

Jak číst seriál

Milý příteli,

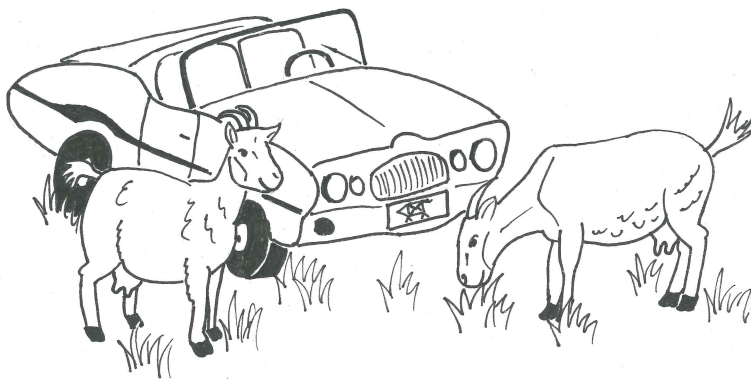
nejistota je ústřední součástí světa, ve kterém žijeme. Pokusy vypořádat se s tímto faktem zahrnují věštění z karet, astrologii, Murphyho zákony a také teorii pravděpodobnosti – matematickou disciplínu, která je tématem letošního seriálu.

Věříme, že s pravděpodobností ses už někdy setkal(a) a máš i jistou intuici, jak se má chovat. Zdání ovšem často klame! Během našeho trojdílného putování tak narazíme na všemožná tvrzení, která na první pohled budou vypadat neintuitivně nebo dokonce paradoxně. A i když se Ti možná nějakou chvíli bude zdát, že pravděpodobnost v konečném důsledku vždy spočívá jenom v tupém počítání možností, postupem času se dopracujeme k fascinujícím principům, které jsou onomu tupému počítání na hony vzdálené. Pravděpodobnost se také vyznačuje tím, že úzce souvisí s mnohými dalšími obory, matematickými i nematematickými. Na konci celého seriálu bychom Ti rádi některé takové souvislosti ukázali.

Také jsme do seriálu zařadili několik výletů pro nadšence či znalce, které ukazují složitější použití daných metod nebo předpokládají nějaké hlubší znalosti. Takové kapitoly značíme hvězdičkou (*). Žádné z těchto odboček nicméně nebudou nutné k pochopení zbytku textu. Při prvním čtení seriálu Ti doporučujeme vyhnout se hvězdičkováným částem, pokud Ti nehvězdičkové části neprijdou vyložene jednoduché; vrátit se k nim můžeš vždy po dočtení daného dílu.

V seriálu se vyskytuje celá řada řešených úloh, na kterých vysvětlujeme nové principy. Stejně tak jsme pro tebe přichystali ještě více úloh, které si zkus vyřešit samostatně. Pokud nebudeš vědět, jak na ně, hledej na konci textu nápovědu, případně jejich stručná řešení. Pro pochopení seriálu rozhodně není nutné vyřešit všechny úlohy, ale doporučujeme se v každé kapitole alespoň o pár z nich pokusit.

Letos pro Tebe seriál píší Danil Koževnikov a Vašek Rozhoň, obrázky k němu kreslí Hanka Pařízková. V případě jakýchkoli nejasností, nebo pokud v seriálu třeba najdeš chybu, nás neváhej kontaktovat na mailech dk581@cam.ac.uk (Danil) a vaclavrozhon@gmail.com (Vašek). Teď už ale pojďme na to!



Pravděpodobnost I. – Společenstvo elementárních jevů

*Kostky jsou vrženy.
Julius Caesar*

Když hážeš kostkou, i nepatrná počáteční odchylka v hodu obvykle znamená, že padne jiné číslo. Snaha fyzikálně odvodit, jaká čísla budou padat, je v podstatě marná, takže se obvykle spokojíme s mnohem jednodušším modelem: předpokládáme, že na „férové“ kostce budou padat všechna čísla přibližně stejně často.

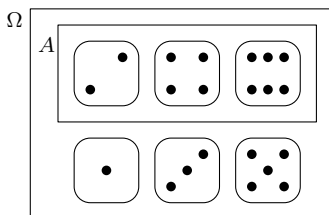
Jakmile máme tento předpoklad, můžeme kupříkladu hned nahlédnout, že sudá čísla budou padat přibližně stejně často jako lichá, neboť stěn se sudým počtem ok je stejně jako těch s lichým.

Z předpokladu, že daný pokus může skončit různě a všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné, budeme vycházet hodně často (třeba při házení mincí, vybírání kuličky ze sáčku, ...). Pojďme si proto nyní pro tento případ zavést značení.

Pravděpodobnostní prostor je množina všech možných výsledků daného pokusu; v případě házení kostkou to je šest jejích stěn. Z historických důvodů se pravděpodobnostní prostor obvykle značí velkým řeckým písmenem omega: Ω .

Elementární jev je prvek pravděpodobnostního prostoru. Prozatím předpokládáme, že každý elementární jev (tedy možný výsledek pokusu) nastává stejně často. V našem případě máme šest elementárních jevů, můžeme tedy psát $\Omega = \{\text{padla jednička, padla dvojka, \dots, padla šestka}\}$.

Jev je nějaká množina elementárních jevů, čili podmnožina pravděpodobnostního prostoru. V našem případě jsme pracovali s jevem „padlo sudé číslo“. Jevy se obvykle značí velkými písmeny $A, B, C, \dots$. Označíme-li zmíněný jev písmenkem A , máme $A = \{\text{padla dvojka, padla čtyřka, padla šestka}\}$.



Pravděpodobnost jevu je v tomto případě poměr počtu prvků jevu ku počtu prvků celého prostoru. Pravděpodobnost budeme značit velkým tiskacím P , tedy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Všimni si, že musíme předpokládat, že náš prostor je konečný, jinak by dělení jeho velikostí nedávalo smysl.

Pravděpodobnost jevu je tak vždy číslo od nuly do jedničky, přičemž pravděpodobnost vyjde 0 právě tehdy, je-li zkoumaným jevem prázdná množina, a vyjde 1 právě tehdy, je-li odpovídajícím jevem celý prostor.

Jak už jsme viděli na příkladu kostky, intuitivně pravděpodobnost chápeme tak, že pokud bychom daný pokus (např. házení kostkou) mnohokrát zopakovali, bude poměr úspěšných pokusů (těch, kdy nastal daný jev) vůči všem pokusům přibližně roven spočítané pravděpodobnosti $P(A)$. Všimni si vágního slova „přibližně“. Pokud hodíme kostkou tisíckrát, předpokládáme, že zhruba pětsetkrát padne sudé číslo. Ale jak asi správně tušíš, pravděpodobnost, že padne přesně pětsetkrát, bude mizivá. Takže ačkoli je správné si tuto intuici držet, je důležité, že pravděpodobnost je pouze abstraktní pojem, kterým si pomáháme při popisu daného experimentu.

Množiny

Jak sis jistě všiml(a), v teorii pravděpodobnosti pracujeme s množinami. Musíme tedy vědět, co množiny vůbec jsou a jak se s nimi pracuje. Předpokládáme, že ses s nimi už někdy setkal(a), takže nyní následuje pouze bryskní opakování.¹

Pro účely seriálu si vystačíme s intuitivní představou, že množina je prostě souborem nějakých objektů (věcí, čísel nebo klidně i jiných množin).² Množina může být určena jak explicitně, tj. výčtem prvků (například prázdná množina nebo $\{1, 2, \text{lachtan}\}$), tak implicitně, tedy pomocí nějaké společné vlastnosti prvků (například množina všech sudých přirozených čísel nebo $(0, 1)$, interval reálných čísel mezi 0 a 1). Pojdme si nyní zopakovat základní množinové operace, jejichž znalost bude při čtení nezbytná.

Mějme dvě množiny A a B . Jejich průnikem $A \cap B$ je množina, která obsahuje právě prvky obsažené v obou množinách A, B . Jejich sjednocením $A \cup B$ je množina prvků obsažených v alespoň jedné množině. Rozdílem $A \setminus B$ je množina obsahující ty prvky A , které nejsou v B .

Vzhledem k pravděpodobnostnímu prostoru Ω pak můžeme definovat doplněk jevu A jako $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Speciálně doplněk Ω je prázdná množina $\emptyset$.

Obsahuje-li B všechny prvky, které obsahuje A (a možná nějaké další), říkáme, že A je podmnožinou B , a píšeme $A \subseteq B$.

Obecně platí, že provádíme-li více množinových operací za sebou, může záležet na pořadí (například si zkus rozmyslet, že obecně $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$). V takových případech využíváme závorky k označení toho, která operace se provede jako první. Velmi často však na pořadí vyhodnocování záleží nebude, například když nás zajímá pouze průnik či sjednocení více množin.

Mezi zavedenými operacemi platí různé vztahy, a pokud si jimi nejsi jistý (jistá), hodí se nakreslit si tzv. Vennův diagram³. Na rozehrátí si dej následující rozcvičku:

Úloha 1. Rozmysli si, že pro libovolné množiny A, B, C platí:

- (1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- (3) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
- (4) $(A \setminus (A \cap B)) \cup B = A \cup B$;
- (5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Pravděpodobnost se k množinám a k množinovým operacím chová vyloženě pěkně. Pokud máme dva jevy A a B , jejich průnik $A \cap B$ odpovídá tomu, že nastaly zároveň oba jevy A, B . Například průnikem jevů $\{2, 4, 6\}$ (padlo sudé číslo) a $\{4, 5, 6\}$ (padlo číslo větší než tři) je jev $\{4, 6\}$, což skutečně odpovídá tomu, že na kostce padlo nějaké sudé číslo větší než 3. Obdobně sjednocení

¹Jestliže se ztrácíš, podívej se třeba na stránku <https://goo.gl/zVsrR3>.

²Korektní zavedení množin jako matematických objektů najdeš například ve druhém dílu seriálu z 35. ročníku, pro naše účely by ale tento přístup byl spíše matoucí.

³Pokud ses s těmito diagramy ještě nepotkal(a), podívej se třeba na <https://goo.gl/eJz43s>.

$A \cup B$ odpovídá tomu, že nastal alespoň jeden z jevů A, B , rozdíl $A \setminus B$ znamená, že nastal jev A , ale nikoliv B , a konečně doplněk $\bar{A}$ odpovídá tomu, že jev A nenastal.

Při počítání pravděpodobnosti se pak hodí znát několik vlastností, které jsme shrnuli do následující úlohy. Zkus si projít všechny položky, a pokud si nebudeš jistá (jistý), proč platí, podívej se na řešení.

Úloha 2. Rozmysli si, že máme-li pravděpodobnostní prostor Ω a v něm jevy A, B (případně $A_1, \dots, A_n$ či $B_1, \dots, B_n$), pak platí:

- (1) $P(\Omega) = 1$;
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (3) je-li $A \subseteq B$, je $P(A) \leq P(B)$;
- (4) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$, přičemž jsou-li jevy po dvou disjunktní (neboli pro každé $1 \leq i < j \leq n$ platí $A_i \cap A_j = \emptyset$), nastává rovnost;
- (5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- (6) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ pro kterékoliv B ;
- (7) obecně platí-li $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, máme $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$; pokud jsou navíc jevy B_i po dvou disjunktní, máme $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$.

Kombinatorické počítání

Pět ze čtyř lidí má problémy se zlomky.

Steven Wright

Určování pravděpodobnosti nějakého jevu často vede na prosté počítání, kolika způsoby se něco mohlo stát. Takovému počítání se obvykle říká kombinatorika a my si teď na příkladech ukážeme některé základní principy, které se při něm mohou hodit. Bohužel nemůžeme být moc obsírní a ani to v našem případě nebude zapotřebí – podrobnější úvod najdeš třeba v PraSečím seriálu z 27. ročníku.

Jak jsme si již řekli, nejpřímochařejší způsob, jak určit pravděpodobnost nějakého jevu, je prostě určit počet vyhovujících výsledků a vydělit ho celkovým počtem možných výsledků. K tomu se často hodí znalost některých kombinatorických pojmů jako permutace či kombinační čísla. Ilustrujeme si je na následujících příkladech.

Úloha 3. (úvod do permutací) Dvanáct orgů, mezi nimi i Danil a Vašek, přišlo do obchodu, načež si v náhodném pořadí stoupli do fronty na banány. Jaká je pravděpodobnost, že Danil s Vaškem budou stát vedle sebe, aby si mohli povídat o seriálu?

Řešení. Ještě před tím, než se pustíme do řešení úlohy, si rozmyslíme, co v daném případě tvoří pravděpodobnostní prostor. Jeho elementárními jevy jsou všechna různá uspořádání dvanácti orgů do fronty. Pojďme si nyní spočítat, kolik jich je.

Představme si, že bychom orgy do fronty vybírali postupně. Na první místo máme dvanáct možností, na druhé jich bude už jen jedenáct a tak dále, na jedenácté místo zbudou dvě možnosti a dvanáctý org bude už jednoznačně určen zbylými jedenácti. Celkem tedy máme $12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ možností. Pro přehlednost se pro součin prvních n přirozených čísel používá název **faktoriál** a zápis $n!$. V tomto případě je tedy elementárních jevů $12!$.

Fronta je typickým příkladem **permutace**, což není nic jiného než uspořádání nějakého počtu různých prvků za sebe (často jsou těmito objekty prostě čísla $1, 2, \dots, n$). Protože výše uvedený postup lze použít pro libovolně dlouhou frontu, vlastně jsme si rozmysleli, že existuje právě $n!$

permutací na n prvcích. Zvykem je dodefinovat $0! = 1$.⁴

Teď zbývá určit, kolik je vyhovujících možností, neboli počet elementárních jevů spadajících do jevu „Danil a Vašek stojí vedle sebe“. Pokud naši hrdinové stojí vedle sebe, pak první z nich určitě bude někde mezi 1. a 11. místem. Máme tedy 11 možností, kde se může tato dvojice nacházet ve frontě. Ve chvíli, kdy už víme, kde přesně se naše dvojice nachází, existují vždy dva způsoby, v jakém pořadí za sebou Danil a Vašek stojí (buď je první Danil, nebo Vašek). Nakonec existuje 10! možností, jak mohou stát zbylí orgové ve zbytku fronty. Hledaný počet je proto $11 \cdot 2 \cdot 10! = 2 \cdot 11!$ a pravděpodobnost ze zadání vyjde $\frac{2 \cdot 11!}{12!} = \frac{2 \cdot 11!}{12 \cdot 11!} = \frac{1}{6}$.

Protože při řešení tohoto typu úloh je často těžké počítat konkrétní číslo, za řešení považujeme i výrazy obsahující faktoriál nebo jiný dlouhý součin. Občas budeme pro lepší představu uvádět i přibližné numerické výsledky, což ale v soutěžních úlohách rozhodně dělat nemusíš.

Úloha 4. Jaká je pravděpodobnost, že po náhodném proházení pořadí písmen ve slově PRAVDĚPODOBNOST dostaneme opět slovo PRAVDĚPODOBNOST?

Úloha 5. Deset lachtanů a devět tuleňů si v náhodném pořadí stouplo do fronty. Jaká je pravděpodobnost, že žádní dva lachtani nestojí vedle sebe?

Pokud už rozumíš permutacím, bude pro Tebe hračka pochopit, co to jsou kombinační čísla. Znovu si to předvedeme na příkladu.

Úloha 6. (úvod do kombinačních čísel) Dvacet orgů PraSátka přišlo na zkoušku z předmětu Pravděpodobnost a statistika⁵. Výsledek zkoušky je značně náhodný, takže všechny možnosti, jak zkouška mohla dopadnout (každý org buď zkouškou prošel, nebo ne), jsou stejně pravděpodobné. Jaká je pravděpodobnost, že uspělo právě osm orgů?

Řešení. Ze všeho nejdřív si musíme zase rozmyslet, jak přesně vypadá náš pravděpodobnostní prostor. Tentokrát je tvořen všemi různými podmnožinami dvacetiprvkové množiny orgů, neboť výsledek zkoušky je jednoznačně dán množinou orgů, kteří ji udělali. Kolik obsahuje náš prostor elementárních jevů? Pro každého orga se nezávisle rozhodujeme, zda ve zkoušce uspěl, nebo ne. Dvacet výběrů ze dvou možností má dohromady 2^{20} možných výsledků, takže tentokrát sestává náš prostor z $2^{20} = 1\,048\,576$ elementárních jevů.

