor** je konečná množina, jejíž každý prvek (tedy elementární jev) má přiřazené kladné reálné číslo, přičemž součet čísel všech prvků je 1. Pro jev A definujeme jeho **pravděpodobnost** $\mathrm{P}(A)$ jako součet čísel odpovídajících elementárních jevů.

Náš předchozí způsob práce s pravděpodobností byl speciálním případem této definice. Až do této chvíle jsme prostě každému elementárnímu jevu přiřazovali číslo $1/|\Omega|$. Protože je tento původní způsob, který jsme dosud používali, hodně častý, říká se mu **klasický** pravděpodobnostní prostor. Pokud někde řekneme, že „z množiny vybereme prvek náhodně“, tak tím automaticky myslíme, že každý prvek je vybrán se stejnou pravděpodobností, tedy pracujeme s klasickým prostorem.

Nyní už ale zpátky k naší nové definici. Všimni si, že všechno, co jsme doposud dokázali pro klasické prostory, platí pro všechny pravděpodobnostní prostory. Speciálně se podívej na úlohu 2 a rozmysli si, že všechny body pořád platí. Ani s naší definicí nezávislosti není žádný problém.

Použití nové definice si ukážeme na následujícím příkladu.

Úloha 24. Kenny, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Kenny se s nimi vsadil o kilo čokolády, že vyhraje dvakrát po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru? Jednotlivé hry jsou na sobě nezávislé.

Řešení. Nechť p je pravděpodobnost, že Kenny vyhraje zápas s Frantou a q pravděpodobnost, že vyhraje zápas s Jardou. Máme $p > q$. Začněme s první možností, tedy nejprve zápas s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou. Odpovídající pravděpodobnostní prostor má 8 elementárních jevů, neboť v každém ze tří zápasů jsou dvě možnosti, jak daný zápas mohl dopadnout. Každý elementární jev ale nastává s jinou pravděpodobností. Pravděpodobnost, že Kenny vyhraje všechny tři zápasy, je z nezávislosti rovna pqp, pravděpodobnost, že dvakrát vyhraje a pak prohraje, je $pq(1-p)$ a pravděpodobnost, že prohraje a pak dvakrát vyhraje, je $(1-p)qp$. Celková pravděpodobnost, že Kenny vyhraje dvakrát za sebou, je $pqp + 2(1-p)qp = pq(2-p)$.

Obdobně spočítáme, že ve druhém případě je pravděpodobnost dvou výher za sebou rovna $pq(2-q)$. Protože $p > q$, je druhý výraz větší, tedy Kennymu se vyplatí hrát dvakrát s Jardou nehledě na to, že Jarda hraje lépe.

Úloha 25. Vandal a moderátor upravují článek na Wikipedii. Na začátku byl článek bez chyby. Každý den přidá vandal jeden chybný údaj. Na konci každého dne má moderátor $2/3$ šanci na nalezení každé jednotlivé chyby, která ještě v článku je. Jaká je pravděpodobnost, že po třech dnech bude článek bezchybný? (Náboj 2012)

Úloha 26. Šance, že stopařka Martina v nejbližších 20 minutách stopne auto, je $609/625$. Pokud je pravděpodobnost stopnutí auta každou minutu stejná, jaká je pravděpodobnost, že Martina stopne auto v nejbližších pěti minutách? Auta jezdí nezávisle na sobě. (Náboj 2012)

[7] Ne, neřekneme, kde se takové kostky dají sehnat.

Podmíněná pravděpodobnost

V poslední nehvězdičkové sekci prvního dílu si povíme o podmíněné pravděpodobnosti, což je koncept, který nám umožňuje vyznat se v situacích, kdy pracujeme s několika jevy, které nejsou nezávislé, a tedy mezi sebou interagují. Nejprve si ukážeme tzv. Monty Hallův problém, který patří nepochybně k nejznámějším a nejpřekvapivějším úlohám z oblasti pravděpodobnosti.

Monty Hallův problém

To jsou paradoxy, co?
Václav Havel

Úloha 27. (Monty Hallův problém) Ve finále jisté televizní soutěže je za dvěma dveřmi koza a za třetími auto, přičemž soutěžící chce auto. Postaví se tedy k jedněm dveřím, načež moderátor otevře jedny dveře, za kterými je koza – jiné než ty, ke kterým se soutěžící postavil – a pak dá soutěžícímu možnost ještě svou volbu dveří změnit. Pokud má moderátor na výběr z více možností, vybere si náhodně. Vyplatí se soutěžícímu volbu změnit?

Tato soutěž mimochodem opravdu existovala, stejně jako její moderátor Monty Hall. Zkus si nad úlohou sám (sama) popřemýšlet! Záleží například vůbec na rozhodnutí soutěžícího?

Zádrhel, který je v úloze skrytý, si nyní ukážeme na její následující variantě:

Úloha 28. (Monty se stádem koz) Stejná soutěž, ale před soutěžícím je 50 dveří, přičemž za 49 z nich je koza. Poté, co soutěžící ukáže na dveře, Monty otevře 48 dveří, za kterými je koza (dveře vybrané soutěžícím nechá zavřené). Vyplatí se soutěžícímu svou volbu změnit?

Řešení. Pravděpodobnost, že jsme si při prvním výběru vybrali dveře s autem, je nyní opravdu mizivá – pouhá dvě procenta. S největší pravděpodobností tedy je za vybranými dveřmi koza. V takovém případě nám ale Monty tím, že otevřel zbylé dveře kromě jedněch, právě „ukázal“, kde je auto! Pokud tedy v tomto případě změníme, vyhrajeme auto s pravděpodobností 98 %. Soutěžícímu se proto vyplatí svoji volbu změnit.

Původní problém funguje úplně stejně, ačkoli tu princip toho, že nám Monty „ukázal“, kde je auto, není tak patrný. Pojďme si jej tedy vyřešit obdobně jako jeho předchozí variantu.

Řešení úlohy 27. Předpokládejme, že jsme si nejprve vybrali první dveře – vzhledem k tomu, že auto je za náhodnými dveřmi, je jedno, co si vybereme na začátek. Levá část obrázku ukazuje, že po našem výběru pracujeme s klasickým pravděpodobnostním prostorem se třemi prvky odpovídajícími poloze auta.

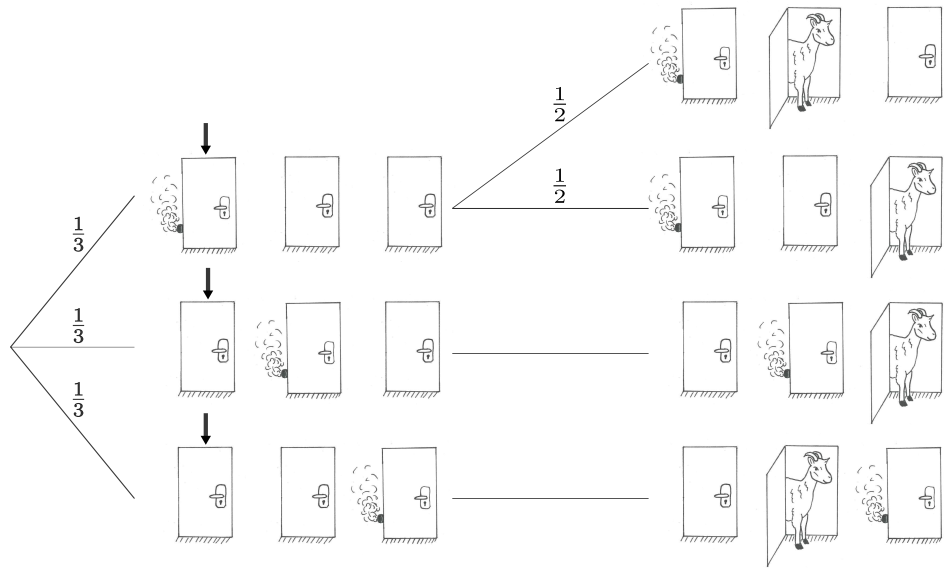
Po Montyho náhodném rozhodnutí náš pravděpodobnostní prostor obsahuje dokonce čtyři prvky, neboť v případě, kdy je za námi vybranými dveřmi auto (horní větev na obrázku), si Monty náhodně vybere jedny ze dvou zbylých dveří.

Můžeme si nicméně všimnout, že ať už si Monty v tomto případě (horní větev na obrázku) vybere kterékoli ze zbývajících dveří, platí, že prohrajeme právě tehdy, když změníme svou volbu.

Naopak ale platí, že ve zbylých dvou případech (střední a dolní větev na obrázku) vyhrajeme právě tehdy, když změníme svou volbu.

Pokud tedy změníme vybrané dveře, vyhrajeme s pravděpodobností 2/3. Soutěžícímu se proto vyplatí změnit svou volbu.[8]

[8] Pokud tomuto faktu pořád nevěříš, můžeme Tě ujistit, že byl experimentálně potvrzen v pořadu Bořiči mýtů.