Proto nám teď stačí pouze spočítat, kolik různých osmic (přičemž nezáleží na pořadí) můžeme z dvaceti orgů vytvořit. Takovou osmicí orgů můžeme vybrat tak, že nejprve vybereme prvního orga (20 možností), pak druhého (19 možností) atd. Počet takovýchto výběrů je $20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 13$. Sice jsme tímto způsobem prošli všechny osmice, ale každou jsme započítali několikrát! Konkrétně lze každou osmicí seřadit 8! způsoby a přesně tolikrát jsme ji započítali. Proto je počet různých osmic roven $\frac{20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 13}{8!} = \frac{20!}{12!8!}$. Náš předchozí postup by se dal zobecnit na důkaz toho, že pro $n \geq k \geq 0$ je počet způsobů, jak z n prvků vybrat nějakých k , roven $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. Tento výraz je potřeba tak často, že dostal název **kombinační číslo** a zkráceně se zapisuje $\binom{n}{k}$; čteme jej „ n nad k “.⁶ Kýžená pravděpodobnost tedy vyjde $\binom{20}{8}/2^{20} \doteq 0,12$.

Úloha 7. Danil vlastní třicet plyšových tuleňů. Radovi, který nemá tulení tak moc v oblíbě, přijde, že jenom deset z nich je roztomilých. Když si Danil na sous vezme pět náhodných tuleňů, jaká je pravděpodobnost, že všichni vybraní plyšáci budou podle Rada roztomilí?

Úloha 8. Michal dostal bonboniéru ve tvaru čtverce 10×10 a náhodně z ní snědl deset bonbónů. Jaká je pravděpodobnost, že:

(1) Z každého řádku vybral právě jeden bonbón?

⁴To se Ti může zdát zvláštní, ale skutečně existuje právě jeden způsob, jak uspořádat prázdnou množinu. :-)

⁵Lidově se jí také říká paštika.

⁶Díky tomu, že jsme položili $0! = 1$, platí tenhle vzoreček i v okrajových případech, neboli $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Skutečně máme právě jednu možnost, jak z n prvků vybrat n prvků, a také, jak z nich nevybrat nic.

(2) Z každého řádku i sloupce vybral jeden bonbón?

Úloha 9. (těžká) Na každé políčko hracího plánu $n \times n$ náhodně nakreslíme šipku doprava nebo dolů a na levé horní políčko postavíme robota. Robot se vždy posouvá na sousední políčko ve směru šipky. Jaká je pravděpodobnost, že robot opustí hrací plán krokem z pravého dolního políčka?

(Náboj 2013)

Občas je přímé vyčíslování počtu vyhovujících možností příliš pracné a zdouhavé. Nemusíš však zoufat! Existuje totiž řada užitečných triků, které Ti v takových situacích mohou ulehčit život. Můžeme se například podívat na pravděpodobnost doplňkového jevu, která může být mnohem jednodušší na vyjádření.

Úloha 10. Viki má doma šest párů bot. Když se jednoho rána probudil, poslepu náhodně vybral pět bot. Jaká je pravděpodobnost, že je mezi nimi alespoň jeden pár?

Řešení. Počítat pravděpodobnost, že se objevil alespoň jeden pár, zní dost složitě. Spočítáme místo toho pravděpodobnost, že se mezi botami žádný pár neobjevil. Vybíráme-li pět různých bot, nejprve si musíme z šesti typů bot vybrat nějakých pět – to lze $\binom{6}{5} = 6$ způsoby. Dále si pro každý typ musíme vybrat, zda bereme levou, či pravou botu. Celkový počet způsobů je proto $6 \cdot 2^5$ a pravděpodobnost, že se žádný pár neobjevil, je tak $\frac{6 \cdot 2^5}{\binom{12}{5}} = \frac{8}{33}$. Nás zajímá pravděpodobnost doplňkového jevu, a ta je rovna $1 - \frac{8}{33} = \frac{25}{33}$.

Úloha 11. Anička si desetkrát hodila férovou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že jí padla aspoň jedna jednička?

V úlohách se též občas setkáváme s jistou formou symetrie, což nám může také značně zjednodušit práci. V jedné z předchozích úloh jsme například vybírali náhodnou pěticí ze skupiny třiceti tuleňů. Formálně to znamená, že si představíme pravděpodobnostní prostor obsahující všech $\binom{30}{5}$ pětic a z něj jednu vybereme. Intuitivnější představa je, že nejprve z 30 tuleňů vybereme jednoho, ze zbylých 29 druhého atd. Toto je jiný proces než vybrání pětic z množiny pětic, nicméně dává úplně stejný výsledek. To proto, že všichni tuleňi jsou stejní a jenom prostým přejmenováním tuleňů získáme z nějaké pětic libovolnou jinou. Takže každá pětic tuleňů je vybrána se stejnou pravděpodobností, neboť přejmenování tuleňů nemůže změnit pravděpodobnost, že danou pěticí vybereme. Vybírání každé pětic tuleňů se stejnou pravděpodobností je ale přesně to, co děláme v prvním procesu.

Podobné úvahy, kdy si uvědomíme, že dva způsoby výběru jsou vlastně stejné, se dají často s úspěchem využít. Například v následující úloze používáme užitečné pozorování, že pokud zamícháme černé a bílé králíky a náhodně je seřadíme, pravděpodobnost, že první, druhý, ..., poslední králík je černý, musí vyjít pro všechny králíky stejně.

Úloha 12. V klobouku kouzelníka Pokustóna se krčí osm černých a čtyři bílí králíci. Náhodně z klobouku vytáhneme šest králíků. Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažený králík bude černý?

(Náboj 2010)

Řešení. Stačí si rozmyslet, že kýžená pravděpodobnost vyjde stejně pro prvního i posledního králíka. Potom bude jasné, že odpověď je $\frac{8}{12}$.

Vybírání králíků si lze představit tak, že vybereme náhodnou permutaci králíků (neboli postavíme je do řady) a pak postupně vytáhneme prvních šest králíků v řadě. Víme, že v $\frac{8}{12}$ případů bude první králík černý. Platí ale, že pokud v každé možné permutaci prohodíme prvního a šestého králíka, dostaneme zase všechny permutace. To znamená, že počet permutací, v kterých je první králík černý, je stejný jako počet permutací, v kterých je šestý králík černý. Šestý králík tak bude černý s pravděpodobností $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Úloha 13. Áďa a Bára hrají kostky. Áďa hází férovou dvacetistěnnou kostkou, zatímco Bára si třikrát hodí šestistěnnou kostkou a sečte čísla, která na ní padnou. Je větší pravděpodobnost, že Áďa hodí víc než Bára, nebo že Bára hodí víc než Áďa?

Úloha 14. (těžká) Do stomístného letadla nastupuje 100 lidí, každý má místenku na jedno sedadlo. První nastupující ale ztratil svou místenku, a tak si sedne náhodně. Každý další si sedne na svoje sedadlo, je-li volné, a v opačném případě si sedne na náhodné volné sedadlo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední příchozí si sedne na svoje sedadlo?

Úloha 15. (těžká) Mirek je velký gurmán a vlastní pytel, ve kterém je 123 karamelů a 321 hašlerek. Aby si své bonbóny pořádně vychutnal, rozhodl se, že je bude konzumovat specifickým způsobem. Když se ráno probudí, začne z pytle náhodně vytahovat jeden bonbón za druhým. První bonbón rozbálí a sní – každý další bonbón vždy rozbálí, a pokud je tento stejného typu jako všechny předchozí, rovněž jej sní. Je-li jiného typu, vrátí jej zpět do pytle, aby si pro tento den nezkazil chuť. Tím Mirkův ranní rituál končí. Uvedeným způsobem konzumuje Mirek bonbóny každý den až do chvíle, kdy už v pytli žádný nezbyde. Jaká je pravděpodobnost, že posledním snědeným bonbónem bude karamelka? (MKS 32–3j–6)

Nezávislost

Ačkoli už v seriálu nějakou dobu mluvíme o pravděpodobnosti, nedělali jsme zatím nic objevenějšího než počítání možností. Nyní se budeme bavit nezávislostí, což už je typický pravděpodobnostní koncept. Představ si, že hodíme naráz dvěma férovými mincemi (tedy orel i panna padají se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna? Jak správně tušíš, vyjde $\frac{1}{4}$. Přibližně v polovině případů totiž bude panna na první minci a přibližně v polovině případů z této poloviny bude panna na druhé minci.

Tato úvaha samozřejmě funguje obecně. Předpokládejme, že jsme n -krát zopakovali nějaký pokus a víme, že v $p \cdot n$ případech ($p \leq 1$) nastal jev A a v $q \cdot n$ případech ($q \leq 1$) nastal jev B . Potom očekáváme, že pokud na sobě jevy A, B nijak nezávisí, nastanou oba zároveň přibližně v $p \cdot q \cdot n$ případech. To proto, že omezíme-li se na $p \cdot n$ případů, kdy nastane jev A , očekáváme, že v rámci těchto případů bude nastávat jev B zhruba se stejnou frekvencí, s jakou nastával v rámci všech n pokusů.

Abychom nezávislost mohli používat, musíme si přesně definovat, co to je. Úvahu o tom, že pro nezávislé jevy se pravděpodobnost průniku těchto jevů dostane jako součin jejich pravděpodobností, tedy otočíme a naopak pomocí tohoto vzorečku nezávislost formálně definujeme.

Definice. Řekneme, že dva jevy A, B jsou **nezávislé**, pokud

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jakmile máme definici, můžeme mluvit o tom, že dva jevy jsou nezávislé, i když to na první pohled třeba vůbec není jasné. Stačí ověřit, že pro ně platí předchozí vzoreček. Například vytáhneme-li si z balíčku mariášových karet jednu náhodně, jsou jevy „karta je eso“ a „karta je srdcová“ na sobě nezávislé, neboť pravděpodobnost esa je $\frac{1}{8}$, pravděpodobnost srdcové karty je $\frac{1}{4}$ a pravděpodobnost srdcového esa je $\frac{1}{32} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$.

Úloha 16. Dokaž, že jsou-li jevy A, B nezávislé, potom jsou nezávislé i dvojice jevů $\overline{A}, B$, dále $A, \overline{B}$ a také $\overline{A}, \overline{B}$.

Jestliže chceme definovat nezávislost pro více jevů, musíme být opatrní. Co by například měly splňovat tři nezávislé jevy A, B, C ? Určitě chceme, aby

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Zároveň by mělo platit, že pokud trojice A, B, C je nezávislá, tak i tři dvojice (A, B) , (B, C) a (A, C) budou nezávislé podle naší předchozí definice pro dvojice jevů. Tedy bychom rádi, aby zároveň platilo

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C).$$

Asi Tě teď napadá, jestli je opravdu potřeba definovat nezávislost tří jevů pomocí čtyř rovnic. Opravdu to potřeba je. Podívej se na následující dvojici úloh.

Úloha 17. Petr si dvakrát hodil kostkou. Nechť A je jev „na první kostce padlo 2“, B je jev „součet ok na obou kostkách byl 7“ a C je jev „na druhé kostce padlo 3“. Rozmysli si, že všechny dvojice jevů (A, B) , (B, C) a (A, C) jsou nezávislé, ale celá trojice nezávislá není.

Úloha 18. (těžká) Najdi tři jevy A_1, A_2, A_3 , které splňují $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, ale přitom ani jedna dvojice jevů (A_1, A_2) , (A_2, A_3) a (A_1, A_3) není nezávislá.

Pro tři jevy tedy dává smysl nezávislost definovat tak, že musí být splněny čtyři rovnice, každá pro jednu podmnožinu jevů velikosti alespoň dva. Možná už tušíš, jak bude vypadat obecná definice. Budeme prostě požadovat, aby obdobný vzoreček platil pro v podstatě libovolnou podmnožinu jevů.

Definice. Jevy $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou **nezávislé** právě tehdy, když pro každou jejich podmnožinu $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_l}$, $2 \leq l \leq k$, platí

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_l}).$$

Úloha 19. Kolik rovnic definuje nezávislost k jevů? Co by se stalo, kdybychom v definici povolili případ $l = 1$?

Jakkoli může definice vypadat složitě, využití nezávislosti je obvykle velice intuitivní a často si ani neuvedomujeme, že ji vlastně používáme. Ukažme si nyní typický příklad.

Úloha 20. Množina X má n prvků. Nechť A, B jsou dvě náhodné podmnožiny X . Jaká je pravděpodobnost, že A je podmnožina B ? (Náboj 2010)

Řešení. Vybrat náhodnou podmnožinu znamená, že z pravděpodobnostního prostoru obsahujícího 2^n prvků (každý reprezentuje jednu podmnožinu) vybereme náhodně jeden prvek. Užitečnější představa je ale ta, že se postupně pro každý prvek X nezávisle náhodně rozhodneme, zda ho vezmeme, či ne. Z nezávislosti jednotlivých výběrů totiž vyplývá, že pravděpodobnost výběru libovolné podmnožiny je přesně $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n$.

Vybrat dvě náhodné podmnožiny znamená, že náš pravděpodobnostní prostor má dokonce $(2^n)^2$ prvků – každý odpovídá jedné dvojici podmnožin. Znovu ale můžeme nahlédnout, že ekvivalentní způsob je, že se pro každý prvek nezávisle náhodně rozhodneme, zda jej vezmeme do první a zda jej vezmeme do druhé množiny.

Nyní si už jen stačí uvědomit, že při rozhodování o jednom prvku množiny se s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ rozhodneme, že jej vybereme do A , ale nikoli do B . V tomto případě pak A nemůže být podmnožinou B . Opačný jev nastane s pravděpodobností $\frac{3}{4}$. To, že A bude podmnožinou B , pak znamená, že nastalo n nezávislých jevů, každý s pravděpodobností $\frac{3}{4}$, výsledek je tedy $(\frac{3}{4})^n$.

Pozor, zatímco výběr náhodné množiny dává typický příklad nezávislých jevů, setkali jsme se už i s případem, kde výběr nezávislý není.

Úloha 21. Dvanáct orgů, mezi nimi i Danil a Vašek, přišlo do obchodu, načež si v náhodném pořadí stoupli do fronty na banány. Rozmysli si, že jevy „Vašek stojí na i -té pozici“ a „Danil stojí na j -té pozici“ nejsou nezávislé pro žádná i a j .

To by mělo dávat smysl: pokud víme, kde je Danil, dostali jsme náповědu o Vaškově pozici, neboť ten nutně musí být jinde! Intuice tedy říká, že dané jevy na sobě „závisí“.

Úloha 22. O jevech A, B, C víme, že A, C jsou nezávislé, B, C jsou nezávislé a A, B jsou disjunktní. Dále $P(A \cup C) = \frac{2}{3}$, $P(B \cup C) = \frac{3}{4}$ a $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$. Kolik je $P(A), P(B)$ a $P(C)$?

Úloha 23. Uvaž pravděpodobnostní prostor na osmi prvcích. Najdi čtyři jevy A, B, C, D takové, že všechny trojice těchto jevů jsou nezávislé, ale čtveřice nezávislá není.

Vylepšená definice prostoru

Ukázali jsme si již několik příkladů, ve kterých se házelo férovou kostkou. Co když ale kostka férová není? Může se třeba stát, že šestka padne v 30 procentech případů, zatímco jednička nebude padat skoro vůbec.⁷ V takovém případě se hodí přiřadit prvkům pravděpodobnostního prostoru nějaké váhy. Pořád ale budeme požadovat, aby se všechny váhy sečetly na jedničku. Naše definice pravděpodobnostního prostoru tohle ale bohužel neumožňuje. Pojďme ji tedy upravit.

Definice. **Pravděpodobnostní prostor** je konečná množina, jejíž každý prvek (tedy elementární jev) má přiřazené kladné reálné číslo, přičemž součet čísel všech prvků je 1. Pro jev A definujeme jeho **pravděpodobnost** $P(A)$ jako součet čísel odpovídajících elementárních jevů.

Náš předchozí způsob práce s pravděpodobností byl speciálním případem této definice. Až do této chvíle jsme prostě každému elementárnímu jevu přiřazovali číslo $1/|\Omega|$. Protože je tento původní způsob, který jsme dosud používali, hodně častý, říká se mu **klasický** pravděpodobnostní prostor. Pokud někde řekneme, že „z množiny vybereme prvek náhodně“, tak tím automaticky myslíme, že každý prvek je vybrán se stejnou pravděpodobností, tedy pracujeme s klasickým prostorem.

Nyní už ale zpátky k naší nové definici. Všimni si, že všechno, co jsme doposud dokázali pro klasické prostory, platí pro všechny pravděpodobnostní prostory. Speciálně se podívej na úlohu 2 a rozmysli si, že všechny body pořád platí. Ani s naší definicí nezávislosti není žádný problém.

Použití nové definice si ukážeme na následujícím příkladu.

Úloha 24. Kenny, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Kenny se s nimi vsadil o kilo čokolády, že vyhraje dvakrát po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru? Jednotlivé hry jsou na sobě nezávislé.

Řešení. Nechť p je pravděpodobnost, že Kenny vyhraje zápas s Frantou a q pravděpodobnost, že vyhraje zápas s Jardou. Máme $p > q$. Začneme s první možností, tedy nejprve zápas s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou. Odpovídající pravděpodobnostní prostor má 8 elementárních jevů, neboť v každém ze tří zápasů jsou dvě možnosti, jak daný zápas mohl dopadnout. Každý elementární jev ale nastává s jinou pravděpodobností. Pravděpodobnost, že Kenny vyhraje všechny tři zápasy, je z nezávislosti rovna pqp , pravděpodobnost, že dvakrát vyhraje a pak prohraje, je $pq(1-p)$ a pravděpodobnost, že prohraje a pak dvakrát vyhraje, je $(1-p)qp$. Celková pravděpodobnost, že Kenny vyhraje dvakrát za sebou, je $pqp + 2(1-p)qp = pq(2-p)$.

Odobně spočítáme, že ve druhém případě je pravděpodobnost dvou výher za sebou rovna $pq(2-q)$. Protože $p > q$, je druhý výraz větší, tedy Kennymu se vyplatí hrát dvakrát s Jardou nahlédn na to, že Jarda hraje lépe.

Úloha 25. Vandal a moderátor upravují článek na Wikipedii. Na začátku byl článek bez chyby. Každý den přidá vandal jeden chybný údaj. Na konci každého dne má moderátor 2/3 šanci na nalezení každé jednotlivé chyby, která ještě v článku je. Jaká je pravděpodobnost, že po třech dnech bude článek bezchybný? (Náboj 2012)

Úloha 26. Šance, že stopařka Martina v nejbližších 20 minutách stopne auto, je 609/625. Pokud je pravděpodobnost stopnutí auta každou minutu stejná, jaká je pravděpodobnost, že Martina stopne auto v nejbližších pěti minutách? Auto jezdí nezávisle na sobě. (Náboj 2012)

⁷Ne, neřekneme, kde se takové kostky dají sehnat.

Podmíněná pravděpodobnost

V poslední nehvězdičkové sekci prvního dílu si povíme o podmíněné pravděpodobnosti, což je koncept, který nám umožňuje vyznat se v situacích, kdy pracujeme s několika jevy, které nejsou nezávislé, a tedy mezi sebou interagují. Nejprve si ukážeme tzv. Monty Hallův problém, který patří nepochybně k nejznámějším a nejpřekvapivějším úlohám z oblasti pravděpodobnosti.

Monty Hallův problém

To jsou paradoxy, co?

Václav Havel

Úloha 27. (Monty Hallův problém) Ve finále jisté televizní soutěže je za dvěma dveřmi koza a za třetími auto, přičemž soutěžící chce auto. Postaví se tedy k jedné dveři, načež moderátor otevře jednu dveř, za kterými je koza – jiné než ty, ke kterým se soutěžící postavil – a pak dá soutěžícímu možnost ještě svou volbu dveří změnit. Pokud má moderátor na výběr z více možností, vybere si náhodně. Vyplatí se soutěžícímu volbu změnit?

Tato soutěž mimochodem opravdu existovala, stejně jako její moderátor Monty Hall. Zkus si nad úlohou sám (sama) popřemýšlet! Záleží například vůbec na rozhodnutí soutěžícího?

Zádrhel, který je v úloze skrytý, si nyní ukážeme na její následující variantě:

Úloha 28. (Monty se stádem koz) Stejná soutěž, ale před soutěžícím je 50 dveří, přičemž za 49 z nich je koza. Poté, co soutěžící ukáže na dveře, Monty otevře 48 dveří, za kterými je koza (dveře vybrané soutěžícím nechá zavřené). Vyplatí se soutěžícímu svou volbu změnit?

Řešení. Pravděpodobnost, že jsme si při prvním výběru vybrali dveře s autem, je nyní opravdu mizivá – pouhých dvě procenta. S největší pravděpodobností tedy je za vybranými dveřmi koza. V takovém případě nám ale Monty tím, že otevřel zbylé dveře kromě jedné, právě „ukázal“, kde je auto! Pokud tedy v tomto případě změníme, vyhrajeme auto s pravděpodobností 98%. Soutěžícímu se proto vyplatí svoji volbu změnit.

Původní problém funguje úplně stejně, ačkoli tu princip toho, že nám Monty „ukázal“, kde je auto, není tak patrný. Pojďme si jej tedy vyřešit obdobně jako jeho předchozí variantu.

Řešení úlohy 27. Předpokládejme, že jsme si nejprve vybrali první dveře – vzhledem k tomu, že auto je za náhodnými dveřmi, je jedno, co si vybereme na začátek. Levá část obrázku ukazuje, že po našem výběru pracujeme s klasickým pravděpodobnostním prostorem se třemi prvky odpovídajícími poloze auta.

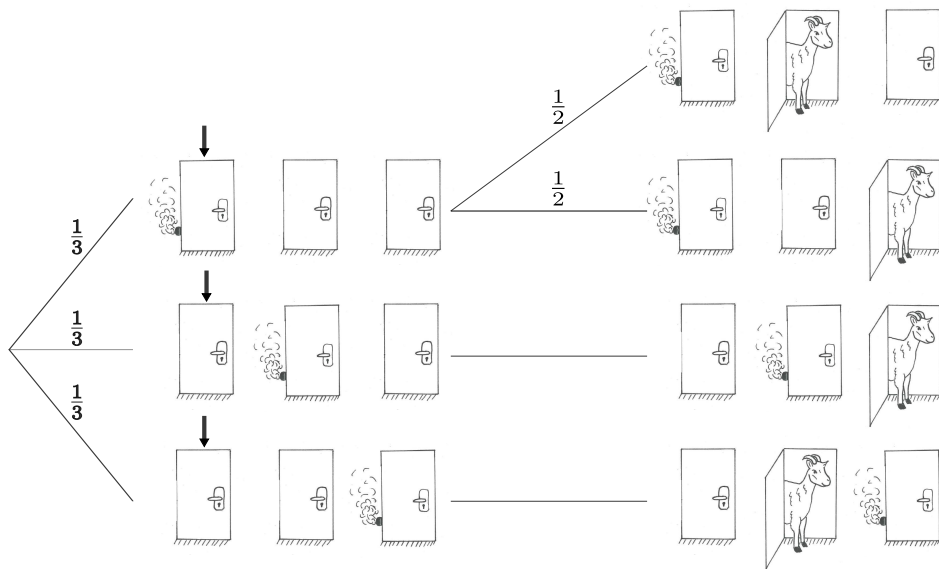
Po Montyho náhodném rozhodnutí náš pravděpodobnostní prostor obsahuje dokonce čtyři prvky, neboť v případě, kdy je za námi vybranými dveřmi auto (horní větev na obrázku), si Monty náhodně vybere jednu ze dvou zbylých dveří.

Můžeme si nicméně všimnout, že ať už si Monty v tomto případě (horní větev na obrázku) vybere kteroukoli ze zbývajících dveří, platí, že prohrájeme právě tehdy, když změníme svou volbu.

Naopak ale platí, že ve zbylých dvou případech (střední a dolní větev na obrázku) vyhrajeme právě tehdy, když změníme svou volbu.

Pokud tedy změníme vybrané dveře, vyhrajeme s pravděpodobností $2/3$. Soutěžícímu se proto vyplatí změnit svou volbu.⁸

⁸Pokud tomuto faktu pořád nevěříš, můžeme Tě ujistit, že byl experimentálně potvrzen v pořadu Boříci mýtů.



Úloha 29. Rozmysli si, že strategie „vždy změním“ funguje úplně stejně i ve chvíli, kdy se Monty nerozhoduje náhodně.

Definice podmíněné pravděpodobnosti

Jak jsme viděli na příkladu úlohy o Monty Hallovi, může se stát, že chceme znát pravděpodobnost nějakého jevu (za vybranými dveřmi je auto) za podmínky, že nastal nějaký jiný jev (Monty otevřel druhé dveře). Podmíněná pravděpodobnost nám umožňuje přistoupit k úlohám tohoto typu.

Vraťme se k pravděpodobnostním prostorům; spočítat pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B , prostě znamená, že místo celého pravděpodobnostního prostoru Ω spočítáme pravděpodobnost jevu A vůči menšímu prostoru určenému množinou B . Zbylé elementární jevy totiž nemohou nastat.

Jenže součet pravděpodobností elementárních jevů uvnitř množiny B už není 1, nýbrž $P(B)$. Abychom tedy dostali správnou hodnotu (což má být poměr „velikosti“ $A \cap B$ oproti „velikosti“ nového prostoru B), musíme spočítat podmíněnou pravděpodobnost jako podíl $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Definice. Podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B , definujeme jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Všimni si, že definice dává smysl jen za předpokladu, že $P(B) \neq 0$. Ptát se, co se stane za předpokladu, že nastane jev, který nastat nemůže, je prostě divné.

Například pokud víme, že na kostce padlo sudé číslo, pak pravděpodobnost, že to byla dvojka, je jedna třetina. Nazveme-li jev „padla dvojka“ A a jev „padlo sudé číslo“ nazveme B , můžeme z definice počítat $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$.

Povšimni si, že pokud jsou jevy A a B nezávislé a zároveň je $P(B) > 0$, můžeme spočítat, že

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

To je důležité pozorování, které potvrzuje intuici: pokud jsou dva jevy nezávislé, tak to, že se jeden z nich stal, neovlivní, zda se stane druhý jev. Z výpočtu však plyne i obrácené tvrzení: pokud $P(A) = P(A|B)$, jsou na sobě jevy A a B nezávislé.

Pokud pracujeme s více než dvěma jevy, může se hodit následující vzoreček:

Úloha 30. Předpokládejme, že $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$. Dokaž, že

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Tento vzoreček by měl být intuitivní. Říká, že aby nastaly všechny jevy $A_1, \dots, A_n$, musel nastat A_1 , pak, když už víme, že nastal A_1 , musel nastat i A_2 , pak, když už víme, že nastal A_1 i A_2 , musel nastat A_3 , atd.

Mimochodem, pokud v úloze 2 podmíníš všechny jevy nějakým novým jevem C (tj. do každé závorky dopíšeš „ $|C$ “), pořadí všechny vlastnosti budou platit. Pracovat s podmíněnou pravděpodobností je totiž vlastně stejné jako pracovat s normální pravděpodobností, pouze se pohybujeme v menším prostoru určeném jevem, kterým podmiňujeme.

Ukažme si nyní jednoduché použití podmíněné pravděpodobnosti. Následující úloha ukazuje, že myšlenky podmíněné pravděpodobnosti jsme vlastně už používali i na začátku seriálu při kombinatorickém počítání.

Úloha 31. V obchodě je 100 žárovek, z nichž 9 je vadných. Marta si tři náhodně vybrala. Jaká je pravděpodobnost, že jsou všechny tři vadné?

Řešení. Jak už víme, vybrat náhodně tři žárovky je stejné jako vybrat náhodně první žárovku, pak ze zbytku vybrat druhou a nakonec třetí. Označme A_1, A_2, A_3 jevy, že první, druhá, třetí žárovka je vadná. Uvědom si, že se jedná o výběr bez opakování, tudíž tři jevy na sobě nejsou nezávislé.

Zajímá nás pravděpodobnost, že nastanou všechny tři jevy zároveň, k čemuž použijeme vzoreček $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$. Pravděpodobnost, že nastane jev A , je $\frac{9}{100}$. Pravděpodobnost, že nastane jev B , když už víme, že nastal jev A , tedy že si Marta vybrala jednu vadnou žárovku, je $\frac{8}{99}$, zbývá totiž už jen osm vadných. Konečně pokud víme, že si Marta vybrala dvě vadné žárovky, máme $P(C|A \cap B) = \frac{7}{98}$. Tedy $P(A \cap B \cap C) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{100 \cdot 99 \cdot 98}$.

Úloha 32. Hodíme třikrát minci. Jaká je pravděpodobnost, že padla třikrát panna, pokud víme, že panna padla aspoň jednou?

Úloha 33. Za předpokladu $X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$ dokaž, že $P(Z|Y) = P(Z|X \cap Y)$ právě tehdy, když $P(X|Y) = P(X|Y \cap Z)$.

Při práci s podmíněnou pravděpodobností je vždy důležité si rozmyslet, jakým jevem vlastně podmiňujeme. Že to není vždy jasné, ukazuje následující úloha, nad kterou se zkus zamyslet.

Úloha 34. Pravděpodobnost, že se narodí chlapec, je stejná jako pravděpodobnost, že se narodí děvče. Navíc má-li rodina více dětí, jejich pohlaví jsou na sobě nezávislá.

- (1) Předpokládejme, že ze všech rodin se dvěma dětmi, kde je starší dítě děvče, si jednu náhodně vybereme. Jaká je pravděpodobnost, že mladší dítě je také děvče?
- (2) Ze všech rodin se dvěma dětmi, které mají alespoň jedno děvče, si jednu náhodně vyberme. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je také děvče?
- (3) Přišli jsme na návštěvu ke vzdáleným příbuzným, kteří mají dvě děti. Na zahradě jsme potkali děvče. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je také děvče?

Ve druhé podúloze vyjde jiný výsledek než v těch zbylých, což je dost překvapivé. Klíčem k pochopení je uvědomit si, že způsob, jakým jsme v této úloze vybírali rodinu, je dost zvláštní.

Dějí se ale ještě překvapivější věci. Zkus se zamyslet nad následující variantou Monty Hallova problému.

Úloha 35. (psycho) Stejná soutěž jako v příkladu s Monty Hallem. Ve chvíli, kdy se Monty chystá otevřít jedny ze dvou neoznačených dveří, zakopne a během pádu omylem náhodně dveře z této dvojice otevře. Ukáže se, že je za nimi koza, takže soutěž může dále probíhat podle plánu. Vyplatí se soutěžícímu změnit své rozhodnutí?

Věta o úplné pravděpodobnosti

Další typické použití podmíněné pravděpodobnosti si ukážeme na alternativním řešení úlohy 3, na níž jsme si vysvětlovali, co jsou to permutace.

Úloha 36. Dvanáct orgů, mezi nimi i Danil a Vašek, přišlo do obchodu, načež si v náhodném pořadí stoupili do fronty na banány. Jaká je pravděpodobnost, že Danil s Vaškem budou stát vedle sebe, aby si mohli povídat o seriálu?

Řešení. Označme A jev, jehož pravděpodobnost chceme spočítat. Kýženou pravděpodobnost $P(A)$ spočteme tak, že jev A rozložíme na dva disjunktní jevy, jejichž pravděpodobnost půjde spočítat snadno.

Označme B jev, že je Danil ve frontě úplně vpředu nebo úplně vzadu, a je tedy vedle něj jen jedno volné místo. Jinak jsou vedle něj místa dvě. Povšimněme si, že $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, a protože jsou tyto dva jevy disjunktní, máme dokonce (dle šestého bodu úlohy 2)

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

Teď už jen stačí spočítat pravděpodobnosti obou jevů, k čemuž použijeme vzoreček pro podmíněnou pravděpodobnost. Pravděpodobnost jevu B , tedy toho, že Danil je úplně vpředu nebo úplně vzadu, je $\frac{2}{12}$, neboť pravděpodobnosti všech pozic Danila jsou stejně pravděpodobné (rozmysli si!). Za podmínky, že Danil stojí na kraji, je pravděpodobnost toho, že Vašek stojí vedle něj, rovna $\frac{1}{11}$, neboť z 11 možných zbylých pozic stojí Vašek na jedné a opět jsou všechny stejně pravděpodobné. Máme tedy

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11}.$$

Obdobně

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}) = \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11}.$$

Dostáváme tak

$$P(A) = \frac{2}{12 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 10}{12 \cdot 11} = \frac{22}{12 \cdot 11} = \frac{1}{6}.$$

I když Ti teď možná tento způsob připadá pracnější než předchozí důkaz, koncepčně je velice jednoduchý: původní problém, který jsme neuměli řešit, jsme přidáním podmínky převedli na dva problémy, jež díky dodané podmínce již řešit umíme.