Úloha 29. Rozmysli si, že strategie „vždy změním“ funguje úplně stejně i ve chvíli, kdy se Monty nerozhoduje náhodně.

Definice podmíněné pravděpodobnosti

Jak jsme viděli na příkladu úlohy o Monty Hallovi, může se stát, že chceme znát pravděpodobnost nějakého jevu (za vybranými dveřmi je auto) za podmínky, že nastal nějaký jiný jev (Monty otevřel druhé dveře). Podmíněná pravděpodobnost nám umožňuje přistoupit k úlohám tohoto typu.

Vraťme se k pravděpodobnostním prostorům; spočítat pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, prostě znamená, že místo celého pravděpodobnostního prostoru Ω spočítáme pravděpodobnost jevu A vůči menšímu prostoru určenému množinou B. Zbylé elementární jevy totiž nemohou nastat.

Jenže součet pravděpodobností elementárních jevů uvnitř množiny B už není 1, nýbrž $\mathrm{P}(B)$. Abychom tedy dostali správnou hodnotu (což má být poměr „velikosti“ $A \cap B$ oproti „velikosti“ nového prostoru B), musíme spočítat podmíněnou pravděpodobnost jako podíl $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

Definice. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky, že nastal jev B, definujeme jako

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Všimni si, že definice dává smysl jen za předpokladu, že $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Ptát se, co se stane za předpokladu, že nastane jev, který nastat nemůže, je prostě divné.

Například pokud víme, že na kostce padlo sudé číslo, pak pravděpodobnost, že to byla dvojka, je jedna třetina. Nazveme-li jev „padla dvojka“ A a jev „padlo sudé číslo“ nazveme B, můžeme z definice počítat $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$.

Povšimni si, že pokud jsou jevy A a B nezávislé a zároveň je $\mathrm{P}(B) > 0$, můžeme spočítat, že

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A).$$

To je důležité pozorování, které potvrzuje intuici: pokud jsou dva jevy nezávislé, tak to, že se jeden z nich stal, neovlivní, zda se stane druhý jev. Z výpočtu však plyne i obrácené tvrzení: pokud $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)$, jsou na sobě jevy A a B nezávislé.

Pokud pracujeme s více než dvěma jevy, může se hodit následující vzoreček:

Úloha 30. Předpokládejme, že $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$. Dokaž, že

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Tento vzoreček by měl být intuitivní. Říká, že aby nastaly všechny jevy $A_1, \ldots, A_n$, musel nastat A_1, pak, když už víme, že nastal A_1, musel nastat i A_2, pak, když už víme, že nastal A_1 i A_2, musel nastat A_3, atd.

Mimochodem, pokud v úloze 2 podmíníš všechny jevy nějakým novým jevem C (tj. do každé závorky dopíšeš „$|C$“), pořád všechny vlastnosti budou platit. Pracovat s podmíněnou pravděpodobností je totiž vlastně stejné jako pracovat s normální pravděpodobností, pouze se pohybujeme v menším prostoru určeném jevem, kterým podmiňujeme.

Ukažme si nyní jednoduché použití podmíněné pravděpodobnosti. Následující úloha ukazuje, že myšlenky podmíněné pravděpodobnosti jsme vlastně už používali i na začátku seriálu při kombinatorickém počítání.

Úloha 31. V obchodě je 100 žárovek, z nichž 9 je vadných. Marta si tři náhodně vybrala. Jaká je pravděpodobnost, že jsou všechny tři vadné?

Řešení. Jak už víme, vybrat náhodně tři žárovky je stejné jako vybrat náhodně první žárovku, pak ze zbytku vybrat druhou a nakonec třetí. Označme A_1, A_2, A_3 jevy, že první, druhá, třetí žárovka je vadná. Uvědom si, že se jedná o výběr bez opakování, tudíž tři jevy na sobě nejsou nezávislé.

Zajímá nás pravděpodobnost, že nastanou všechny tři jevy zároveň, k čemuž použijeme vzoreček $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(C|A \cap B)$. Pravděpodobnost, že nastane jev A, je $\frac{9}{100}$. Pravděpodobnost, že nastane jev B, když už víme, že nastal jev A, tedy že si Marta vybrala jednu vadnou žárovku, je $\frac{8}{99}$, zbývá totiž už jen osm vadných. Konečně pokud víme, že si Marta vybrala dvě vadné žárovky, máme $\mathrm{P}(C|A \cap B) = \frac{7}{98}$. Tedy $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{100 \cdot 99 \cdot 98}$.

Úloha 32. Hodíme třikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padla třikrát panna, pokud víme, že panna padla aspoň jednou?

Úloha 33. Za předpokladu $X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$ dokaž, že $\mathrm{P}(Z|Y) = \mathrm{P}(Z|X \cap Y)$ právě tehdy, když $\mathrm{P}(X|Y) = \mathrm{P}(X|Y \cap Z)$.

Při práci s podmíněnou pravděpodobností je vždy důležité si rozmyslet, jakým jevem vlastně podmiňujeme. Že to není vždy jasné, ukazuje následující úloha, nad kterou se zkus zamyslet.

Úloha 34. Pravděpodobnost, že se narodí chlapec, je stejná jako pravděpodobnost, že se narodí děvče. Navíc má-li rodina více dětí, jejich pohlaví jsou na sobě nezávislá.

(1) Předpokládejme, že ze všech rodin se dvěma dětmi, kde je starší dítě děvče, si jednu náhodně vybereme. Jaká je pravděpodobnost, že mladší dítě je také děvče?

(2) Ze všech rodin se dvěma dětmi, které mají alespoň jedno děvče, si jednu náhodně vyberme. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je také děvče?

(3) Přišli jsme na návštěvu ke vzdáleným příbuzným, kteří mají dvě děti. Na zahradě jsme potkali děvče. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je také děvče?

Ve druhé podúloze vyjde jiný výsledek než v těch zbylých, což je dost překvapivé. Klíčem k pochopení je uvědomit si, že způsob, jakým jsme v této úloze vybírali rodinu, je dost zvláštní.

Dějí se ale ještě překvapivější věci. Zkus se zamyslet nad následující variantou Monty Hallova problému.
Úloha 35. (psycho) Stejná soutěž jako v příkladu s Monty Hallem. Ve chvíli, kdy se Monty chystá otevřít jedny ze dvou neoznačených dveří, zakopne a během pádu omylem náhodné dveře z této dvojice otevře. Ukáže se, že je za nimi koza, takže soutěž může dále probíhat podle plánu. Vyplatí se soutěžícímu změnit své rozhodnutí?

Věta o úplné pravděpodobnosti

Další typické použití podmíněné pravděpodobnosti si ukážeme na alternativním řešení úlohy 3, na níž jsme si vysvětlovali, co jsou to permutace.
Úloha 36. Dvanáct orgů, mezi nimi i Danil a Vašek, přišlo do obchodu, načež si v náhodném pořadí stoupli do fronty na banány. Jaká je pravděpodobnost, že Danil s Vaškem budou stát vedle sebe, aby si mohli povídat o seriálu?

Řešení. Označme A jev, jehož pravděpodobnost chceme spočítat. Kýženou pravděpodobnost $\mathrm{P}(A)$ spočteme tak, že jev A rozložíme na dva disjunktní jevy, jejichž pravděpodobnost půjde spočítat snadno.

Označme B jev, že je Danil ve frontě úplně vepředu nebo úplně vzadu, a je tedy vedle něj jen jedno volné místo. Jinak jsou vedle něj místa dvě. Povšimněme si, že $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, a protože jsou tyto dva jevy disjunktní, máme dokonce (dle šestého bodu úlohy 2)

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}).$$

Teď už jen stačí spočítat pravděpodobnosti obou jevů, k čemuž použijeme vzoreček pro podmíněnou pravděpodobnost. Pravděpodobnost jevu B, tedy toho, že Danil je úplně vepředu nebo úplně vzadu, je $\frac{2}{12}$, neboť pravděpodobnosti všech pozic Danila jsou stejně pravděpodobné (rozmysli si!). Za podmínky, že Danil stojí na kraji, je pravděpodobnost toho, že Vašek stojí vedle něj, rovna $\frac{1}{11}$, neboť z 11 možných zbylých pozic stojí Vašek na jedné a opět jsou všechny stejně pravděpodobné. Máme tedy

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11}.$$

Obdobně

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B}) = \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11}.$$

Dostáváme tak

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{12 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 10}{12 \cdot 11} = \frac{22}{12 \cdot 11} = \frac{1}{6}.$$

I když Ti teď možná tento způsob připadá pracnější než předchozí důkaz, koncepčně je velice jednoduchý: původní problém, který jsme neuměli řešit, jsme přidáním podmínky převedli na dva problémy, jež díky dodané podmínce již řešit umíme.

Tento rozkládací trik se používá tak často, že jeho obecnější varianta dokonce dostala vlastní název – Věta o úplné pravděpodobnosti. Zní následovně:

Věta. (o úplné pravděpodobnosti) *Nechť Ω je pravděpodobnostní prostor a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou po dvou disjunktní jevy takové, že $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$. Potom pro libovolný jev A platí*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \\ &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A|B_n). \end{aligned}$$

Jak sis možná všiml(a), použijeme-li sedmý bod úlohy 2, je znění věty v podstatě i jejím důkazem.
Úloha 37. V seriálu zadává 60 % příkladů Vašek a každý takový příklad vyřešíš s pravděpodobností 80 %. Zbylé příklady jsou od Danila. Když sis ale příklady začal(a) počítat, zjistil(a) jsi,

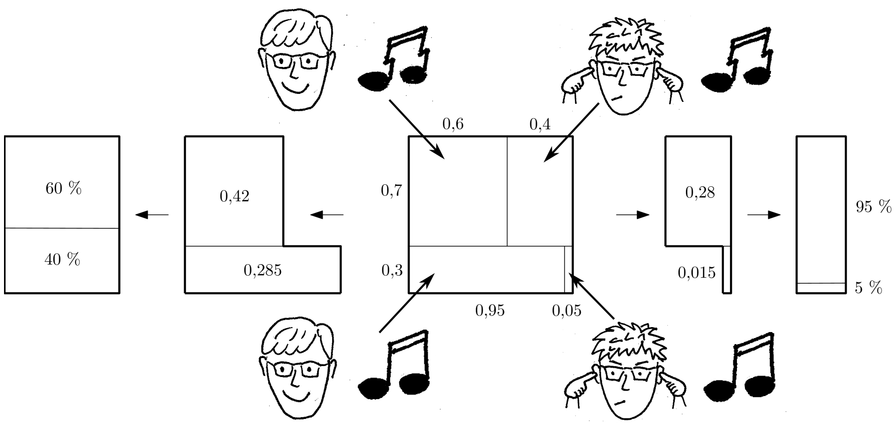
že náhodný příklad umíš vyřešit jen s pravděpodobností 70 %. S jakou pravděpodobností vyřešíš příklad, který Ti zadá Danil?

Úloha 38. Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou disjunktní jevy takové, že $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = \Omega$. Dále nechť A a B jsou nějaké jevy. Předpokládejme, že pro všechna C_i platí $\mathrm{P}(A \cap B | C_i) = \mathrm{P}(A|C_i) \cdot \mathrm{P}(B|C_i)$. Dále nechť B je nezávislé na všech C_i. Dokaž, že A a B jsou nezávislé.

Bayesova věta

Ukážeme si další použití podmíněné pravděpodobnosti. Předtím si dovolíme jednu obecnou úvahu. Ačkoli dost možná o pravděpodobnosti přemýšlíš i v běžném životě, obvykle nemluvíš o pravděpodobnostním prostoru a pravděpodobnost pro Tebe asi není precizně spočítaná veličina, ale spíš jakýsi osobní odhad toho, že se něco stane: bude pršet, kamarád přijde včas, propadneš z matematiky,… Potom ostatně ani není jasné, co by měl být pravděpodobnostní prostor dokládající, že pravděpodobnost daného jevu je taková či maková. I v tomto případě ale můžeme používat koncepty jako nezávislost či podmíněná pravděpodobnost. Speciálně pojem podmíněné pravděpodobnosti je velice užitečný, protože umožňuje měnit náš odhad pravděpodobnosti potom, co se stala nějaká událost.

Úloha 39. Vašek se začal učit na housle. Po pár hodinách usoudil, že to již umí, ale jsa si vědom toho, že nemá hudební sluch, odhaduje, že se na housle naučil hrát s pravděpodobností 30 %. Pro jistotu zahrál Danilovi a zeptal se ho, co si myslí. Vašek ví, že pokud na housle doopravdy umí hrát, tak mu Danil s pravděpodobností 95 % řekne pravdu.[9] Pokud se Vašek hrát nenaučil, Danil mu s 60% pravděpodobností stejně bude tvrdit, že mu to jde. Jak si má Vašek změnit odhad na to, že umí hrát na housle, v závislosti na Danilově odpovědi?



Řešení. Pracujeme s pravděpodobnostním prostorem na čtyřech prvcích (viz obrázek). Označme A jev „Vašek umí hrát na housle“ a B jev „Danil tvrdí, že Vašek umí hrát na housle“.

Potom, co Danil odpoví kladně, musíme podmínit jevem B a po spočtení nových pravděpodobností dostáváme

---

[9] Padesát procent autorů se domnívá, že je tento odhad příliš optimistický (a Danil taky).

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B\cap A)+\mathrm{P}(B\cap \overline{A})}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})}=$$
$$=\frac{0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}3\cdot 0{,}95+0{,}7\cdot 0{,}6}=\frac{0{,}285}{0{,}285+0{,}42}\doteq 0{,}40.$$

Pravděpodobnost, že Vašek umí hrát, se tedy zvýšila na 40 %. V případě nepříznivé recenze znovu počítáme:

$$\mathrm{P}(A|\overline{B})=\frac{\mathrm{P}(A\cap \overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{B})}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B}|\overline{A})}$$
$$=\frac{0{,}3\cdot 0{,}05}{0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}7\cdot 0{,}4}=\frac{0{,}015}{0{,}015+0{,}28}\doteq 0{,}05.$$

V tomto případě se Vaškovy šance snížily na pouhých 5 %.

Původnímu odhadu pravděpodobnosti se také říká apriorní pravděpodobnost a odhadu opravenému na základě toho, že se stal (nebo nestal) daný jev, se říká aposteriorní pravděpodobnost.

V úloze jsme dvakrát použili stejnou úvahu, kterou shrnuje následující Bayesova věta.

Věta. (Bayesova) *Jestliže $P(A)\neq 0$ a $P(B)\neq 0$, platí*

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}.$$

Důkaz.

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Není důležité si vzoreček pamatovat, ale je dobré vědět, k čemu je dobrý: dává návod, jak vyjádřit $\mathrm{P}(A|B)$ pomocí $\mathrm{P}(B|A)$. Když používáš Bayesovu větu, často člen ve jmenovateli přímo neznáš a musíš jej spočítat z věty o úplné pravděpodobnosti jako $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A_1)\cdot\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(B|A_2)\cdot\mathrm{P}(A_2)+\cdots+\mathrm{P}(B|A_n)\cdot\mathrm{P}(A_n)$; tak tomu bylo i v našem případě.

Bayesova věta se používá třeba v nemocničním prostředí. Vzhledem k tomu, že testy chorob mají samy o sobě určitou chybovost, je dobré umět si spočítat, jak moc testu můžeme věřit.

Úloha 40. Jistou vzácnou chorobou trpí jeden člověk z tisíce. Dá se odhalit testem, který funguje následovně. Pokud chorobou skutečně trpíme, test ji spolehlivě odhalí. Pokud chorobou netrpíme, s pravděpodobností 1 % test stejně nahlásí nemoc. Nechali jsme si udělat test a vyšlo nám, že touto chorobou trpíme. Jaká je pravděpodobnost, že tomu tak skutečně je?

Neřekneme Ti, jak pravděpodobnost vyjde, ale bude překvapivě malá. „Paradoxnost“ tohoto příkladu ale neznamená, že by Bayesova věta sama byla nějak paradoxní, problémem je spíš to, že se v příkladu míchají malá a velká čísla. Je užitečné nahlédnout, že když k doktorovi přijde tisíc zdravých lidí, přibližně deseti z nich bude chybně diagnostikována choroba, ale jen jeden člověk bude doopravdy nemocný. Pravděpodobnost, že člověk, kterému vyšlo, že chorobou trpí, je opravdu nemocný, by proto měla být přibližně $\frac{1}{10+1}\doteq 0{,}09$.

Případu, kdy test nahlásí neexistující chorobu, se obvykle říká falešně pozitivní (false positive), zatímco pokud by test chorobu v některých případech nebyl schopen odhalit, mluvili bychom o falešně negativním výsledku (false negative).

Úloha 41. V krabičce jsou tři mince: dvě poctivé a jedna, která má na obou stranách pannu. Jednu minci si náhodně vybereme a hodíme si.

(1) S jakou pravděpodobností padne panna?

(2) Hodili jsme si a padla panna. S jakou pravděpodobností se jedná o falešnou minci?

Nekonečné pravděpodobnostní prostory*

V seriálu jsme se doposud setkali jen s konečně velkými prostory. Jak jsi viděl(a), i ty mohou být dost zajímavé a užitečné, v praxi ale často nestačí. Představ si, že si házíš mincí, dokud Ti nepadne panna. Už tento jednoduchý pokus vyžaduje nekonečný pravděpodobnostní prostor! Pro každé přirozené číslo k totiž bude v prostoru jeden prvek odpovídající jevu „panna poprvé padla v k-tém kroku“. Často je ale situace ještě složitější. Představ si, že nad někým zlomíš metr dlouhou hůl na náhodném místě. Potom musí odpovídající pravděpodobnostní prostor obsahovat libovolné reálné číslo z intervalu $(0, 1)$!