Tento rozkládací trik se používá tak často, že jeho obecnější varianta dokonce dostala vlastní název – Věta o úplné pravděpodobnosti. Zní následovně:

Věta. (o úplné pravděpodobnosti) *Nechť Ω je pravděpodobnostní prostor a $B_1, B_2, \dots, B_n$ jsou po dvou disjunktní jevy takové, že $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$. Potom pro libovolný jev A platí*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \\ &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n). \end{aligned}$$

Jak sis možná všiml(a), použijeme-li sedmý bod úlohy 2, je znění věty v podstatě i jejím důkazem.

Úloha 37. V seriálu zadává 60 % příkladů Vašek a každý takový příklad vyřešíš s pravděpodobností 80 %. Zbylé příklady jsou od Danila. Když sis ale příklady začal(a) počítat, zjistil(a) jsi,

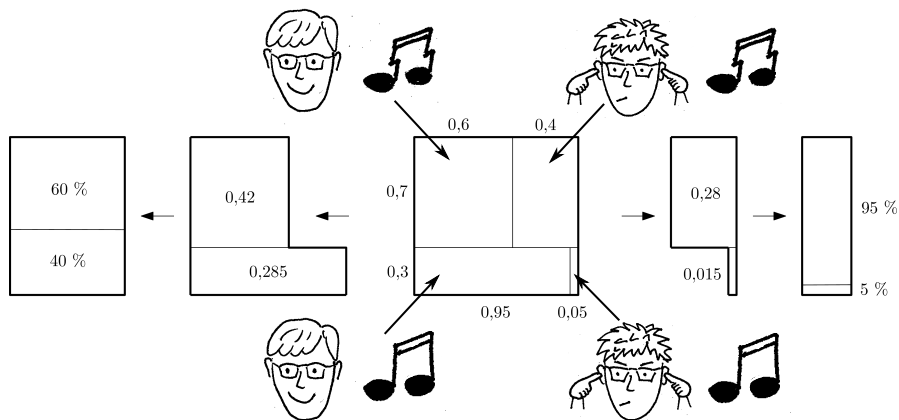
že náhodný příklad umíš vyřešit jen s pravděpodobností 70 %. S jakou pravděpodobností vyřešíš příklad, který Ti zadá Danil?

Úloha 38. Nechť $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou disjunktní jevy takové, že $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = \Omega$. Dále nechť A a B jsou nějaké jevy. Předpokládejme, že pro všechna C_i platí $P(A \cap B | C_i) = P(A | C_i) \cdot P(B | C_i)$. Dále nechť B je nezávislá na všech C_i . Dokaž, že A a B jsou nezávislé.

Bayesova věta

Ukážeme si další použití podmíněné pravděpodobnosti. Předtím si dovolíme jednu obecnou úvahu. Ačkoli dost možná o pravděpodobnosti přemýšlíš i v běžném životě, obvykle nemluvíš o pravděpodobnostním prostoru a pravděpodobnost pro Tebe asi není precizně spočítaná veličina, ale spíš jakýsi osobní odhad toho, že se něco stane: bude pršet, kamarád přijde včas, propadneš z matematiky, ... Potom ostatně ani není jasné, co by měl být pravděpodobnostní prostor dokládající, že pravděpodobnost daného jevu je taková či maková. I v tomto případě ale můžeme používat koncepty jako nezávislost či podmíněná pravděpodobnost. Speciálně pojem podmíněné pravděpodobnosti je velice užitečný, protože umožňuje měnit náš odhad pravděpodobnosti potom, co se stala nějaká událost.

Úloha 39. Vašek se začal učit na housle. Po pár hodinách usoudil, že to již umí, ale jsa si vědom toho, že nemá hudební sluch, odhaduje, že se na housle naučil hrát s pravděpodobností 30 %. Pro jistotu zahrál Danilovi a zeptal se ho, co si myslí. Vašek ví, že pokud na housle doopravdy umí hrát, tak mu Danil s pravděpodobností 95 % řekne pravdu.⁹ Pokud se Vašek hrát nenaučil, Danil mu s 60% pravděpodobností stejně bude tvrdit, že mu to jde. Jak si má Vašek změnit odhad na to, že umí hrát na housle, v závislosti na Danilově odpovědi?



Řešení. Pracujeme s pravděpodobnostním prostorem na čtyřech prvcích (viz obrázek). Označme A jev „Vašek umí hrát na housle“ a B jev „Danil tvrdí, že Vašek umí hrát na housle“.

Potom, co Danil odpoví kladně, musíme podmínit jevem B a po spočtení nových pravděpodobností dostáváme

⁹Padesát procent autorů se domnívá, že je tento odhad příliš optimistický (a Danil taky).

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,3 \cdot 0,95 + 0,7 \cdot 0,6} = \frac{0,285}{0,285 + 0,42} \doteq 0,40. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že Vašek umí hrát, se tedy zvýšila na 40 %. V případě nepříznivé recenze znovu počítáme:

$$\begin{aligned} P(A|\bar{B}) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(A)P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})} \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,3 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,4} = \frac{0,015}{0,015 + 0,28} \doteq 0,05. \end{aligned}$$

V tomto případě se Vaškovy šance snížily na pouhých 5 %.

Původnímu odhadu pravděpodobnosti se také říká apriorní pravděpodobnost a odhadu opravení na základě toho, že se stal (nebo nestal) daný jev, se říká aposteriorní pravděpodobnost.

V úloze jsme dvakrát použili stejnou úvahu, kterou shrnuje následující Bayesova věta.

Věta. (Bayesova) *Jestliže $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$, platí*

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}.$$

Důkaz.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}.$$

Není důležité si vzoreček pamatovat, ale je dobré vědět, k čemu je dobrý: dává návod, jak vyjádřit $P(A|B)$ pomocí $P(B|A)$. Když používáš Bayesovu větu, často člen ve jmenovateli přímo neznáš a musíš jej spočítat z věty o úplné pravděpodobnosti jako $P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$; tak tomu bylo i v našem případě.

Bayesova věta se používá třeba v nemocničním prostředí. Vzhledem k tomu, že testy chorob mají samy o sobě určitou chybovost, je dobré umět si spočítat, jak moc testu můžeme věřit.

Úloha 40. Jistou vzácnou chorobou trpí jeden člověk z tisíce. Dá se odhalit testem, který funguje následovně. Pokud chorobou skutečně trpíme, test ji spolehlivě odhalí. Pokud chorobou netrpíme, s pravděpodobností 1 % test stejně nahlásí nemoc. Nechali jsme si udělat test a vyšlo nám, že touto chorobou trpíme. Jaká je pravděpodobnost, že tomu tak skutečně je?

Něrekneme Ti, jak pravděpodobnost vyjde, ale bude překvapivě malá. „Paradoxnost“ tohoto příkladu ale neznamena, že by Bayesova věta sama byla nějak paradoxní, problémem je spíš to, že se v příkladu míchají malá a velká čísla. Je užitečné nahlédnout, že když k doktorovi přijde tisíc zdravých lidí, přibližně deseti z nich bude chybně diagnostikována choroba, ale jen jeden člověk bude doopravdy nemocný. Pravděpodobnost, že člověk, kterému vyšlo, že chorobou trpí, je opravdu nemocný, by proto měla být přibližně $\frac{1}{10+1} \doteq 0,09$.

Případu, kdy test nahlásí neexistující chorobu, se obvykle říká falešně pozitivní (false positive), zatímco pokud by test chorobu v některých případech nebyl schopen odhalit, mluvili bychom o falešně negativním výsledku (false negative).

Úloha 41. V krabičce jsou tři mince: dvě poctivé a jedna, která má na obou stranách pannu. Jednu minci si náhodně vybereme a hodíme si.

- (1) S jakou pravděpodobností padne panna?
- (2) Hodili jsme si a padla panna. S jakou pravděpodobností se jedná o falešnou minci?

Nekonečné pravděpodobnostní prostory*

V seriálu jsme se doposud setkali jen s konečně velkými prostory. Jak jsi viděl(a), i ty mohou být dost zajímavé a užitečné, v praxi ale často nestačí. Představ si, že si házíš mincí, dokud Ti nepadne panna. Už tento jednoduchý pokus vyžaduje nekonečný pravděpodobnostní prostor! Pro každé přirozené číslo k totiž bude v prostoru jeden prvek odpovídající jevu „panna poprvé padla v k -tém kroku“. Často je ale situace ještě složitější. Představ si, že nad někým zlomíš metr dlouhou hůl na náhodném místě. Potom musí odpovídající pravděpodobnostní prostor obsahovat libovolné reálné číslo z intervalu $(0, 1)$!

Možná už jsi někdy slyšel(a) o tom, že podobně jako můžeme porovnávat velikosti konečných množin, lze porovnávat i velikosti množin nekonečných.¹⁰ V praxi se obvykle setkáš s dvěma velikostmi.

Nekonečné množiny, které jsou stejně velké jako množina přirozených čísel, se nazývají **spočetné**. Takové množiny jsou sice nekonečné, ale v lecčems se chovají podobně jako konečné množiny. Ukázkou spočetného pravděpodobnostního prostoru je náš příklad s házením mincí – jeho prvky se dají přímočaře očíslovat přirozenými čísly. Prostorům, které jsou konečné nebo spočetně nekonečné, se také někdy souhrnně říká **diskrétní**¹¹. To, čemu jsme doteď říkali konečný pravděpodobnostní prostor, je tedy speciální případ diskrétního prostoru.

Náš příklad s holí vede k tzv. **spojitému** prostoru, ve kterém je počet prvků prostoru stejně velký jako počet reálných čísel na reálné přímce nebo uvnitř nějakého netriviálního intervalu. Takhle velké množiny už nelze očíslovat přirozenými čísly, a jsou proto větší než spočetné, protože se jim říká **nespočetné**. Tyto prostory jsou v jistých ohledech složitější než spočetné a při jejich používání musíme být patřičně opatrní. Přesto platí, že ačkoli pořádné pochopení těchto prostorů vyžaduje notný kus vysokoškolské matematiky (konkrétně teorie míry), na intuitivní úrovni se o nich dá přemýšlet stejně jako o normálních prostorech a my si o nich později také něco povíme.

Spočetné prostory*

Vraťme se k našemu příkladu s házením mincí a ukažme si na něm rozdíly oproti konečným prostorům. Můžeme si úlohu rovnou zobecnit: místo obyčejné mince budeme uvažovat takovou, na níž padne orel s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Označíme-li X_i jev „panna poprvé padla v i -tém kroku“, tak platí $P(A_i) = p^{i-1}(1-p)$ (nejprve musel $(i-1)$ -krát padnout orel a pak konečně panna). Jevy A_i jsou elementární jevy uvažovaného pravděpodobnostního prostoru: po nějakém počtu pokusů panna prostě musí padnout.

To nemusí být úplně jasné, přece jen možnost „žádná panna nepadla“ je taky legitimní. Jak ale víme, pravděpodobnost, že panna nepadla po n krocích, je p^n , což se pro p z uvažovaného intervalu pro velká n blíží k nule. Pravděpodobnost, že panna nikdy nepadne, proto musí být menší než p^n pro libovolné n a jediné nezáporné číslo, které tohle splňuje, je 0. Elementární jev s pravděpodobností nula by ale v prostoru beztak nehrál žádnou roli, tudíž tuto možnost neuvažujeme.

V našem pravděpodobnostním prostoru, byť je nekonečný, se musí pravděpodobnosti elementárních jevů počítat na jedničku, takže musí platit

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots = (1-p) + (1-p)p + (1-p)p^2 + \dots = 1,$$

¹⁰ Pokud by ses o nekonečnu rád dozvěděl(a) víc, otevři si PraSečí seriál z ročníku 2015/16. Zde zmíníme jen to, co je nezbytné.

¹¹ Slovo discrete znamená anglicky oddělený, takže tento název má být protikladem ke spojitým prostorům, ke kterým se záhy dostaneme.

neboli po vydělení nenulovým číslem $1 - p$ dostáváme

$$1 + p + p^2 + \dots = \frac{1}{1 - p}.$$

Pravděpodobnostní interpretaci jednotlivých členů jsme právě nahlédli, kde se vzal známý vzoreček pro součet tzv. nekonečné geometrické řady, který se nám dále bude hodit.

Předchozí příklad byl typickým případem využití nekonečného diskrétního prostoru: máme nějaký pravděpodobnostní proces, který sice hypoteticky může pokračovat donekonečna, ale ve skutečnosti skončí v konečném čase s pravděpodobností 1. Tak je tomu i v následujících úlohách:

Úloha 42. Tuleňátko a jeho maminka loví ryby, přičemž tuleňata mají při lovu ryb úspěšnost $\frac{1}{3}$, zatímco dospělí tuleňové $\frac{2}{3}$ (jednotlivé pokusy o ulovení ryby jsou na sobě nezávislé). Teď kolem lovicí dvojice prolouvají ryby, přičemž každou z nich se nejprve pokusí ulovit tuleňátko a až poté maminka. Jaká je pravděpodobnost, že bude první ulovená ryba ulovena tuleňátkem?

Řešení. Buď T jev „tuleňátko jako první chytlo rybu“. Tento jev můžeme rozložit na dva disjunktní jevy T_1 : „tuleňátko chytlo rybu při prvním pokusu“ a T_2 : „tuleňátko ani maminka nechytili rybu při prvním pokusu, načež tuleňátko chytlo rybu jako první“. Pravděpodobnost prvního jevu je rovna $P(T_1) = \frac{1}{3}$, zatímco pravděpodobnost druhého jevu můžeme vyjádřit jako

$$P(T_2) = P(\text{tuleňátko ani maminka nechytily napoprvé}).$$

$$P(\text{tuleňátko chytlo jako první} | \text{tuleňátko ani maminka nechytily napoprvé}).$$

Protože jsou ale jednotlivé pokusy nezávislé, máme

$$P(T_2) = P(\text{tuleňátko nechytilo napoprvé}) \cdot P(\text{maminka nechytila napoprvé}).$$

$$P(\text{tuleňátko chytlo jako první}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot P(T) = \frac{2}{9} P(T).$$

Dostáváme tak $P(T) = P(T_1) + P(T_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} P(T)$. Vyřešením této lineární rovnice dostaneme $P(T) = \frac{3}{7}$.

Úloha má ale i přímočařejší řešení. Mohli jsme například jev T rozložit na nekonečně mnoho disjunktních jevů T_i „tuleňátko chytlo rybu jako první na i -tý pokus“ pro přirozená i ; díky nezávislosti jednotlivých pokusů vyjde

$$P(T_i) = P(\text{oba tuleňové minuli})^{i-1} \cdot P(\text{tuleňátko chytlo rybu}) = \left(\frac{2}{9}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

Celkovou pravděpodobnost pak dostaneme sečtením geometrické řady jako $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/9} = \frac{3}{7}$.

Ještě jiný způsob, jak vyřešit tuto úlohu, je uvědomit si, že pro každou rybu má tuleňátko pravděpodobnost $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, že ji uloví, a maminka pravděpodobnost $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, že ji uloví. Rozmysli si, že i výsledné pravděpodobnosti toho, kdo uloví první rybu, tak musí být v poměru tři ku čtyřem, tedy tuleňátko uloví první rybu s pravděpodobností $\frac{3}{7}$.

Úloha 43.

- (1) Hedvika a Kája hrají následující hru s férovou mincí. Hází si jí a zapisují si výsledky na papír (P=panna, O=orel), dokud se tam neobjeví posloupnost POP nebo OOP. Objeví-li se jako první POP, vyhraje Kája, jinak vyhraje Hedvika. Kdo má větší pravděpodobnost výhry?
- (2) To samé, ale Hedvika vyhrává, objeví-li se posloupnost PPO. (MKS 26–5–4)

Úloha 44. Lucien se potřebuje rozhodnout, zda si dá větrník, nebo věneček. Rád by si hodil minci tak, aby obě možnosti měly stejnou pravděpodobnost, nicméně má jen minci, na které padne panna s pravděpodobností $p < \frac{1}{2}$. Jak to má udělat?

Úloha 45. Na souso hrají orgové frisbee proti účastníkům, přičemž vyhraje ten tým, který získá jako první dva body po sobě.

- (1) Při každé rozehrávce platí, že tým orgů získá bod s pravděpodobností p (a účastníci tedy s pravděpodobností $1 - p$). Jaká je pravděpodobnost, že orgové vyhrají?
- (2) Platí, že tým, který rozehrává, získá další bod s pravděpodobností p (v souladu s pravidly frisbee vždy rozehrává tým, který získal minulý bod). Jaká je pravděpodobnost, že vyhrají orgové, pokud nechají účastníky rozehrát jako první?

Úloha 46. (těžká) Ve vrcholech $(n+1)$ -úhelníka stojí n ovcí a vlk, který v každém kroku skočí do náhodného sousedícího vrcholu a sní tamní ovečku, jestliže tam nějaká je. Která ovce má nejvyšší pravděpodobnost, že zůstane poslední naživu?

Jakkoli to zatím vypadá, že spočetně nekonečné prostory se od těch konečných moc neliší, jeden zásadní rozdíl tu je. Neexistuje totiž spočetně nekonečný analog ke klasickým prostorům. Vybíráme-li náhodně číslo z množiny $\{1, \dots, n\}$, každé bude zvoleno s pravděpodobností $\frac{1}{n}$. Co se ale stane, když místo toho budeme chtít zvolit náhodné přirozené číslo? Kdybychom o každém z nich řekli, že bude zvoleno s pravděpodobností $p > 0$, tak by potom muselo platit $p + p + p + \dots = 1$, zároveň je však součet na levé straně větší než $n \cdot p$ pro libovolné přirozené n a proto nemůže být shora omezený. Takže máme spor a musí platit $p = 0$. To je ale také nesmyslné, protože se pak součet všech pravděpodobností nasčítá na 0.

Toto je jeden z důvodů, proč jsou tak důležité spojitě prostory, kde tento problém lze překonat. Například vybírání náhodného reálného čísla z intervalu $(0, 1)$ opravdu lze udělat v jistém smyslu rovnoměrně.

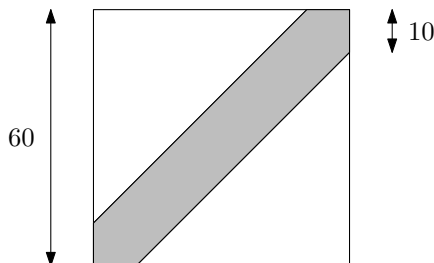
Spojitě prostory*

Protože definice spojitých prostorů je složitější než způsob, kterým je budeme používat, ukážeme si nejprve jejich využití na následujícím příkladu.

Úloha 47. Rytíři Honza a Petr zítra odpoledne svedou duel o přízeň madam Verči. Zapomněli ale, kdy přijít, takže každý z nich přijde náhodně mezi čtvrtou a pátou hodinou nezávisle na tom druhém. Pokud bude některý rytíř marně čekat na soupeře alespoň deset minut, prohlásí sám sebe za vítěze a odejde. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k duelu?

Řešení. Celý pravděpodobnostní prostor je vlastně čtverec o straně 60 (měříme v minutách), ve kterém si navíc zavedeme souřadnou soustavu s počátkem v dolním levém rohu a osami totožnými se stranami čtverce. Nyní každému bodu (x, y) uvnitř čtverce odpovídá jev „Honza přišel x minut po čtvrté a Petr přišel y minut po čtvrté“. Pozor, x i y jsou jakákoli reálná čísla mezi nulou a šedesáti.

Teď už máme skoro vyhráno, stačí si jenom rozmyslet, jak bude v našem obrázku vypadat množina bodů, která splňuje podmínku ze zadání. To je však v tomto případě velmi snadné: podmínka je totiž ekvivalentní s $x - 10 \leq y \leq x + 10$, takže hledaná množina bodů bude průnikem pravděpodobnostního prostoru s pásem mezi přímkami $y = x + 10$ a $y = x - 10$.



Obsah celého čtverce je $60^2 = 3600$ a vyhovující množinu z něj můžeme získat odstříhnutím dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků s délkou odvěsny 50, takže má obsah $60^2 - 2 \cdot \frac{50^2}{2} = 1100$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1100}{3600} = \frac{11}{36} \doteq 0,31$.

Poznamenejme, že řešení by se nezměnilo, kdybychom místo vzdálenosti nejvýše deset požadovali vzdálenost ostře menší než deset. Dvě hraniční úsečky obrazce totiž mají nulový obsah.

Rozdíl v řešení této úlohy oproti těm předchozím byl ten, že místo toho, abychom počítali počet úspěšných pokusů, uvědomili jsme si, že pravděpodobnostní prostor i hledaný jev odpovídají obrazcům a stačí tak pouze spočítat podíl jejich obsahů. A tak to bude i v následujících úlohách. Pravděpodobnostní prostor může být obrazec, ale také jen pouhá úsečka jako v našem motivačním příkladě se zlomenou holí. Pak počítáme s délkami místo obsahů.

Úloha 48. Na úsečce délky 2 náhodně zvolíme dva body, čímž ji rozdělíme na tři menší úsečky. Jaká je pravděpodobnost, že z nich půjde složit nedegenerovaný trojúhelník?

Úloha 49. Do roviny s kartézskou soustavou souřadnic jsme náhodně umístili úhel o velikosti 110 stupňů tak, že vrchol úhlu je v počátku. Jaká je pravděpodobnost, že ramena tohoto úhlu tvoří graf funkce? (Náboj 2013)

Úloha 50. David každý víkend jezdí z plzeňského nádraží buď za manželkou do Dobřan, nebo za maminkou do Rokycan. Nastoupí vždy do prvního vlaku, který jede. Ačkoli vlaky do Rokycan jezdí stejně často jako vlaky do Dobřan, po nějakém čase David shledal, že byl u maminky dvakrát častěji než u manželky. Jak je to možné?

Úloha 51. V intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vybereme rovnoměrně náhodně dvě čísla x a y . Jaká je pravděpodobnost, že

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \leq \min\{x, y\}?$$

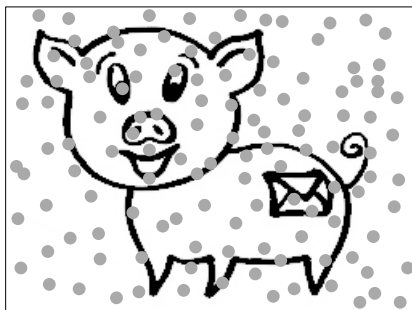
(MKS 26–5–6)

Úloha 52. Alča na dvě náhodná místa metrové tyčky nakreslila puntíky. Pak přišel Pepa a tyčku náhodně rozlámá na 2013 částí. Jaká je pravděpodobnost, že oba puntíky jsou teď na té samé části? (Náboj 2013)

Úloha 53. (těžká) Náhodně zvolíme n bodů na kružnici. Jaká je pravděpodobnost, že všechny půjdou zakrýt nějakou půlkružnicí?

Pro zajímavost dodejme, že vztahu mezi pravděpodobnostmi a obsahy (či objemy) se využívá i v opačném směru, než jaký jsme zatím viděli. Představ si, že máme nějaký (dostatečně rozumný) geometrický útvar U uvnitř jednotkového čtverce. Potom pravděpodobnost toho, že náhodně zvolený bod uvnitř čtverce bude ležet v U , je rovna jeho obsahu. Ze znalosti obsahu U bychom tedy uměli spočítat tuto pravděpodobnost... Ale co když neumíme obsah U přesně spočítat? Stačí postupovat pozpátku! Pravděpodobnost dopadu bodu dovnitř totiž můžeme poměrně přesně určit experimentálně, stačí pouze s pomocí počítače vybrat dostatečné množství náhodných bodů. Tento postup se nazývá metoda Monte Carlo a uplatňuje se třeba při numerickém modelování.

Příklad této metody je na následujícím obrázku. Odhadovat obsah prasátka by bylo zdlouhavé, rychlý odhad ale získáme tak, že vygenerujeme několik náhodných bodů¹² a spočítáme poměr těch, které se trefily dovnitř. Tímto poměrem pak přenásobíme obsah obdélníku, ve kterém prasátko žije.



Jak se to dělá pořádně (a obecně)**

Matematika je umění dávat stejná jména různým věcem.

Henri Poincaré

Při formálním zavedení spojitého pravděpodobnostního prostoru vzniknou jisté potíže. Vypadá to, že naše definice pravděpodobnostního prostoru jakožto množiny elementárních jevů tu selže ze stejného důvodu, ze kterého neexistuje rovnoměrné vybírání na přirozených číslech. Pokud bychom měli každému reálnému číslu $z \in (0, 1)$ přiřadit tutéž pravděpodobnost p , že jej vybereme, tak by nám podobně jako v diskrétním případě vyšlo, že musí platit $p = 0$. I když jsme tuto variantu pro diskrétní prostory zavrhnuli, tak je vlastně v jistém smyslu dost intuitivní. Zlomit nekonečně dělitelnou hůl naprosto přesně v jedné třetině je prostě nemožné.

Jak ale může všechno fungovat? Trik je v tom, že existují různé velká nekonečna. Jde o to, že nespočetně mnoho čísel už prostě nejde sečíst.¹³ To je ale naše záchrana, protože ať už by se nuly sečetly na kolik, dostali bychom spor.

Zásadní rozdíl mezi diskrétními a spočetnými prostory je teď ten, že nemůžeme ignorovat elementární jevy, které mají pravděpodobnost nula – naopak, úplně všechny elementární jevy teď mají pravděpodobnost nula.

Jeden problém jsme sice vyřešili, ale jiný jsme zase vytvořili. Řekli jsme si, že pravděpodobnost jevu se spočte jako součet pravděpodobností elementárních jevů v tomto jevu obsažených. Z toho také plyne, že ve spojitém prostoru bude pravděpodobnost libovolného jevu sestávajícího z konečně nebo spočetně mnoha prvků rovna nule. Ve chvíli, kdy jev obsahuje nespočetno elementárních jevů, teď ale jeho pravděpodobnost neumíme spočítat!

Tento problém se dá vyřešit tak, že místo toho, abychom definovali jen pravděpodobnosti elementárních jevů, budeme rovnou definovat pravděpodobnosti úplně všech jevů. Nemůžeme ale tyto pravděpodobnosti definovat jen tak nahodile; matematici proto množině, jejíž podmnožiny mají přiřazené pravděpodobnosti, říkají pravděpodobnostní prostor jen tehdy, jsou-li splněny následující tři podmínky:

- (1) Pravděpodobnosti všech jevů jsou reálná čísla z intervalu $(0, 1)$.
- (2) Pro pravděpodobnost celého prostoru platí $P(\Omega) = 1$.
- (3) Pravděpodobnost sjednocení disjunktních množin je rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, a to i tehdy, když je množin spočetně nekonečně mnoho.

¹²Případně si zahrajeme šipky.

¹³Úplně na okraj dodejme, že za sečtení nespočetně mnoha čísel lze v jistém smyslu považovat integrování, ale to je skutečně vysoko nad rámec našeho seriálu.

Rozmyslí si, že ať už jsme pravděpodobnost určovali tak, že jsme počítali počet vyhovujících jevů (klasické prostory), nebo jsme počítali obsahy (spojité prostory), první dvě vlastnosti a třetí pro konečné mnoho množin byly splněny. Také si rozmyslí, že z těchto podmínek lze odvodit všechny body úlohy 2. Jinými slovy, tyto tři abstraktní podmínky stačí na to, aby se pravděpodobnost chovala tak, jak jsme zvyklí.

Je tu ještě jeden problém, který jsme Ti radši zatajili. Pokud jsi dostatečně odvážný (odvážná), podívej se do kapitoly Neměřitelná množina třetího dílu seriálu z 35. ročníku. Nalezneš zde problém i jeho řešení.

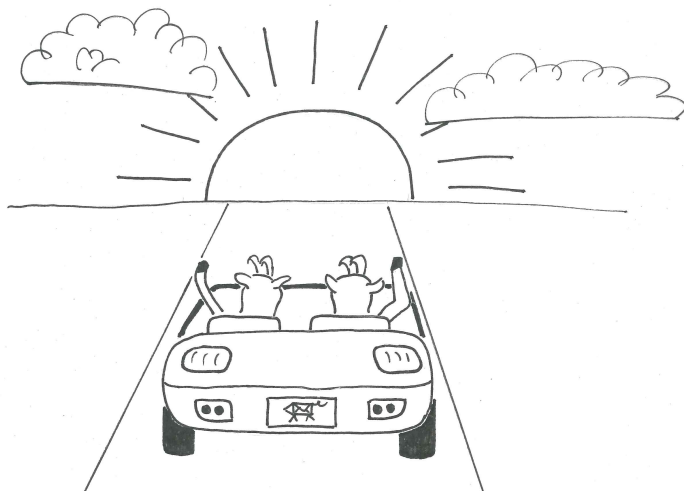
Závěr

Hurá, první díl je za Tebou! Zopakujme si několik základních pojmů, na které jsme narazili: Pravděpodobnostní prostor je (pro naše účely typicky konečná) množina možných výsledků, která se objeví vždy, když počítáme pravděpodobnostní úlohu. Možným výsledkům se říká elementární jevy. Obecně pak jevem myslíme libovolnou podmnožinu pravděpodobnostního prostoru. Mezi důležité pojmy z teorie pravděpodobnosti pak patří zejména nezávislost a podmíněná pravděpodobnost, které používáme ve chvíli, kdy spolu interagují různé jevy.

Nakonec jsme si v hvězdičkové části ukázali, že i nekonečné prostory mohou být užitečné. Existují dva důležité exempláře: diskrétní prostor, který může být konečný (s takovými prostory normálně v seriálu pracujeme), nebo spočetně nekonečný. Spojité prostory jsou vždy nespočetně nekonečné a všechny, které jsme zatím potkali, odpovídaly rovnoměrnému vybírání bodů z nějakého geometrického obrazce.

V příštím díle se seznámíme s náhodnými veličinami, tedy proměnnými, které mohou nabývat různých hodnot s různou pravděpodobností. Také si ukážeme, jak aplikovat pravděpodobnost na řešení kombinatorických úloh.

Do té doby si zkus pohrát se soutěžními úlohami. Připomínáme, že na jejich řešení není potřeba hvězdičková část o nekonečných prostorech. (Ale doporučujeme se na ni aspoň zkusit podívat – plno jejich částí je na první pohled mnohem stravitelnějších než Monty Hallův paradox.) Hodně zdaru!



Návody k úlohám

4. Pravděpodobnostní prostor obsahuje $15!$ permutací písmen daného slova. Pozor, pokud prohodíme dvě Očka, dostaneme sice jinou permutaci, ale stejné slovo.
5. Pravděpodobnostní prostor je tvořen všemi možnými devatenáctiprvkovými frontami neboli všemi permutacemi na devatenácti prvcích. Jak vypadá fronta, kde žádní dva lachtani nestojí vedle sebe?
8. (1) Celkový počet výběrů vyjádří jako kombinační číslo a počet správných výběrů bude vhodný součin.
(2) Každý takový výběr odpovídá nějaké permutaci na n prvcích.
9. Rozmysli si, že z levého horního do pravého dolního políčka vede $\binom{2(n-1)}{n-1}$ cest.
11. Podívej se na doplňkový jev.
13. Na kostce s n stěnami je pravděpodobnost toho, že padne x , stejná, jako že padne $n + 1 - x$.
14. Změnilo by se něco, kdyby nově přichozí, který si nemůže sednout, vyhodil prvního pasažéra z jeho místa, a ten si poté znova sednul na náhodné místo?
15. Jaká je pravděpodobnost, že Mírek daný den dojí všechny karamelky, resp. hašlerky?
17. Vyjádří pravděpodobnosti průniků různých jevů.
18. Uvaž pravděpodobnostní prostor s osmi jevy a najdi tři jevy o čtyřech prvcích, které se protínají v jednom prvku. Dej si ale pozor, aby náhodou nějaká dvojice nebyla nezávislá (existuje hodně možných řešení).
19. Každá rovnice odpovídá podmnožině alespoň dvou jevů. Z celku tedy odečti počet podmnožin velikosti nejvýše jedna.
22. Nakresli si Vennův diagram.
23. Může pomoci představit si osmici jako krychličku.
25. Jaká je pravděpodobnost, že nějaká chyba vydrží k dní?
26. Podívej se na doplňkové jevy a pak použij nezávislost.
30. Rozepiš podmíněné pravděpodobnosti na pravé straně a pokrač.
32. Výsledkem je podíl dvou pravděpodobností, které můžeš snadno spočítat.
33. Rozepiš pravděpodobnosti podmíněných jevů z definice.
34. Možná se ti o problému bude lépe přemýšlet, když místo rodin budeš uvažovat pokus se dvěma hody mincí. Ve druhém případě jsme si dvakrát hodili mincí a víme, že alespoň jednou padla panna; ve třetím Danil oznámil, že si dvakrát hodí mincí, my jsme byli přítomni jen jednomu pokusu a při něm padla panna.
37. Pomocí věty o úplné pravděpodobnosti můžeš vyjádřit, jak vzájemně závisí celková pravděpodobnost vyřešení příkladu a pravděpodobnosti vyřešení příkladů jednotlivých autorů.
40. Prostě dosad' do Bayesovy věty a nenech se překvapit výsledkem. ;-)
41. Použij 1) větu o úplné pravděpodobnosti, 2) Bayesovu větu.
43. (1) Podívej se na poslední dvě písmena na papíře. Která z holek má jakou šanci, když jsou to OO? A co ostatní případy?
(2) Podobně jako příklad s tuleňátkem.