Možná už jsi někdy slyšel(a) o tom, že podobně jako můžeme porovnávat velikosti konečných množin, lze porovnávat i velikosti množin nekonečných.[10] V praxi se obvykle setkáš s dvěma velikostmi.

Nekonečné množiny, které jsou stejně velké jako množina přirozených čísel, se nazývají **spočetné**. Takové množiny jsou sice nekonečné, ale v lecčems se chovají podobně jako konečné množiny. Ukázkou spočetného pravděpodobnostního prostoru je náš příklad s házením mincí – jeho prvky se dají přímočaře očíslovat přirozenými čísly. Prostorům, které jsou konečné nebo spočetně nekonečné, se také někdy souhrnně říká **diskrétní**[11]. To, čemu jsme doteď říkali konečný pravděpodobnostní prostor, je tedy speciální případ diskrétního prostoru.

Náš příklad s holí vede k tzv. **spojitému** prostoru, ve kterém je počet prvků prostoru stejně velký jako počet reálných čísel na reálné přímce nebo uvnitř nějakého netriviálního intervalu. Takhle velké množiny už nelze očíslovat přirozenými čísly, a jsou proto větší než spočetné, pročež se jim říká **nespočetné**. Tyto prostory jsou v jistých ohledech složitější než spočetné a při jejich používání musíme být patřičně opatrní. Přesto platí, že ačkoli pořádné pochopení těchto prostorů vyžaduje notný kus vysokoškolské matematiky (konkrétně teorie míry), na intuitivní úrovni se o nich dá přemýšlet stejně jako o normálních prostorech a my si o nich později také něco povíme.

Spočetné prostory*

Vraťme se k našemu příkladu s házením mincí a ukažme si na něm rozdíly oproti konečným prostorům. Můžeme si úlohu rovnou zobecnit: místo obyčejné mince budeme uvažovat takovou, na níž padne orel s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Označíme-li X_i jev „panna poprvé padla v i-tém kroku“, tak platí $\mathrm{P}(A_i) = p^{i-1}(1-p)$ (nejprve musel $(i-1)$-krát padnout orel a pak konečně panna). Jevy A_i jsou elementární jevy uvažovaného pravděpodobnostního prostoru: po nějakém počtu pokusů panna prostě musí padnout.

To nemusí být úplně jasné, přece jen možnost „žádná panna nepadla“ je taky legitimní. Jak ale víme, pravděpodobnost, že panna nepadla po n krocích, je p^n, což se pro p z uvažovaného intervalu pro velká n blíží k nule. Pravděpodobnost, že panna nikdy nepadne, proto musí být menší než p^n pro libovolné n a jediné nezáporné číslo, které tohle splňuje, je 0. Elementární jev s pravděpodobností nula by ale v prostoru beztak nehrál žádnou roli, tudíž tuto možnost neuvažujeme.

V našem pravděpodobnostním prostoru, byť je nekonečný, se musí pravděpodobnosti elementárních jevů posčítat na jedničku, takže musí platit

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \cdots = (1-p) + (1-p)p + (1-p)p^2 + \cdots = 1,$$

[10] Pokud by ses o nekonečnu rád dozvěděl(a) víc, otevři si PraSečí seriál z ročníku 2015/16. Zde zmíníme jen to, co je nezbytné.

[11] Slovo discrete znamená anglicky oddělený, takže tento název má být protikladem ke spojitým prostorů, ke kterým se záhy dostaneme.

neboli po vydělení nenulovým číslem $1-p$ dostáváme

$$1+p+p^2+\cdots=\frac{1}{1-p}.$$

Pravděpodobnostní interpretací jednotlivých členů jsme právě nahlédli, kde se vzal známý vzoreček pro součet tzv. nekonečné geometrické řady, který se nám dále bude hodit.

Předchozí příklad byl typickým případem využití nekonečného diskrétního prostoru: máme nějaký pravděpodobnostní proces, který sice hypoteticky může pokračovat donekonečna, ale ve skutečnosti skončí v konečném čase s pravděpodobností 1. Tak je tomu i v následujících úlohách:

Úloha 42. Tuleňátko a jeho maminka loví ryby, přičemž tuleňata mají při lovu ryb úspěšnost $\frac{1}{3}$, zatímco dospělí tuleňové $\frac{2}{3}$ (jednotlivé pokusy o ulovení ryby jsou na sobě nezávislé). Teď kolem lovící dvojice proplouvají ryby, přičemž každou z nich se nejprve pokusí ulovit tuleňátko a až poté maminka. Jaká je pravděpodobnost, že bude první ulovená ryba ulovena tuleňátkem?

Řešení. Buď T jev „tuleňátko jako první chytlo rybu“. Tento jev můžeme rozložit na dva disjunktní jevy T_1: „tuleňátko chytlo rybu při prvním pokusu“ a T_2: „tuleňátko ani maminka nechytili rybu při prvním pokusu, načež tuleňátko chytlo rybu jako první“. Pravděpodobnost prvního jevu je rovna $\mathrm{P}(T_1)=\frac{1}{3}$, zatímco pravděpodobnost druhého jevu můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_2)=&\mathrm{P}(\text{tuleňátko ani maminka nechytly napoprvé})\cdot\\&\mathrm{P}(\text{tuleňátko chytlo jako první}|\text{tuleňátko ani maminka nechytly napoprvé}).\end{aligned}$$

Protože jsou ale jednotlivé pokusy nezávislé, máme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_2)=&\mathrm{P}(\text{tuleňátko nechytlo napoprvé})\cdot\mathrm{P}(\text{maminka nechytla napoprvé})\cdot\\&\mathrm{P}(\text{tuleňátko chytlo jako první})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\mathrm{P}(T)=\frac{2}{9}\mathrm{P}(T).\end{aligned}$$

Dostáváme tak $\mathrm{P}(T)=\mathrm{P}(T_1)+\mathrm{P}(T_2)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\mathrm{P}(T)$. Vyřešením této lineární rovnice dostaneme $\mathrm{P}(T)=\frac{3}{7}$.

Úloha má ale i přímočařejší řešení. Mohli jsme například jev T rozložit na nekonečně mnoho disjunktních jevů T_i „tuleňátko chytlo rybu jako první na i-tý pokus“ pro přirozená i; díky nezávislosti jednotlivých pokusů vyjde

$$\mathrm{P}(T_i)=\mathrm{P}(\text{oba tuleňové minuli})^{i-1}\cdot\mathrm{P}(\text{tuleňátko chytlo rybu})=\left(\frac{2}{9}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3}.$$

Celkovou pravděpodobnost pak dostaneme sečtením geometrické řady jako $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/9}=\frac{3}{7}$.

Ještě jiný způsob, jak vyřešit tuto úlohu, je uvědomit si, že pro každou rybu má tuleňátko pravděpodobnost $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$, že ji uloví, a maminka pravděpodobnost $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, že ji uloví. Rozmysli si, že i výsledné pravděpodobnosti toho, kdo uloví první rybu, tak musí být v poměru tři ku čtyřem, tedy tuleňátko uloví první rybu s pravděpodobností $\frac{3}{7}$.

Úloha 43.

(1) Hedvika a Kája hrají následující hru s férovou mincí. Hází si jí a zapisují si výsledky na papír (P=panna, O=orel), dokud se tam neobjeví posloupnost POP nebo OOP. Objeví-li se jako první POP, vyhraje Kája, jinak vyhraje Hedvika. Kdo má větší pravděpodobnost výhry?

(2) To samé, ale Hedvika vyhrává, objeví-li se posloupnost PPO. (MKS 26–5–4)

Úloha 44. Lucien se potřebuje rozhodnout, zda si dá větrník, nebo věneček. Rád by si hodil mincí tak, aby obě možnosti měly stejnou pravděpodobnost, nicméně má jen minci, na které padne panna s pravděpodobností $p < \frac{1}{2}$. Jak to má udělat?

Úloha 45. Na sousu hrají orgové frisbee proti účastníkům, přičemž vyhraje ten tým, který získá jako první dva body po sobě.

(1) Při každé rozehrávce platí, že tým orgů získá bod s pravděpodobností p (a účastníci tedy s pravděpodobností $1 - p$). Jaká je pravděpodobnost, že orgové vyhrají?
(2) Platí, že tým, který rozehrává, získá další bod s pravděpodobností p (v souladu s pravidly frisbee vždy rozehrává tým, který získal minulý bod). Jaká je pravděpodobnost, že vyhrají orgové, pokud nechají účastníky rozehrát jako první?

Úloha 46. (těžká) Ve vrcholech $(n+1)$-úhelníka stojí n ovcí a vlk, který v každém kroku skočí do náhodného sousedícího vrcholu a sní tamní ovečku, jestliže tam nějaká je. Která ovce má nejvyšší pravděpodobnost, že zůstane poslední naživu?