44. Podívej se na dva po sobě jdoucí hody.
45. Dá se postupovat podobně jako v úloze s tuleňátkem; orgové vyhrají při posloupnosti vítězů OO, ÚOO, OÚOO, ÚOÚOO, ... Pak stačí sečíst geometrickou řadu.
46. Budeme muset zklamat všechny chytré ovečky: vyjde to stejně pro každou z nich. Dívej se na jednu ovci se zvláštním ohledem okamžiky, kdy je vedle ní vlk, a uvědom si, že díky symetrii daná pravděpodobnost musí vyjít pro všechny ovce stejně.
48. Z trojúhelníkové nerovnosti to půjde právě tehdy, když budou všechny tři mít délku menší než jedna. Představ si pravděpodobnostní prostor jako rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 2 (proč ne čtverec?). Vyjde jedna čtvrtina.
49. Lomená čára je grafem funkce právě tehdy, když protíná každou vodorovnou přímkou v právě jednom bodě.
50. Jaký čas uplyne mezi příjezdem vlaku do Dobřan a následujícího vlaku do Rokycan?
51. Vzpomeň na rovnici kruhu.
52. Zkoumej pouze uspořádání 2015 objektů na úsečce, na konkrétním umístění nesejde.
53. Necht' A_i je jev značící, že všechny body lze zakrýt půlkružnicí bez pravého okraje, jejíž levý okraj je i -tý bod. Rozmysli si, že takové jevy jsou navzájem disjunktní.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.
- (2) $P(\overline{A}) = \frac{|\Omega \setminus A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - P(A)$.
- (3) Pro $A \subseteq B$ jistě platí $|A| \leq |B|$, což je po vydělení kladným číslem $|\Omega|$ ekvivalentní s $P(A) \leq P(B)$.
- (4) Každý prvek množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ musí z definice sjednocení být prvkem alespoň jedné z množin $A_1, A_2, \dots, A_n$, takže $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + \dots + |A_n|$. Rovnost nastává tehdy, když je každý prvek z levé strany započítán na pravé straně právě jednou, neboli když žádný z prvků sjednocení není prvkem víc než jedné množiny A_i , a tyto množiny jsou proto disjunktní. Po vydělení rovnice kladným číslem $|\Omega|$ dostaneme kýženou nerovnost.
- (5) Jak jsme již viděli v odvozování čtvrté položky, je velikost $A \cup B$ nejvýše $|A| + |B|$, pro nedisjunktní množiny ale některé prvky sjednocení započítáme dvakrát. To se nám stane právě pro ty prvky, které patří do obou množin, neboli $|A \cap B|$ -krát, takže pro přesné vyjádření velikosti průniku je ještě potřeba odečíst tento člen. Nakonec vydělíme $|\Omega|$.
- (6) Díky disjunktnosti doplňkových jevů B a $\overline{B}$ jsou i oba jevy $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ disjunktní, takže použitím čtvrté položky dostáváme $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
- (7) Zcela analogicky jako výše, jen místo dvou jevů jich bude n .
4. Dvě písmena (P, D) se objeví dvakrát a jedno (O) třikrát, takže dostaneme dohromady $2! \cdot 2! \cdot 3! = 24$ uspořádání písmen, která dohromady dávají to samé slovo. Pravděpodobnost tedy vyjde $\frac{24}{15!}$.
5. Aby se toto stalo, musí si lachtani a tuleni stoupnout na přeskáčku s tím, že vpředu je lachtan. Podíváme-li se pouze na lachtany, mohou stát vůči sobě v libovolném pořadí, stejně tak tuleni. Vyjde tedy $\frac{10! \cdot 9!}{19!}$.
7. Zatímco všech pětic tuleňů je $\binom{30}{5}$, počet pětic, které Radovi přijdou roztomilé, můžeme vyjádřit jako $\binom{10}{5}$. Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}$.
8. (1) Celkový počet výběrů je $\binom{100}{10}$. V každém řádku má Michal deset možností, odkud vybrat bonbón, takže celkový počet vyhovujících výběrů je 10^{10} . Vyjde tedy $\frac{10^{10}}{\binom{100}{10}}$.

- (2) Dále každý výběr takový, že je vybrán právě jeden bonbón z každého řádku i sloupce, odpovídá jedné permutaci – dostaneme ji tak, že postupně pro každý sloupec přečteme, v kolikátém řádku jsme z daného sloupce vybrali bonbón. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{10!}{10} = \frac{10! \cdot 10!}{100 \cdot 99 \cdots 91}$.

9. Každá cesta z počátečního políčka do cíle sestává z $n - 1$ kroků doprava a $n - 1$ kroků dolů. Počet cest pak odpovídá počtu způsobů, jak z řady $2(n - 1)$ šipek vybrat $n - 1$ šipek doprava (zbylé budou dolů). To je přesně $\binom{2(n-1)}{n-1}$. Vybereme-li si libovolnou z těchto cest, pravděpodobnost, že byla skutečně nakreslena, je $(\frac{1}{2})^{2(n-1)}$ (co je nakresleno na ostatních políčkách, to nás vůbec nezajímá). Protože jsou odpovídající jevy disjunktní, pravděpodobnost jejich sjednocení je rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, tedy vyjde $\frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}}$.

11. Spočítáme pravděpodobnost, že ani jedna jednička nepadla. Pravděpodobnostní prostor obsahuje 6^{10} možných výsledků pokusu, z toho 5^{10} výsledků neobsahuje ani jednu jedničku. Proto je hledaná pravděpodobnost rovna $1 - (\frac{5}{6})^{10}$.

13. V tomto případě pracujeme s prostorem, který má $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 20$ prvků; každý z nich odpovídá jednomu možnému výsledku čtyř hodů. Každý elementární jev „Áda hodila x, y, z , Bára u “ popárujeme s elementárním jevem „Áda hodila $7 - x, 7 - y, 7 - z$, Bára $21 - u$ “. Protože platí, že v prvním případě Áda hodila víc než Bára právě tehdy, když v druhém případě hodila Bára víc než Áda, dostáváme, že pravděpodobnosti obou jevů ze zadání jsou stejné.

14. Můžeme si ekvivalentně představovat, že každý příchozí, který si nemůže sednout, si místo sednutí na náhodné místo sedne na svoje místo, přičemž vyhodí prvního příšedšího, který znovu usedne na náhodné místo.

Při každém přesednutí prvního příchozího je následně pravděpodobnost, že si sedne na svoje místo, stejná jako pravděpodobnost, že si sedne na místo posledního příchozího. Když tento přijde, je tedy poloviční šance, že první příchozí bude sedět na svém místě a poloviční šance, že bude sedět na jeho místě.

15. Má-li Mirek daný den k karamelky a h hašlerek, je pravděpodobnost, že tento den dojí všechny karamelky, rovna $\frac{k!h!}{(k+h)!}$, neboť v permutaci bonbónů dané pořadím jejich výběru musí být nejprve všechny karamelky a až poté všechny hašlerky. Pravděpodobnost, že daný den Mirek dojí všechny hašlerky, vyjde stejně. Protože je pro každý jednotlivý den pravděpodobnost dojezení karamelky stejná jako pravděpodobnost dojezení hašlerek, musí být i výsledná pravděpodobnost rovna jedné polovině.

16. Pro $\bar{A}, B$ máme $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$. Pro zbylé případy postupujeme obdobně.

17. Každý jev nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ a každá dvojice nastane s pravděpodobností $\frac{1}{36}$, tudíž všechny dvojice jsou nezávislé. Trojice ale nezávislá není, neboť všechny tři jevy se zároveň nemohou stát.

18. Funguje $\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$ a jevy $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$ a $\{1, 6, 7, 8\}$.

19. Z celkového počtu podmnožin, což je 2^k , odečteme ty velikosti 0 (to je pouze prázdná množina) a 1 (těch je k , jedna pro každý prvek). Vyjde tedy $2^k - k - 1$. Povolení případu $l = 1$ nic nezmění, nové rovnice jsou totiž vždy triviálně splněny.

21. Každý jev nastane s pravděpodobností $\frac{1}{20}$, ale oba jevy nastanou buď s pravděpodobností 0 ($i = j$), nebo $\frac{1}{20 \cdot 19}$ ($i \neq j$).

22. Máme $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C) = \frac{2}{3}$, $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) = \frac{3}{4}$ a $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(C) - P(B)P(C) = \frac{11}{12}$. Využíváme vztahy z úlohy 2, v posledním kroku jsme využili, že $A \cap B = \emptyset$. Po sečtení prvních dvou rovnic a odečtení třetí dostaneme $P(C) = \frac{1}{2}$ a posléze $P(A) = \frac{1}{3}$ a $P(B) = \frac{1}{2}$.

23. $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 7, 8\}, \{1, 4, 5, 8\}, \{1, 3, 5, 7\}$.

25. Pravděpodobnost, že nějaká chyba vydrží k dní, je $(\frac{1}{3})^k$, takže pravděpodobnost, že nějaká chyba nevydrží k dní, je $1 - (\frac{1}{3})^k$. Protože nevydrží jednotlivých chyb je nezávislá, stačí pravděpodobnosti vynásobit: $(1 - 1/3) \cdot (1 - 1/9) \cdot (1 - 1/27)$.

26. Buď p hledaná pravděpodobnost. Pravděpodobnost, že Martina auto nestopne v nejbližších 20 minutách, je $(1 - p)^4$. Tudíž $(1 - p)^4 = 1 - \frac{609}{625} = \frac{2^4}{5^4}$, takže $p = \frac{3}{5}$.

32. Označíme-li A jev „padla třikrát panna“ a B jev „alespoň jednou padla panna“, máme $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$.

33. První rovnice po rozepsání říká, že $\frac{P(Z \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Z \cap X \cap Y)}{P(X \cap Y)}$, zatímco druhá rovnice říká $\frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y \cap Z)}{P(Y \cap Z)}$. Po roznásobení dostaneme v obou případech stejnou podmínku.

34. (1) Pracujeme s klasickým pravděpodobnostním prostorem se čtyřmi elementárními jevy udávajícími pohlaví dvou dětí. Jevo „mladší dítě je děvče“, na který se ptáme, nazvěme A , zatímco jev „starší dítě je děvče“ nazvěme B . Spočítáme $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

(2) V tomto případě pracujeme se stejným prostorem, ale jevy jsou jiné. Jevo A „alespoň jedno dítě je děvče“ nyní nastane s pravděpodobností $3/4$. Jevo B „druhé dítě je také děvče“ nyní nastane pouze v případě, že obě děti jsou děvčata.

$$\text{Vyjde } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

(3) Nyní musíme každý elementární jev původního prostoru dále rozdělit na dva jevy podle toho, které dítě jsme potkali. Pracujeme tedy dokonce s osmiprvkovým pravděpodobnostním prostorem, jehož jevy jsou např. „starší dítě je děvče, mladší je hoch, potkali jsme mladší dítě“ – krátce DHm. Případy, kdy se jednalo o děvče, tvoří jevo A – speciálně to jsou elementární jevy HDm, DDm, DHs, DDS. Jevo $A \cap B$ neboli „potkali jsme děvče a druhé dítě je také děvče“ je tvořen elementárními jevy DDm a DDS. Tentokrát vyjde $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

35. Obdobně jako v úloze s Monty Hallem můžeme rozebrat, že existuje šest stejně pravděpodobných výsledků (tři možnosti, kde je auto, a pokaždé dvě možnosti, které dveře Monty otevře). Dva možné výsledky vyřadíme, neboť v nich Monty otevře dveře s autem. Ze zbylých výsledků se přesně v polovině případů vyplatí změnit rozhodnutí. Na rozhodnutí soutěžícího tedy nezáleží.

To je hodně překvapivé, protože příběh se odehrál zdánlivě úplně stejně jako v původní úloze s Monty Hallem! Klíčem k pochopení je porovnat pravděpodobnostní prostor v této úloze s prostorem v té původní. Zde přibylly dvě nové větve, které odpovídají tomu, že Monty otevře dveře, za kterými je auto. Sice víme, že se to nakonec nestalo, ale pouhá existence této možnosti mění pravděpodobnostní prostor, a tudíž i výsledek úlohy!

37. Buď p hledaná pravděpodobnost. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme $0,7 = 0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot p$, tedy $p = \frac{0,7 - 0,48}{0,4} = \frac{11}{20} = 55\%$.

38. Počítáme:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \cap B|C_1)P(C_1) + P(A \cap B|C_2)P(C_2) + \dots + P(A \cap B|C_n)P(C_n) \\ &= P(A|C_1)P(B|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(B|C_2)P(C_2) + \dots + P(A|C_n)P(B|C_n)P(C_n) \\ &= P(A|C_1)P(B)P(C_1) + P(A|C_2)P(B)P(C_2) + \dots + P(A|C_n)P(B)P(C_n) \\ &= P(B) \left(P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \dots + P(A|C_n)P(C_n) \right) = P(B)P(A). \end{aligned}$$

40. Necht A značí, že máme chorobu, a B značí, že přístroj nahlásil chorobu. Dosadíme do vzorečku:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{1}{1000} \cdot 1}{\frac{1}{1000} \cdot 1 + \frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{100}} = \frac{100}{1099}.$$

To je přibližně 9 %.

41. Buď A jev, že jsme vybrali normální minci, a B , že padla panna.

$$(1) P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$(2) P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A})P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{1 \cdot 1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

43. (1) Nejprve si povšimneme, že jakmile se za sebou objeví dvě Očka, můžeme si být jistí, že dříve nebo později vyhraje Hedvika. Dále rozlišíme dva případy: buď jsou první dvě písmena OO a vyhrála Hedvika, nebo se nutně objevilo P a pak se podíváme na první okamžik, kdy se po P objevilo O. V tu chvíli platí, že buď je další písmeno P a vyhraje Kája, nebo je další písmeno O a vyhraje Hedvika. Proto je pravděpodobnost Hedvičiny výhry rovna $\frac{1}{4} + (1 - \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

(2) Všimněme si prvního okamžiku, kdy padla panna. Pokud potom padla panna znovu, už je jasné, že vyhraje Hedvika (dříve nebo později musí padnout orel). Pokud místo toho padl orel a hned potom panna, vyhrála Kája. Jestliže padl orel a pak orel, nevyhrál nikdo a jakmile znovu padne panna, budeme opakovat předchozí úvahu. Protože v každém takovém bloku má Hedvika dvakrát větší šanci na to, že vyhraje, bude její pravděpodobnost na výhru rovna $\frac{2}{3}$.

44. Například takto. Hodí si dvakrát: padne-li dvojice OP, vezme si větrník, padne-li PO, vezme si věneček, a jinak hází znova. Tento postup někdy musí skončit.

45. a) Vyjde $\frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)}$. b) Vyjde $\frac{1-p^2}{2-p}$.

46. Zafixujme libovolnou ovci a uvažme první okamžik, kdy se vedle ní objeví vlk. Pak se v následujících tazích dje stane jedna z následujících možností:

(1) vlk v dalším tahu sežere ovci,

(2) vlk v dalším tahu odejde od ovce a příště se objeví z druhé strany; ovce tedy zůstala poslední,

(3) vlk sice v dalším tahu odejde od ovce, ale vrátí se ze stejné strany a proces se opakuje.

Stejně jako v příkladu s tuleňátkem můžeme dostat pravděpodobnost, že daná ovce zůstane poslední, ze znalosti poměru pravděpodobností prvních dvou jevů. Počítat je ale nemusíme, neboť ze symetrie vyjdou pro každou ovci stejně; každá ovce tedy zůstane poslední se stejnou pravděpodobností.

49. Nechť nejprve jedno rameno úhlu splývá s kladnou částí osy y a druhé leží napravo od osy y . Nyní úhlem otáčejme po směru hodinových ručiček a zkoumejme, kdy je grafem funkce. Po otočení o 70° se poprvé stane to, že každému bodu na ose x bude přiřazena pouze jedna hodnota na ose y , a toto potrvá až do otočení o celkových 180° . Otočení o 180° až 360° je symetrické. Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{110}{180} = \frac{11}{18}$.

50. Kupříkladu vlaky do Dobřan jezdí vždy v celou hodinu a vlaky do Rokycan vždy 40 minut po celé.

51. Musíme najít oblast v čtverci $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ takovou, že pro body uvnitř oblasti platí nerovnost ze zadání. Přepíšeme ji ekvivalentně jako dvojici podmínek

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Každá nerovnost určuje kruh s poloměrem 1, přičemž první kruh má střed v bodě $(1, 0)$ a druhý má střed v bodě $(0, 1)$. Průnik obou kruhů společně s původním čtvercem dává útvar s obsahem $2(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$. To je tedy hledaná pravděpodobnost.

52. Představujme si tyčku vcelku. Celkem je na ní 2014 náhodně umístěných značek, z toho dvě značky jsou puntíky a ostatní představují body zlomu. Ve skutečnosti je úplně jedno, kde přesně se nacházejí; důležité je jen jejich pořadí. Celkový počet možností, které značky mohou být puntíky, je $\binom{2014}{2}$. Puntíky jsou na jednom dílku přesně tehdy, když se jedná o sousední značky, na což máme 2013 možností. Výsledná pravděpodobnost je

$$\frac{2013}{\binom{2014}{2}} = \frac{1}{1007}.$$

53. Viz návod; protože jsou jevy disjunktní, je pravděpodobnost sjednocení rovna součtu jednotlivých pravděpodobností. Vyjde tedy $n(\frac{1}{2})^{n-1}$.

Pravděpodobnost II. – Žádné věže

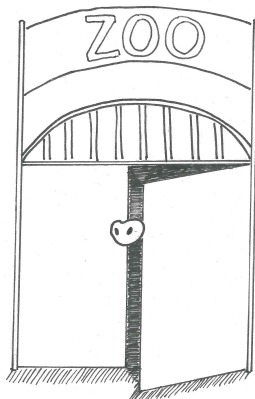
Teorie pravděpodobnosti není nic jiného než selský rozum přeložený do řeči výpočtů.
Pierre Simon Laplace

Milý příteli,

vítáme Tě u druhého dílu seriálu o pravděpodobnosti!

Dříve než se pustíme do neprobádaných vod, bleskurychle si zopakujeme, co už známe z dílu prvního. Začali jsme představením základních kombinatorických pojmů. Ty nás i nadále budou provázet minimálně na každém druhém kroku.¹ Připomeňme si, že počet podmnožin množiny s n prvky je 2^n . Pro každý prvek množiny totiž máme nezávisle na těch ostatních dvě možnosti – buď ho do podmnožiny přidáme, nebo ne. Dále počet způsobů, kterak seřadit n objektů, je $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Možným uspořádáním také říkáme permutace. A konečně, počet způsobů, jak z n objektů vybrat nějakých k , je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tomuto výrazu se říká kombinační číslo.

Zásadním pravděpodobnostním pojmem je nezávislost. Dvojice nezávislých jevů se pozná podle toho, že je pravděpodobnost, že oba zároveň nastanou, rovna součinu jejich pravděpodobností. Nakonec jsme si v prvním díle vysvětlili, jak funguje podmíněná pravděpodobnost, která se hodí zejména, potřebujeme-li spočítat pravděpodobnost jevu, který nějakým způsobem závisí na jiných jevech. Také jsme si ve hvězdičkové části řekli, co dělat, když pracujeme s nekonečnými prostory, a zde se k nim znovu vrátíme (opět v nepovinné části).



¹Jako věrný přítel nebo živýkačka na podrážce boty; záleží na Tvém vztahu k nim.

V tomto díle jsou na programu dvě novinky. Nejprve si řekneme, jak se naše pravděpodobnostní znalosti dají překvapivě aplikovat na řešení úloh, které na první pohled s pravděpodobností vůbec nesouvisí. Nenech se zaskočit tím, že takováto aplikace pravděpodobnosti působí značně nepravděpodobně. :-) Technice, kterou si za chvíli předvedeme, se říká pravděpodobnostní metoda. Jako druhou novinku zavedeme náhodné veličiny a ukážeme si, k čemu je dobré znát jejich průměrnou hodnotu. Naše znalosti pak použijeme pro vylepšení pravděpodobnostní metody.

Pravděpodobnostní metoda vůbec není jednoduchá, takže pokud se budeš ztrácet, přečti si nejprve kapitolu o náhodných veličinách, která na pravděpodobnostní metodě nezávisí. Ačkoli se Ti pravděpodobnostní metoda může hodit v řešení seriálových příkladů, v příštím díle na ni nebudeme navazovat. Nakonec opět podotýkáme, že pro pochopení nových pojmů není potřeba pokoušet se vyřešit všechny úlohy, ale je dobré se v každé sekci alespoň o několik úloh pokusit. Pokud se Ti to ovšem nebude moc dařit, vždy jsou tu pro Tebe nápovědy na konci seriálu.

Pravděpodobnostní metoda

Metoda v matematice je trik, který je použit více než jednou.

Ron Getoor

Jak jsme avizovali, na úvod si ukážeme, jak naše stávající znalosti použít v nezvyklém prostředí. Doteď jsme se totiž věnovali především úlohám, v nichž se pravděpodobnost přímo vyskytuje. Teď si ale ukážeme, že pravděpodobnost je ten správný trik i pro mnohé úlohy, které o pravděpodobnosti vůbec nemluví. Ilustruje to následující příklad, jehož překvapivé řešení následuje po pár odstavcích vysvětlujících, proč je těžké úlohu vyřešit jinak.

Úloha 1. Na soustředění přijelo dvacet čtyři účastníků, které je potřeba na závěrečnou hru rozdělit do dvou týmů. Týmy nemusí být stejně velké, jeden z nich by mohl obsahovat i všechny účastníky. Na soustředění už několik her proběhlo a organizátoři nechtějí, aby se týmy opakovaly: stanovili si tedy deset podmínek, přičemž každá z nich říká, že nějaká konkrétní šestice nemá být celá ve stejném týmu. Dokaž, že je možné účastníky rozdělit tak, aby všechny podmínky byly splněny.

Než budeš pokračovat ve čtení, zkus si nejprve nad úlohou popřemýšlet sám (sama). Nejprůrozeňší způsob, jak k ní přistoupit, je snažit se nějak explicitně říct, jak budou oba týmy vypadat. Ale ouha: o deseti podmínkách toho moc nevíme, takže není vůbec jasné, jak týmy zkonstruovat. Jediné, co víme naprosto přesně, je to, jak budou vypadat týmy, které některou podmínku porušují, takže se tuto znalost pokusíme v řešení zužitkovat.

Vžij se do role ubohého organizátora, který má týmy sestavit. Podmínky mezi sebou mohou komplikovaným způsobem interagovat, což vede na nesmírně úmorné rozebírání spousty možností. Někaký nekonstruktivní důkaz, který se tomuto rozboru vyhýbá elegantní oklikou, sice může prokázat, že vyhovující rozdělení existuje, ale jen velmi těžko dá přímý návod na jeho nalezení. Ze zoufalství může organizátor prostě tipovat rozdělení na týmy doufaje, že nakonec jedno z nich bude fungovat. Ověřit, zda dané rozdělení vyhovuje, či ne, je totiž našťastí velmi jednoduché.

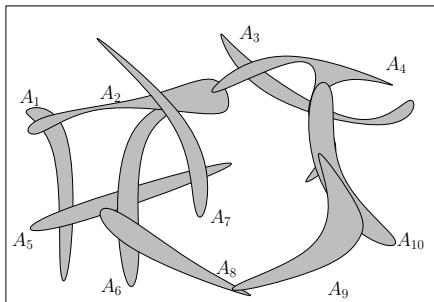
Poněkud nečekaně se tento na první pohled nezodpovědný přístup dá dotáhnout do podoby formálního důkazu. Můžeme si totiž představit pravděpodobnostní prostor, jehož elementární jevy jsou všechna možná rozdělení do týmů. Trik je následující: Dokážeme-li, že pro náhodně vybraný tým z tohoto prostoru budou všechny podmínky najednou splněny s nenulovou pravděpodobností, plyne z toho, že pro alespoň jeden elementární jev jsou všechny podmínky splněny. To ale znamená, že alespoň jedno rozdělení vyhovuje. A to přesně chceme dokázat!

Motto triku, který chceme využít, tedy je: *Pokud má náhodné zvíře ze ZOO rypáček s nenulovou pravděpodobností, pak v ZOO existuje zvíře, které má rypáček.* Pojdme nyní tuto (zcela triviální a zdánlivě nezajímavou) myšlenku využít ke spojení všech nastíněných nápadů a dořešení příkladu:

Řešení. Rozdělit účastníky na dva týmy vlastně znamená zvolit podmnožinu účastníků, kteří budou v prvním týmu. My tuto podmnožinu zvolíme náhodně. Zvolení takové podmnožiny si můžeme

představovat buď jako náhodný výběr z 2^{24} možných podmnožin, nebo jako 24 nezávislých náhodných rozhodnutí, zda bude daný účastník v prvním týmu (volíme s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Druhý přístup se mnohem lépe hodí pro naše účely.

Nyní si zavedme deset jevů $A_1, \dots, A_{10}$, přičemž jev A_i zahrnuje elementární jevy odpovídající rozdělením, která jsou nepřipustná kvůli tomu, že i -tá ze zakázaných šestic je ve stejném týmu. Spočítejme nyní pravděpodobnosti toho, že nastane nějaký z těchto jevů. Aby takový jev nastal, musí být buď všech šest účastníků v prvním týmu, nebo všech šest účastníků ve druhém týmu. Pravděpodobnost každého z těchto jevů je díky nezávislosti 2^{-6} ; celková pravděpodobnost toho, že nastane jev A_i , je díky disjunktnosti těchto dvou jevů rovna 2^{-5} .



Obrázek obsahující našich deset jevů naznačuje, že spolu můžou souviset nějakým dost komplikovaným způsobem. Žádný jev ale není moc pravděpodobný, takže jejich sjednocení (vše, co je šedou barvou) v žádném případě nepokryje celý pravděpodobnostní prostor (obdélník).

Stačí tedy spočítat, že $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}) < 1$. K tomu využijeme odhad z prvního dílu, že pravděpodobnost sjednocení je vždy nejvýše rovna součtu pravděpodobností. Jinými slovy, nic horšího, než že jsou všechny jevy disjunktní, se nemůže stát. Dostáváme tak

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_{10}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{10}) \leq 10 \cdot 2^{-5} = \frac{10}{32}.$$

Pravděpodobnost, že ani jeden z jevů A_1 až A_{10} nenastane, je tedy alespoň $\frac{22}{32}$, což je rozhodně větší než nula. Tím je úloha vyřešena.

Pokud Tě tento důkaz zaskočil, nesmutni! Když autoři tohoto seriálu poprvé viděli podobný pravděpodobnostní důkaz, považovali jej za velký podvod. To proto, že takovýto důkaz by se přece dal stejně, ba možná dokonce jednodušeji, říct i bez pravděpodobnostních termínů, například takto:

Řešení. Máme 2^{24} možností, jak účastníky rozdělit do dvou týmů. Spočítáme, že 10 podmínek ze zadání dohromady zakazuje méně než 2^{24} možných rozdělení, a proto aspoň jedno bude vyhovovat.

Každá podmínka říká, že daných 6 lidí nesmí být ve stejném týmu. Kolik je možných rozdělení do dvou týmů takových, že daných 6 lidí je ve stejném týmu? Stačí si vybrat jeden ze dvou týmů, ve kterém bude oněch 6 lidí, a pro zbylých 18 si můžeme vybrat libovolně. Každá podmínka tedy zakazuje $2 \cdot 2^{18}$ možných rozdělení do týmů. Všechna deset podmínek tak dohromady zakáže nejvýše $10 \cdot 2 \cdot 2^{18}$ rozdělení, což je ale méně než 2^{24} . Proto nějaké vhodné rozdělení existuje.

Všimni si, že tento důkaz je ve své podstatě úplně stejný jako ten pravděpodobnostní, jenom nepoužíváme termíny jako „klasický pravděpodobnostní prostor“ či „nezávislost jevů“. Možná je i intuitivnější, neboť přesně ukazuje, proč úloha platí: podmínky ze zadání toho prostě dohromady nemohou moc zakázat.

Proč si tedy dáváme tu práci a vysvětlujeme první řešení? Na danou otázku budeme odpovídat po zbytek tohoto dílu. Ukážeme si několik těžších úloh, jejichž řešení bude založeno na podobném principu. Později pak začneme používat složitější pravděpodobnostní pojmy. Čím složitější pojmy, tím těžší bude vymyslet „počítací řešení“, které jsme právě předvedli. Tím elegantnější Ti,

doufáme, bude připadat řešení pravděpodobnostní. Zkus se ještě jednou zamyslet nad předešlou úlohou a polož si následující otázky:

Úloha 2.

- (1) Co by se stalo, kdyby zakázané skupiny účastníků mohly být větší než 6?
- (2) Co kdyby počet účastníků směl být větší než 24?
- (3) Rozmysli si, že existují minimálně dva elementární jevy, které leží v průniku $A_1 \cap \dots \cap A_{10}$ (obrázek jevů tedy není moc přesný). Na základě toho vyřeš Úlohu 1 pro 32 podmínek místo 10.
- (4) (poučná) Co by se stalo, kdybychom požadovali, aby oba týmy byly stejně velké, a v řešení bychom tedy místo pravděpodobnostního prostoru všech 2^{24} podmnožin pracovali s prostorem všech $\binom{24}{12}$ podmnožin velikosti 12? V tomto případě se neboj použít kalkulačku.

Použití pravděpodobnostní metody si můžeš ozkoušet na následujících úlohách. Podobně jako vzorový příklad se dají vyřešit i prostým počítáním možností. Přesto však doporučujeme použít pravděpodobnost, i pokud je Ti používání pravděpodobnostních úvah zatím pořád trochu proti srsti; slibujeme², že se Ti budou zkušenosti s ní v budoucnu velmi hodit.

Ještě předtím si dovolíme krátkou vsuvku. Základním trikem, který se zpravidla používá při řešení pravděpodobnostní metodou, je prostinký, leč značně užitečný odhad pravděpodobnosti sjednocení jevů pomocí součtu odpovídajících pravděpodobností³, tedy

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Stručný návod, jak řešit pravděpodobnostní metodou následující úlohy⁴, je tedy:

- (1) Vyber si, co budeš volit náhodně; někdy se totiž nabízí víc možností. Pak si rozmysli, jak vypadá pravděpodobnostní prostor odpovídající této volbě.
- (2) Jak v rámci tohoto pravděpodobnostního prostoru vypadají podmínky, které musíš splnit? Každou podmínku bude vyjadřovat nějaký jev, který odpovídá tomu, že *nebyla* splněna.
- (3) Spočítej (nebo aspoň odhadni) pravděpodobnosti těchto jevů.
- (4) Odhadni shora pravděpodobnost sjednocení těchto jevů (tedy pravděpodobnost toho, že nastal alespoň jeden tento jev) pomocí součtu jejich pravděpodobností.
- (5) Ověř, že součet pravděpodobností je ostře menší než jedna; pokud náhodou není, tak zkontroluj všechny svoje výpočty, a pokud to stále nefunguje, vrať se k bodu (1).
- (6) Všechny podmínky budou splněny s nenulovou pravděpodobností, takže existuje volba, která všechny podmínky splňuje. Hotovo!

Úloha 3. Chceme rozdělit skupinu PraSátek na čtyři týmy. Máme přitom podmínky typu „z této skupinky PraSátek o velikosti n musí být alespoň jedno PraSátko v každém týmu“. Dokaž, že je-li podmínek méně než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, lze PraSátka rozdělit požadovaným způsobem.

Obecně platí, že vždy chceme pracovat s co nejjednodušším pravděpodobnostním prostorem, aby se s ním dobře počítalo. Překvapivě často totiž i poměrně „hloupé“ metody dají dostatečně silný odhad. Například pokud se v následujících úlohách rozhodneš, že budeš volit k náhodných objektů z n , tak je nejintuitivnější vybrat náhodnou k -tici, což se dá udělat $\binom{n}{k}$ způsoby. Mnohdy se však vyplatí provést místo toho k nezávislých náhodných výběrů, takže máš n^k možných výsledků a některý objekt může být vybrán vícekrát. Počítání bude nicméně jednodušší a úlohy obvykle povolují i taková řešení, ačkoli vedou na trochu horší odhad.