Jakkoli to zatím vypadá, že spočetně nekonečné prostory se od těch konečných moc neliší, jeden zásadní rozdíl tu je. Neexistuje totiž spočetně nekonečný analog ke klasickým prostorům. Vybíráme-li náhodně číslo z množiny $\{1, ..., n\}$, každé bude zvoleno s pravděpodobností $\frac{1}{n}$. Co se ale stane, když místo toho budeme chtít zvolit náhodné přirozené číslo? Kdybychom o každém z nich řekli, že bude zvoleno s pravděpodobností $p > 0$, tak by potom muselo platit $p + p + p + \cdots = 1$, zároveň je však součet na levé straně větší než $n \cdot p$ pro libovolné přirozené n a proto nemůže být shora omezený. Takže máme spor a musí platit $p = 0$. To je ale také nesmyslné, protože se pak součet všech pravděpodobností nasčítá na 0.

Toto je jeden z důvodů, proč jsou tak důležité spojité prostory, kde tento problém lze překonat. Například vybírání náhodného reálného čísla z intervalu $(0, 1)$ opravdu lze udělat v jistém smyslu rovnoměrně.

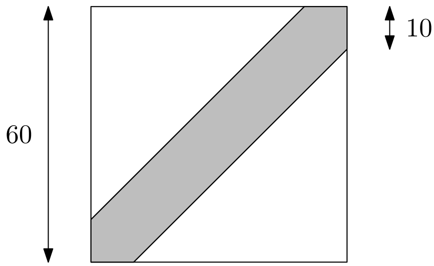
Spojité prostory*

Protože definice spojitých prostorů je složitější než způsob, kterým je budeme používat, ukážeme si nejprve jejich využití na následujícím příkladu.

Úloha 47. Rytíři Honza a Petr zítra odpoledne svedou duel o přízeň madam Verči. Zapomněli ale, kdy přijít, takže každý z nich přijde náhodně mezi čtvrtou a pátou hodinou nezávisle na tom druhém. Pokud bude některý rytíř marně čekat na soupeře alespoň deset minut, prohlásí sám sebe za vítěze a odejde. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k duelu?

Řešení. Celý pravděpodobnostní prostor je vlastně čtverec o straně 60 (měříme v minutách), ve kterém si navíc zavedeme souřadnou soustavu s počátkem v dolním levém rohu a osami totožnými se stranami čtverce. Nyní každému bodu (x, y) uvnitř čtverce odpovídá jev „Honza přišel x minut po čtvrté a Petr přišel y minut po čtvrté“. Pozor, x i y jsou jakákoli reálná čísla mezi nulou a šedesáti.

Teď už máme skoro vyhráno, stačí si jenom rozmyslet, jak bude v našem obrázku vypadat množina bodů, která splňuje podmínku ze zadání. To je však v tomto případě velmi snadné: podmínka je totiž ekvivalentní s $x - 10 \leq y \leq x + 10$, takže hledaná množina bodů bude průnikem pravděpodobnostního prostoru s pásem mezi přímkami $y = x + 10$ a $y = x - 10$.



Obsah celého čtverce je $60^2 = 3600$ a vyhovující množinu z něj můžeme získat odstřihnutím dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků s délkou odvěsny 50, takže má obsah $60^2 - 2 \cdot \frac{50^2}{2} = 1100$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1100}{3600} = \frac{11}{36} \doteq 0{,}31$.

Poznamenejme, že řešení by se nezměnilo, kdybychom místo vzdálenosti nejvýše deset požadovali vzdálenost ostře menší než deset. Dvě hraniční úsečky obrazce totiž mají nulový obsah.

Rozdíl v řešení této úlohy oproti těm předchozím byl ten, že místo toho, abychom počítali počet úspěšných pokusů, uvědomili jsme si, že pravděpodobnostní prostor i hledaný jev odpovídají obrazcům a stačí tak pouze spočítat podíl jejich obsahů. A tak to bude i v následujících úlohách. Pravděpodobnostní prostor může být obrazec, ale také jen pouhá úsečka jako v našem motivačním příkladě se zlomenou holí. Pak počítáme s délkami místo obsahů.

Úloha 48. Na úsečce délky 2 náhodně zvolíme dva body, čímž ji rozdělíme na tři menší úsečky. Jaká je pravděpodobnost, že z nich půjde složit nedegenerovaný trojúhelník?

Úloha 49. Do roviny s kartézskou soustavou souřadnic jsme náhodně umístili úhel o velikosti 110 stupňů tak, že vrchol úhlu je v počátku. Jaká je pravděpodobnost, že ramena tohoto úhlu tvoří graf funkce? (Náboj 2013)

Úloha 50. David každý víkend jezdí z plzeňského nádraží buď za manželkou do Dobřan, nebo za maminkou do Rokycan. Nastoupí vždy do prvního vlaku, který jede. Ačkoli vlaky do Rokycan jezdí stejně často jako vlaky do Dobřan, po nějakém čase David shledal, že byl u maminky dvakrát častěji než u manželky. Jak je to možné?

Úloha 51. V intervalu $\langle 0, 1)$ vybereme rovnoměrně náhodně dvě čísla x a y. Jaká je pravděpodobnost, že

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \leq \min\{x, y\}?$$

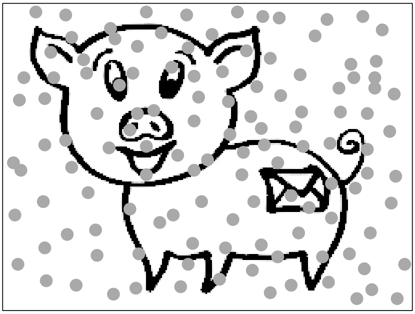
(MKS 26–5–6)

Úloha 52. Alča na dvě náhodná místa metrové tyčky nakreslila puntíky. Pak přišel Pepa a tyčku náhodně rozlámal na 2013 částí. Jaká je pravděpodobnost, že oba puntíky jsou teď na té samé části? (Náboj 2013)

Úloha 53. (těžká) Náhodně zvolíme n bodů na kružnici. Jaká je pravděpodobnost, že všechny půjdou zakrýt nějakou půlkružnicí?

Pro zajímavost dodejme, že vztahu mezi pravděpodobností a obsahy (či objemy) se využívá i v opačném směru, než jaký jsme zatím viděli. Představ si, že máme nějaký (dostatečně rozumný) geometrický útvar U uvnitř jednotkového čtverce. Potom pravděpodobnost toho, že náhodně zvolený bod uvnitř čtverce bude ležet v U, je rovna jeho obsahu. Ze znalosti obsahu U bychom tedy uměli spočítat tuto pravděpodobnost... Ale co když neumíme obsah U přesně spočítat? Stačí postupovat pozpátku! Pravděpodobnost dopadu bodu dovnitř totiž můžeme poměrně přesně určit experimentálně, stačí pouze s pomocí počítače vybrat dostatečné množství náhodných bodů. Tento postup se nazývá metoda Monte Carlo a uplatňuje se třeba při numerickém modelování.

Příklad této metody je na následujícím obrázku. Odhadovat obsah prasátka by bylo zdlouhavé, rychlý odhad ale získáme tak, že vygenerujeme několik náhodných bodů[12] a spočítáme poměr těch, které se trefily dovnitř. Tímto poměrem pak přenásobíme obsah obdélníku, ve kterém prasátko žije.



Jak se to dělá pořádně (a obecně)**

Matematika je umění dávat stejná jména různým věcem.
Henri Poincaré

Při formálním zavedení spojitého pravděpodobnostího prostoru vzniknou jisté potíže. Vypadá to, že naše definice pravděpodobnostního prostoru jakožto množiny elementárních jevů tu selže ze stejného důvodu, ze kterého neexistuje rovnoměrné vybírání na přirozených číslech. Pokud bychom měli každému reálnému číslu z $(0,1)$ přiřadit tutéž pravděpodobnost p, že jej vybereme, tak by nám podobně jako v diskrétním případě vyšlo, že musí platit $p = 0$. I když jsme tuto variantu pro diskrétní prostory zavrhli, tak je vlastně v jistém smyslu dost intuitivní. Zlomit nekonečně dělitelnou hůl naprosto přesně v jedné třetině je prostě nemožné.

Jak ale může všechno fungovat? Trik je v tom, že existují různě velká nekonečna. Jde o to, že nespočetně mnoho čísel už prostě nejde sečíst.[13] To je ale naše záchrana, protože ať už by se nuly sečetly na cokoli, dostali bychom spor.

Zásadní rozdíl mezi diskrétními a spočetnými prostory je teď ten, že nemůžeme ignorovat elementární jevy, které mají pravděpodobnost nula – naopak, úplně všechny elementární jevy teď mají pravděpodobnost nula.

Jeden problém jsme sice vyřešili, ale jiný jsme zase vytvořili. Řekli jsme si, že pravděpodobnost jevu se spočte jako součet pravděpodobností elementárních jevů v tomto jevu obsažených. Z toho také plyne, že ve spojitém prostoru bude pravděpodobnost libovolného jevu sestávajícího z konečně nebo spočetně mnoha prvků rovna nule. Ve chvíli, kdy jev obsahuje nespočetno elementárních jevů, teď ale jeho pravděpodobnost neumíme spočítat!

Tento problém se dá vyřešit tak, že místo toho, abychom definovali jen pravděpodobnosti elementárních jevů, budeme rovnou definovat pravděpodobnosti úplně všech jevů. Nemůžeme ale tyto pravděpodobnosti definovat jen tak nahodile; matematici proto množině, jejíž podmnožiny mají přiřazené pravděpodobnosti, říkají pravděpodobnostní prostor jen tehdy, jsou-li splněny následující tři podmínky:

(1) Pravděpodobnosti všech jevů jsou reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
(2) Pro pravděpodobnost celého prostoru platí $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
(3) Pravděpodobnost sjednocení disjunktních množin je rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, a to i tehdy, když je množin spočetně nekonečně mnoho.

[12] Případně si zahrajeme šipky.

[13] Úplně na okraj dodejme, že za sečtení nespočetně mnoha čísel lze v jistém smyslu považovat integrování, ale to je skutečně vysoko nad rámec našeho seriálu.

Rozmysli si, že ať už jsme pravděpodobnost určovali tak, že jsme počítali počet vyhovujících jevů (klasické prostory), nebo jsme počítali obsahy (spojité prostory), první dvě vlastnosti a třetí pro konečně mnoho množin byly splněny. Také si rozmysli, že z těchto podmínek lze odvodit všechny body úlohy 2. Jinými slovy, tyto tři abstraktní podmínky stačí na to, aby se pravděpodobnost chovala tak, jak jsme zvyklí.

Je tu ještě jeden problém, který jsme Ti radši zatajili. Pokud jsi dostatečně odvážný (odvážná), podívej se do kapitoly Neměřitelná množina třetího dílu seriálu z 35. ročníku. Nalezneš zde problém i jeho řešení.

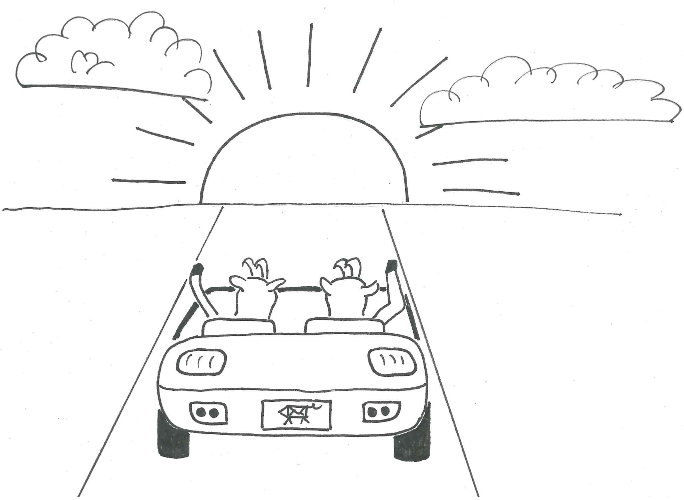
Závěr

Hurá, první díl je za Tebou! Zopakujme si několik základních pojmů, na které jsme narazili: Pravděpodobnostní prostor je (pro naše účely typicky konečná) množina možných výsledků, která se objeví vždy, když počítáme pravděpodobnostní úlohu. Možným výsledkům se říká elementární jevy. Obecně pak jevem myslíme libovolnou podmnožinu pravděpodobnostního prostoru. Mezi důležité pojmy z teorie pravděpodobnosti pak patří zejména nezávislost a podmíněná pravděpodobnost, které používáme ve chvíli, kdy spolu interagují různé jevy.

Nakonec jsme si v hvězdičkové části ukázali, že i nekonečné prostory mohou být užitečné. Existují dva důležité exempláře: diskrétní prostor, který může být konečný (s takovými prostory normálně v seriálu pracujeme), nebo spočetně nekonečný. Spojité prostory jsou vždy nespočetně nekonečné a všechny, které jsme zatím potkali, odpovídaly rovnoměrnému vybírání bodů z nějakého geometrického obrazce.

V příštím díle se seznámíme s náhodnými veličinami, tedy proměnnými, které mohou nabývat různých hodnot s různou pravděpodobností. Také si ukážeme, jak aplikovat pravděpodobnost na řešení kombinatorických úloh.

Do té doby si zkus pohrát se soutěžními úlohami. Připomínáme, že na jejich řešení není potřeba hvězdičková část o nekonečných prostorech. (Ale doporučujeme se na ni aspoň zkusit podívat – plno jejich částí je na první pohled mnohem stravitelnějších než Monty Hallův paradox.) Hodně zdaru!



Návody k úlohám

4. Pravděpodobnostní prostor obsahuje 15! permutací písmen daného slova. Pozor, pokud prohodíme dvě Očka, dostaneme sice jinou permutaci, ale stejné slovo.

5. Pravděpodobnostní prostor je tvořen všemi možnými devatenáctiprvkovými frontami neboli všemi permutacemi na devatenácti prvcích. Jak vypadá fronta, kde žádní dva lachtani nestojí vedle sebe?

8. (1) Celkový počet výběrů vyjádři jako kombinační číslo a počet správných výběrů bude vhodný součin.

(2) Každý takový výběr odpovídá nějaké permutaci na n prvcích.

9. Rozmysli si, že z levého horního do pravého dolního políčka vede $\binom{2(n-1)}{n-1}$ cest.

11. Podívej se na doplňkový jev.

13. Na kostce s n stěnami je pravděpodobnost toho, že padne x, stejná, jako že padne $n+1-x$.

14. Změnilo by se něco, kdyby nově příchozí, který si nemůže sednout, vyhodil prvního pasažéra z jeho místa, a ten si poté znova sednul na náhodné místo?

15. Jaká je pravděpodobnost, že Mirek daný den dojí všechny karamelky, resp. hašlerky?

17. Vyjádři pravděpodobnosti průniků různých jevů.

18. Uvaž pravděpodobnostní prostor s osmi jevy a najdi tři jevy o čtyřech prvcích, které se protínají v jednom prvku. Dej si ale pozor, aby náhodou nějaká dvojice nebyla nezávislá (existuje hodně možných řešení).

19. Každá rovnice odpovídá podmnožině alespoň dvou jevů. Z celku tedy odečti počet podmnožin velikosti nejvýše jedna.

22. Nakresli si Vennův diagram.

23. Může pomoci představit si osmici jako krychličku.

25. Jaká je pravděpodobnost, že nějaká chyba vydrží k dní?

26. Podívej se na doplňkové jevy a pak použij nezávislost.

30. Rozepiš podmíněné pravděpodobnosti na pravé straně a pokrať.

32. Výsledkem je podíl dvou pravděpodobností, které můžeš snadno spočítat.

33. Rozepiš pravděpodobnosti podmíněných jevů z definice.

34. Možná se ti o problému bude lépe přemýšlet, když místo rodin budeš uvažovat pokus se dvěma hody mincí. Ve druhém případě jsme si dvakrát hodili mincí a víme, že alespoň jednou padla panna; ve třetím Danil oznámil, že si dvakrát hodí mincí, my jsme byli přítomni jen jednomu pokusu a při něm padla panna.

37. Pomocí věty o úplné pravděpodobnosti můžeš vyjádřit, jak vzájemně závisí celková pravděpodobnost vyřešení příkladu a pravděpodobnosti vyřešení příkladů jednotlivých autorů.

40. Prostě dosaď do Bayesovy věty a nenech se překvapit výsledkem. ;-)

41. Použij 1) větu o úplné pravděpodobnosti, 2) Bayesovu větu.

43. (1) Podívej se na poslední dvě písmena na papíře. Která z holek má jakou šanci, když jsou to OO? A co ostatní případy?

(2) Podobně jako příklad s tuleňátkem.

44. Podívej se na dva po sobě jdoucí hody.

45. Dá se postupovat podobně jako v úloze s tuleňátkem; orgové vyhrají při posloupnosti vítězů OO, ÚOO, OÚOO, ÚOÚOO,... Pak stačí sečíst geometrickou řadu.

46. Budeme muset zklamat všechny chytré ovečky: vyjde to stejně pro každou z nich. Dívej se na jednu ovci se zvláštním ohledem okamžiky, kdy je vedle ní vlk, a uvědom si, že díky symetrii daná pravděpodobnost musí vyjít pro všechny ovce stejně.

48. Z trojúhelníkové nerovnosti to půjde právě tehdy, když budou všechny tři mít délku menší než jedna. Představ si pravděpodobnostní prostor jako rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 2 (proč ne čtverec?). Vyjde jedna čtvrtina.

49. Lomená čára je grafem funkce právě tehdy, když protíná každou svislou přímku v právě jednom bodě.

50. Jaký čas uplyne mezi příjezdem vlaku do Dobřan a následujícího vlaku do Rokycan?

51. Vzpomeň na rovnici kruhu.

52. Zkoumej pouze uspořádání 2015 objektů na úsečce, na konkrétním umístění nesejde.

53. Nechť A_i je jev značící, že všechny body lze zakrýt půlkružnicí bez pravého okraje, jejíž levý okraj je i-tý bod. Rozmysli si, že takové jevy jsou navzájem disjunktní.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) $\mathrm{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1.$

(2) $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{|\Omega \setminus A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \mathrm{P}(A).$

(3) Pro $A \subseteq B$ jistě platí $|A| \leq |B|$, což je po vydělení kladným číslem $|\Omega|$ ekvivalentní s $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(4) Každý prvek množiny $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ musí z definice sjednocení být prvkem alespoň jedné z množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$, takže $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + \cdots + |A_n|$. Rovnost nastává tehdy, když je každý prvek z levé strany započítán na pravé straně právě jednou, neboli když žádný z prvků sjednocení není prvkem víc než jedné množiny A_i, a tyto množiny jsou proto disjunktní. Po vydělení rovnice kladným číslem $|\Omega|$ dostaneme kýženou nerovnost.

(5) Jak jsme již viděli v odvozování čtvrté položky, je velikost $A \cup B$ nejvýše $|A| + |B|$, pro nedisjunktní množiny ale některé prvky sjednocení započítáme dvakrát. To se nám stane právě pro ty prvky, které patří do obou množin, neboli $|A \cap B|$-krát, takže pro přesné vyjádření velikosti průniku je ještě potřeba odečíst tento člen. Nakonec vydělíme $|\Omega|$.

(6) Díky disjunktnosti doplňkových jevů B a $\overline{B}$ jsou i oba jevy $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ disjunktní, takže použitím čtvrté položky dostáváme $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$.

(7) Zcela analogicky jako výše, jen místo dvou jevů jich bude n.

4. Dvě písmena (P, D) se objeví dvakrát a jedno (O) třikrát, takže dostaneme dohromady $2! \cdot 2! \cdot 3! = 24$ uspořádání písmen, která dohromady dávají to samé slovo. Pravděpodobnost tedy vyjde $\frac{24}{15!}$.

5. Aby se toto stalo, musí si lachtani a tuleni stoupnout na přeskáčku s tím, že vepředu je lachtan. Podíváme-li se pouze na lachtany, mohou stát vůči sobě v libovolném pořadí, stejně tak tuleni. Vyjde tedy $\frac{10! \cdot 9!}{19!}$.

7. Zatímco všech pětic tuleňů je $\binom{30}{5}$, počet pětic, které Radovi přijdou roztomilé, můžeme vyjádřit jako $\binom{10}{5}$. Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}$.

8. (1) Celkový počet výběrů je $\binom{100}{10}$. V každém řádku má Michal deset možností, odkud vybrat bonbón, takže celkový počet vyhovujících výběrů je 10^{10}. Vyjde tedy $\frac{10^{10}}{\binom{100}{10}}$.

(2) Dále každý výběr takový, že je vybrán právě jeden bonbón z každého řádku i sloupce, odpovídá jedné permutaci – dostaneme ji tak, že postupně pro každý sloupec přečteme, v kolikátém řádku jsme z daného sloupce vybrali bonbón. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{10!}{\binom{100}{10}} = \frac{10!\cdot 10!}{100\cdot 99\cdots 91}$.

9. Každá cesta z počátečního políčka do cíle sestává z $n-1$ kroků doprava a $n-1$ kroků dolů. Počet cest pak odpovídá počtu způsobů, jak z řady $2(n-1)$ šipek vybrat $n-1$ šipek doprava (zbylé budou dolů). To je přesně $\binom{2(n-1)}{n-1}$. Vybereme-li si libovolnou z těchto cest, pravděpodobnost, že byla skutečně nakreslena, je $(\frac{1}{2})^{2(n-1)}$ (co je nakresleno na ostatních políčkách, to nás vůbec nezajímá). Protože jsou odpovídající jevy disjunktní, pravděpodobnost jejich sjednocení je rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, tedy vyjde $\frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}}$.

11. Spočítáme pravděpodobnost, že ani jedna jednička nepadla. Pravděpodobnostní prostor obsahuje 6^{10} možných výsledků pokusu, z toho 5^{10} výsledků neobsahuje ani jednu jedničku. Proto je hledaná pravděpodobnost rovna $1-(\frac{5}{6})^{10}$.

13. V tomto případě pracujeme s prostorem, který má $6\cdot 6\cdot 6\cdot 20$ prvků; každý z nich odpovídá jednomu možnému výsledku čtyř hodů. Každý elementární jev „Áďa hodila x, y, z, Bára u“ popárujeme s elementárním jevem „Áďa hodila $7-x$, $7-y$, $7-z$, Bára $21-u$“. Protože platí, že v prvním případu Áďa hodila víc než Bára právě tehdy, když v druhém případu hodila Bára víc než Áďa, dostáváme, že pravděpodobnosti obou jevů ze zadání jsou stejné.

14. Můžeme si ekvivalentně představovat, že každý příchozí, který si nemůže sednout, si místo sednutí na náhodné místo sedne na svoje místo, přičemž vyhodí prvního přišedšího, který znovu usedne na náhodné místo.

Při každém přesednutí prvního příchozího je následně pravděpodobnost, že si sedne na svoje místo, stejná jako pravděpodobnost, že si sedne na místo posledního příchozího. Když tento přijde, je tedy poloviční šance, že první příchozí bude sedět na svém místě a poloviční šance, že bude sedět na jeho místě.

15. Má-li Mirek daný den k karamelek a h hašlerek, je pravděpodobnost, že tento den dojí všechny karamelky, rovna $\frac{k!h!}{(k+h)!}$, neboť v permutaci bonbónů dané pořadím jejich výběru musí být nejprve všechny karamelky a až poté všechny hašlerky. Pravděpodobnost, že daný den Mirek dojí všechny hašlerky, vyjde stejně. Protože je pro každý jednotlivý den pravděpodobnost dojezení karamelek stejná jako pravděpodobnost dojezení hašlerek, musí být i výsledná pravděpodobnost rovna jedné polovině.

16. Pro $\overline{A}, B$ máme $\mathrm{P}(\overline{A}\cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = (1-\mathrm{P}(A))\cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{A})\cdot \mathrm{P}(B)$. Pro zbylé případy postupujeme obdobně.

17. Každý jev nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ a každá dvojice nastane s pravděpodobností $\frac{1}{36}$, tudíž všechny dvojice jsou nezávislé. Trojice ale nezávislá není, neboť všechny tři jevy se zároveň nemohou stát.

18. Funguje $\Omega = \{1,2,\ldots,8\}$ a jevy $\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}$ a $\{1,6,7,8\}$.

19. Z celkového počtu podmnožin, což je 2^k, odečteme ty velikosti 0 (to je pouze prázdná množina) a 1 (těch je k, jedna pro každý prvek). Vyjde tedy $2^k - k - 1$. Povolení případu $l = 1$ nic nezmění, nové rovnice jsou totiž vždy triviálně splněny.

21. Každý jev nastane s pravděpodobností $\frac{1}{20}$, ale oba jevy nastanou buď s pravděpodobností 0 ($i = j$), nebo $\frac{1}{20\cdot 19}$ ($i \neq j$).

22. Máme $\mathrm{P}(A\cup C) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B\cup C) = \mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \frac{3}{4}$ a $\mathrm{P}(A\cup B\cup C) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \frac{11}{12}$. Využíváme vztahy z úlohy 2, v posledním kroku jsme využili, že $A\cap B = \emptyset$. Po sečtení prvních dvou rovnic a odečtení třetí dostaneme $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}$ a posléze $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$ a $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.

23. $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,7,8\}, \{1,4,5,8\}, \{1,3,5,7\}$.

25. Pravděpodobnost, že nějaká chyba vydrží k dní, je $(\frac{1}{3})^k$, takže pravděpodobnost, že nějaká chyba nevydrží k dní, je $1-(\frac{1}{3})^k$. Protože nevýdrž jednotlivých chyb je nezávislá, stačí pravděpodobnosti vynásobit: $(1-1/3)\cdot(1-1/9)\cdot(1-1/27)$.

26. Buď p hledaná pravděpodobnost. Pravděpodobnost, že Martina auto nestopne v nejbližších 20 minutách, je $(1-p)^4$. Tudíž $(1-p)^4 = 1-\frac{609}{625} = \frac{2^4}{5^4}$, takže $p=\frac{3}{5}$.

32. Označíme-li A jev „padla třikrát panna“ a B jev „alespoň jednou padla panna“, máme $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$.

33. První rovnice po rozepsání říká, že $\frac{\mathrm{P}(Z\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)} = \frac{\mathrm{P}(Z\cap X\cap Y)}{\mathrm{P}(X\cap Y)}$, zatímco druhá rovnice říká $\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)} = \frac{\mathrm{P}(X\cap Y\cap Z)}{\mathrm{P}(Y\cap Z)}$. Po roznásobení dostaneme v obou případech stejnou podmínku.

34. (1) Pracujeme s klasickým pravděpodobnostním prostorem se čtyřmi elementárními jevy udávajícími pohlaví dvou dětí. Jev „mladší dítě je děvče“, na který se ptáme, nazvěme A, zatímco jev „starší dítě je děvče“ nazvěme B. Spočítáme $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

(2) V tomto případě pracujeme se stejným prostorem, ale jevy jsou jiné. Jev A „alespoň jedno dítě je děvče“ nyní nastane s pravděpodobností $3/4$. Jev B „druhé dítě je také děvče“ nyní nastane pouze v případě, že obě děti jsou děvčata.

Vyjde $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

(3) Nyní musíme každý elementární jev původního prostoru dále rozdělit na dva jevy podle toho, které dítě jsme potkali. Pracujeme tedy dokonce s osmiprvkovým pravděpodobnostním prostorem, jehož jevy jsou např. „starší dítě je **d**ěvče, mladší je **h**och, potkali jsme **m**ladší dítě“ – krátce DHm. Případy, kdy se jednalo o děvče, tvoří jev A – speciálně to jsou elementární jevy HDm, DDm, DHs, DDs. Jev $A\cap B$ neboli „potkali jsme děvče a druhé dítě je také děvče“ je tvořen elementárními jevy DDm a DDs. Tentokrát vyjde $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

35. Obdobně jako v úloze s Monty Hallem můžeme rozebrat, že existuje šest stejně pravděpodobných výsledků (tři možnosti, kde je auto, a pokaždé dvě možnosti, které dveře Monty otevře). Dva možné výsledky vyřadíme, neboť v nich Monty otevře dveře s autem. Ze zbylých výsledků se přesně v polovině případů vyplatí změnit rozhodnutí. Na rozhodnutí soutěžícího tedy nezáleží.

To je hodně překvapivé, protože příběh se odehrál zdánlivě úplně stejně jako v původní úloze s Monty Hallem! Klíčem k pochopení je porovnat pravděpodobnostní prostor v této úloze s prostorem v té původní. Zde přibyly dvě nové větve, které odpovídají tomu, že Monty otevře dveře, za kterými je auto. Sice víme, že se to nakonec nestalo, ale pouhá existence této možnosti mění pravděpodobnostní prostor, a tudíž i výsledek úlohy!

37. Buď p hledaná pravděpodobnost. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme $0{,}7 = 0{,}6\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot p$, tedy $p = \frac{0{,}7-0{,}48}{0{,}4} = \frac{11}{20} = 55\,\%$.

38. Počítáme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A\cap B) &= \mathrm{P}(A\cap B|C_1)\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(A\cap B|C_2)\mathrm{P}(C_2) + \cdots + \mathrm{P}(A\cap B|C_n)\mathrm{P}(C_n)\\
&= \mathrm{P}(A|C_1)\mathrm{P}(B|C_1)\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(A|C_2)\mathrm{P}(B|C_2)\mathrm{P}(C_2) + \cdots + \mathrm{P}(A|C_n)\mathrm{P}(B|C_n)\mathrm{P}(C_n)\\
&= \mathrm{P}(A|C_1)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(A|C_2)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C_2) + \cdots + \mathrm{P}(A|C_n)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C_n)\\
&= \mathrm{P}(B)\Big(\mathrm{P}(A|C_1)\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(A|C_2)\mathrm{P}(C_2) + \cdots + \mathrm{P}(A|C_n)\mathrm{P}(C_n)\Big) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A).
\end{aligned}$$

40. Nechť A značí, že máme chorobu, a B značí, že přístroj nahlásil chorobu. Dosadíme do vzorečku:

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{A})\cdot\mathrm{P}(B|\overline{A})}=\frac{\frac{1}{1000}\cdot 1}{\frac{1}{1000}\cdot 1+\frac{999}{1000}\cdot\frac{1}{100}}=\frac{100}{1099}.$$

To je přibližně 9 %.

41. Buď A jev, že jsme vybrali normální minci, a B, že padla panna.

(1) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B|\overline{A})\mathrm{P}(\overline{A})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

(2) $\mathrm{P}(\overline{A}|B)=\frac{\mathrm{P}(B|\overline{A})\mathrm{P}(\overline{A})}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1\cdot 1/3}{2/3}=\frac{1}{2}$.

43. (1) Nejprve si povšimneme, že jakmile se za sebou objeví dvě Očka, můžeme si být jistí, že dřív nebo později vyhraje Hedvika. Dále rozlišíme dva případy: buď jsou první dvě písmena OO a vyhrála Hedvika, nebo se nutně objevilo P a pak se podíváme na první okamžik, kdy se po P objevilo O. V tu chvíli platí, že buď je další písmeno P a vyhraje Kája, nebo je další písmeno O a vyhraje Hedvika. Proto je pravděpodobnost Hedvičiny výhry rovna $\frac{1}{4}+(1-\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$.

(2) Všimněme si prvního okamžiku, kdy padla panna. Pokud potom padla panna znovu, už je jasné, že vyhraje Hedvika (dříve nebo později musí padnout orel). Pokud místo toho padl orel a hned potom panna, vyhrála Kája. Jestliže padl orel a pak orel, nevyhrál nikdo a jakmile znovu padne panna, budeme opakovat předchozí úvahu. Protože v každém takovém bloku má Hedvika dvakrát větší šanci na to, že vyhraje, bude její pravděpodobnost na výhru rovna $\frac{2}{3}$.

44. Například takto. Hodí si dvakrát: padne-li dvojice OP, vezme si větrník, padne-li PO, vezme si věneček, a jinak hází znova. Tento postup někdy musí skončit.

45. a) Vyjde $\frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)}$. b) Vyjde $\frac{1-p^2}{2-p}$.

46. Zafixujme libovolnou ovci a uvažme první okamžik, kdy se vedle ní objeví vlk. Pak se v následujících tazích děje stane jedna z následujících možností:

(1) vlk v dalším tahu sežere ovci,

(2) vlk v dalším tahu odejde od ovce a příště se objeví z druhé strany; ovce tedy zůstala poslední,

(3) vlk sice v dalším tahu odejde od ovce, ale vrátí se ze stejné strany a proces se opakuje.

Stejně jako v příkladu s tuleňátkem můžeme dostat pravděpodobnost, že daná ovce zůstane poslední, ze znalosti poměru pravděpodobností prvních dvou jevů. Počítat je ale nemusíme, neboť ze symetrie vyjdou pro každou ovci stejně; každá ovce tedy zůstane poslední se stejnou pravděpodobností.

49. Nechť nejprve jedno rameno úhlu splývá s kladnou částí osy y a druhé leží napravo od osy y. Nyní úhlem otáčejme po směru hodinových ručiček a zkoumejme, kdy je grafem funkce. Po otočení o $70°$ se poprvé stane to, že každému bodu na ose x bude přiřazena pouze jedna hodnota na ose y, a toto potrvá až do otočení o celkových $180°$. Otočení o $180°$ až $360°$ je symetrické. Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{110}{180}=\frac{11}{18}$.

50. Kupříkladu vlaky do Dobřan jezdí vždy v celou hodinu a vlaky do Rokycan vždy 40 minut po celé.

51. Musíme najít oblast v čtverci $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ takovou, že pro body uvnitř oblasti platí nerovnost ze zadání. Přepíšeme ji ekvivalentně jako dvojici podmínek

$$(x-1)^2+y^2\leq 1,\ x^2+(y-1)^2\leq 1.$$

Každá nerovnost určuje kruh s poloměrem 1, přičemž první kruh má střed v bodě $(1,0)$ a druhý má střed v bodě $(0,1)$. Průnik obou kruhů společně s původním čtvercem dává útvar s obsahem $2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}-1$. To je tedy hledaná pravděpodobnost.

52. Představujme si tyčku vcelku. Celkem je na ní 2014 náhodně umístěných značek, z toho dvě značky jsou puntík a ostatní představují body zlomu. Ve skutečnosti je úplně jedno, kde přesně se nacházejí; důležité je jen jejich pořadí. Celkový počet možností, které značky mohou být puntíky, je $\binom{2014}{2}$. Puntíky jsou na jednom dílku přesně tehdy, když se jedná o sousední značky, na což máme 2013 možností. Výsledná pravděpodobnost je

$$\frac{2013}{\binom{2014}{2}}=\frac{1}{1007}.$$

53. Viz návod; protože jsou jevy disjunktní, je pravděpodobnost sjednocení rovna součtu jednotlivých pravděpodobností. Vyjde tedy $n(\frac{1}{2})^{n-1}$.