²Nebo vyhrožujeme – záleží na Tvém úhlu pohledu.

³V angličtině (a často i v češtině) se mu říká *union bound*.

⁴Kromě té, která je označená jako těžká. Není těžká pro nic za nic.

Úloha 4. V matematické soutěži řešilo 200 studentů šest úloh. Víme, že každou úlohu vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokaž, že můžeme vybrat dvojici studentů tak, aby dohromady vyřešili všechny úlohy. (IMC 2002)

Úloha 5. Protáhni se. Pokud je poblíž příroda, jdi se projít a zaposlouchej se do cvrlikání ptáků. Pokud si toto chceš při hodině pod lavicí, dojdi si na záchod.

Úloha 6. V jazykové škole je 500 učitelů, kteří vyučují dohromady $2n$ jazyků, přičemž každý učitel ovládá alespoň n jazyků. Ukaž, že můžeme vybrat nejvýše 14 jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Úloha 7. (počítací) Na školní výlet jede 90 dětí, přičemž každé z nich má alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokaž, že děti můžeme rozdělit do tří 30členných skupin tak, že každé dítě bude mít ve své skupince alespoň jednoho kamaráda. (Celostátní kolo MO 2011/2012)

Úloha 8. (těžká) Řekneme, že permutace množiny $\{1, \dots, 2n\}$ je *roztomilá*, pokud se některé dva po sobě jdoucí prvky liší právě o n . Ukaž, že roztomilých permutací je alespoň tolik jako neroztomilých. (IMO 1989)

Zatímco pravděpodobnostní pojmy, se kterými jsme pracovali v předchozím díle, byly matematikům známe již několik set let, pravděpodobnostní metoda je mnohem mladší: ve druhé polovině dvacátého století ji zpopularizoval známý maďarský matematik Paul Erdős⁵. Následující překvapivý fakt, který pro Tebe formulujeme jako úlohu, je jen jedním z mnoha, které Erdős pomocí pravděpodobnostní metody dokázal.

Úloha 9. (těžká) Na večírek přišlo $2^{n/2}$ hostů. Každí dva se buď znají, nebo neznají (známosti jsou vzájemné). Dokaž, že se mohlo stát, aby se na večírku nevyskytlo ani n lidí, kteří se všichni navzájem znají, ani n lidí, kteří se všichni navzájem neznají.

[illegible]

Rovněž platí, že pokud na večírek přijde 4^n lidí, určitě najdeš n takových, kteří se buď všichni

⁵Paul (maďarsky Pál) Erdős (1913–1996) proslul tím, že za svůj život vyřešil obrovskou spoustu problémů a spolupracoval s podobně ohromným počtem lidí.

⁶Seriózní vědci samozřejmě takovéto zápisy čísel nepoužívají, protože jsou nepraktické. Hodí se leda tak k tomu, když chcete někoho šokovat, o což jsme teď právě usilovali. Ty se nás prosím ve svých řešeních šokovat nesnaž a piš radši 10^{15} či $100(1 - 10^{-143})$ než ty naše zřůdy.

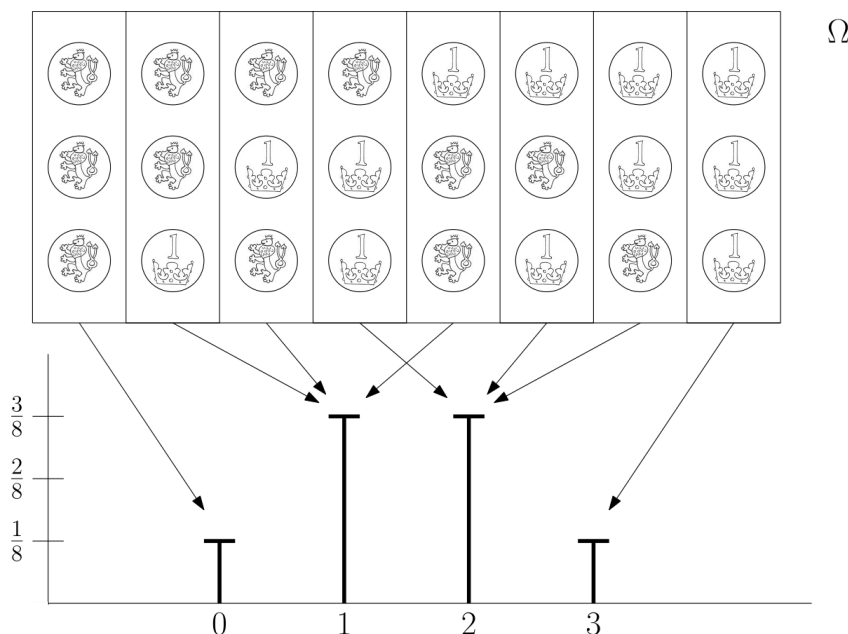
znají, nebo všichni neznají. Tomuto faktu se říká Ramseyova věta⁷.

Náhodné veličiny

Doufáme, že sis na předchozích příkladech osvěžil(a), jak fungují pravděpodobnostní prostory. Nyní je na čase předvést si nový koncept. Podobně jako u pravděpodobnostních prostorů či nezávislosti však vlastně nebudeme dělat nic jiného, než exaktně formulovat věci, které jsou Ti asi intuitivně docela jasné.

Výsledkem pravděpodobnostních pokusů je obvykle číslo. Proto i elementární jevy našeho prostoru jsou často čísla – kupříkladu v případě hodu kostkou byla naším prostorem množina čísel $\{1, 2, \dots, 6\}$. Pokud jsou skutečně prvky prostoru čísla, můžeme dále klást zvědavé otázky, třeba: „Jaký je průměrný výsledek pokusu?“ Třeba v našem příkladu s kostkou je aritmetický průměr možných výsledků roven $\frac{1+2+\dots+6}{6} = 3,5$ ok. Jinými slovy, při průměrném hodu padne 3,5 ok. Samozřejmě 3,5 ok nikdy padnout nemůže, ale intuice nám velí očekávat, že pokud hodíme kostkou stokrát, celkový počet ok se bude pohybovat okolo 350.

Ne vždy je ale náš prostor takto jednoduchý. Uvažme třeba prostor odpovídající hodu třemi mincemi. V takovém případě máme $2^3 = 8$ možných výsledků. Řekněme, že nás zajímá, kolikrát padla panna. Prostým výčtem možností zjišťujeme, že s pravděpodobností $\frac{1}{8}$ nepadla žádná a s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ padla jedna panna. Dále s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ padly dvě panny a s pravděpodobností $\frac{1}{8}$ padly tři panny.



Nyní nás opět může zajímat, kolik panen padne v průměru, hodíme-li třikrát minci. V takovém případě buď budeme počítat průměr ze všech osmi možných výsledků, nebo si ušetříme práci a použijeme vážený průměr, tedy každý možný výsledek vynásobíme jeho pravděpodobností. Dostáváme,

⁷Frank Ramsey (1903–1930) touto větou založil obor, kterému se dnes říká Ramseyova teorie.

že průměrný počet panen je $\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3+6+3}{8} = 1,5$. To je zcela v souladu s naší intuicí, protože v jednom hodu mincí průměrně padne 0,5 panny, takže ve třech hodech očekáváme $3 \cdot 0,5 = 1,5$ panny.

Ačkoli nás tento příklad na začátku předchozího dílu vedl k zavedení pravděpodobnosti, vlastně zatím nemáme žádný způsob, jak zformalizovat úvahu „třikrát hodíme mincí a pokaždé v průměru padne 0,5 panny, takže dohromady v průměru padne 1,5 panny“. Neboj, za chvíli se to změní!

Úloha 10.

- (1) Rozmysli si, že hodíme-li n mincemi, je pravděpodobnost, že padne k panen, stejná jako pravděpodobnost toho, že padne $n - k$ panen.
- (2) Na základě toho spočti průměrný počet panen, které padnou při hodu n mincemi.

Náhodné veličiny jsou způsob, jak se vypořádat se situacemi, kdy máme složitější prostor, ale vlastně nás z něj zajímá jen jeden jeho aspekt, tedy chceme každý elementární jev nahradit nějakým číslem.

Formálně je náhodná veličina funkce, která každému prvku prostoru přiřadí nějaké reálné číslo.

Definice. Mějme konečný pravděpodobnostní prostor Ω . Náhodná veličina X na prostoru Ω je libovolná funkce z Ω do $\mathbb{R}$.

Náhodné veličiny je zvykem značit velkými písmeny z konce abecedy, tedy X, Y, Z . V případě hodu třemi mincemi můžeme zavést náhodnou veličinu, která pro každou trojici hodů říká, kolik panen celkově padlo. Tento příklad možná působí až příliš jednoduše. Pravděpodobnostní prostory jsou ale často mnohem složitější. Představ si třeba, že zajdeš do knihovny a půjčíš si tam náhodnou knížku. Tomuto pokusu odpovídá nesmírně složitý prostor obsahující všechny knihy v knihovně. Třeba nás ale zajímá jen to, jaký je průměrný počet stránek půjčené knížky nebo kolik je v ní obrázků. Potom se hodí pro tento parametr zavést náhodnou veličinu.

Všimni si, že pokud se díváme na náhodnou veličinu na obrázku, jsou tyto tři elementární jevy $\omega_1 = (\text{panna, orel, orel})$, $\omega_2 = (\text{orel, panna, orel})$ a $\omega_3 = (\text{orel, orel, panna})$ nerozlišitelné – všechny dávají tu samou hodnotu. Vzhledem k tomu, že náhodná veličina je funkce, můžeme také psát $X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1$. Jakmile zavedeme náhodnou veličinu, nabízí se seskupit si myšlenkově elementární jevy daného prostoru podle toho, jaký pro ně dá naše náhodná veličina výsledek.

Jev, který je tvořen právě těmi elementárními jevy, pro které dává veličina X výsledek x , se značí prostě „ $X = x$ “. V našem případě s náhodnou veličinou X , jejíž hodnotou je celkový počet panen, jevem $X = 1$ myslíme přesně množinu trojic (panna, orel, orel), (orel, panna, orel) a (orel, orel, panna). Můžeme pak psát $P(X = 1) = \frac{3}{8}$. Zcela obdobně pak můžeme definovat jevy $X \geq x$ atd. V našem příkladě tak $P(X \geq 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, neboť jev $X \geq 2$ je sjednocením dvou disjunktních jevů $X = 2$ a $X = 3$.

Tento způsob práce s náhodnými veličinami přesně odpovídá histogramu na obrázku. Když pracujeme s náhodnou veličinou, často můžeme v jistém smyslu zapomenout na to, jak vypadá původní pravděpodobnostní prostor. Stačí umět spočítat pravděpodobnosti jevů typu $X = x$.

S náhodnými veličinami budeme později chtít pracovat podobně jako s normálními čísly, speciálně je budeme chtít sečítat. Dvě náhodné veličiny můžeme sečíst pouze tehdy, jsou-li obě definovány pro stejný pravděpodobnostní prostor. Součtem $X_1 + X_2$ pak prostě myslíme veličinu, která pro každý elementární jev ω dává $X_1(\omega) + X_2(\omega)$. Třeba v našem případě s hodem kostkou, kde X značí počet ok, která padla (tedy jsou na horní stěně kostky), můžeme také definovat veličinu Y značící, kolik ok je na dolní stěně kostky. Obě jsou definované pro stejný pravděpodobnostní prostor, takže je můžeme sečíst. Výsledkem je poněkud nudná náhodná veličina $X + Y$, která pro každý možný jev dává hodnotu 7.

Stejně jako součet můžeme definovat i jiné operace jako $c \cdot X$ (hodnoty X vynásobíme konstantou c), $X_1 \cdot X_2$ nebo $1/X$. V našem příkladu z knihovny tak kupříkladu můžeme uvážit počet slov a počet kapitol v náhodně vybrané knize, což jsou dvě náhodné veličiny. Po jejich vydělení dostaneme

průměrný počet slov na kapitolu, což je opět náhodná veličina nabývající různých hodnot pro různé knížky.

Úloha 11.

- (1) Pro jaké náhodné veličiny X platí $X + X = 2 \cdot X$?
- (2) Pro jaké náhodné veličiny X platí $X \cdot X = X$?

Střední hodnota náhodné veličiny

Lottery: a tax on people who are bad at math.
Ambrose Bierce

Když jsme dávali příklady toho, k čemu jsou dobré náhodné veličiny, ukazovali jsme, jak spočítat vážený aritmetický průměr hodnot náhodné veličiny. Tomuto „průměru náhodné veličiny“ se říká **střední hodnota**⁸.

V případě klasického pravděpodobnostního prostoru (např. hodu kostkou) je střední hodnotou normální aritmetický průměr. Pokud ale pracujeme s obecným konečným prostorem (a obvykle i při práci s klasickým prostorem), používáme vážený aritmetický průměr, tedy sčítáme možné výsledky vynásobené jejich pravděpodobnostmi.

Definice. Mějme náhodnou veličinu X definovanou pro prostor $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.⁹ Potom střední hodnotou X myslíme výraz

$$E(X) = P(\omega_1) \cdot X(\omega_1) + P(\omega_2) \cdot X(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) \cdot X(\omega_n).$$

V případě klasického pravděpodobnostního prostoru tak speciálně dostáváme $E(X) = (X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n))/n$. Když jsme motivovali střední hodnotu tím, že jsme spočítali střední počet padlých panen při hodu třemi mincemi, bylo pro výpočet snazší elementární jevy seskupit podle toho, jaký výsledek dala náhodná veličina. Nabývá-li obecně náhodná veličina hodnot $x_1, x_2, \dots, x_m$, můžeme použít následující vzoreček:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \dots + P(X = x_m) \cdot x_m.$$

Úloha 12. Rozmysli si, že tento vzoreček opravdu plyne z definice střední hodnoty.

Úloha 13. Najdi náhodnou veličinu X nabývající kladných hodnot, pro kterou platí $E(X) \geq 2$ a zároveň $E(1/X) \geq 2$.

K čemu je střední hodnota dobrá v praxi? Abychom si odpověděli na tuto otázku, vraťme se do poloviny sedmáctého století, kdy byly základy teorie pravděpodobnosti poprvé zformulovány v korespondenci dvou věhlasných francouzských matematiků: Pierra de Fermata¹⁰ a Blaise Pascala¹¹. Teorii vymysleli, aby odpověděli na zvědavé otázky jistého francouzského šlechtice, který si vydělával hraním hazardních her. Jednou z her, která šlechtice zajímala, byla následující:

Hra. Hodíme 24krát dvěma kostkami. Pokud alespoň jednou padnou dvě šestky, vyhrajeme jeden livre¹². Pokud ne, prohrájeme jeden livre.

Vyplatí se hrát tuto hru? To zjistíme, když porovnáme pravděpodobnost výhry s pravděpodobností prohry.

⁸V angličtině se používá *expected value*, což v doslovném překladu znamená očekávaná hodnota.

⁹Jinými slovy, náš pravděpodobnostní prostor Ω sestává z elementárních jevů $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

¹⁰Pierre de Fermat (1601–1665) je znám jako autor Malé a Velké Fermatovy věty.

¹¹Blaise Pascala (1623–1662) asi znáš hlavně z fyziky, ačkoli se Pascal věnoval i matematice nebo teologii. Také sestrojil jednu z prvních mechanických kalkulaček.

¹²Jedná se o název historické měny, která byla ve Francii používána od 9. století do roku 1795.

Úloha 14. Vyjádři pravděpodobnost výhry v této hře.

Pravděpodobnost výhry činí v tomto případě asi 49 procent, takže se hru hrát nevyplatí, i když to na první pohled není vůbec jasné. Výherní částka však nemusí vždy být rovna proherní. Zamysli se nad následující hrou.

Hra. Hodíme si poctivou kostkou. Pokud padne 1, 2, 3 nebo 4, dostaneme 1 Kč. Jinak prohrajeme 10 Kč.

Chtl(a) bys hrát takovouto hru? Troufáme si tvrdit, že ne, intuice totiž říká, že i když je pravděpodobnost výhry dvakrát větší než pravděpodobnost prohry, při prohře zaplatíme desetkrát víc, než kolik vyděláme při výhře.

A přesně v této situaci vstupuje na scénu střední hodnota náhodné veličiny. Je-li náhodnou veličinou náš zisk (prohrajeme-li peníze, prostě to znamená, že zisk je záporný), střední hodnota nám říká, jaký je „očekávaný“ zisk jedné takové hry. Pokud bychom tedy danou hru hráli tisíckrát za sebou, očekáváme, že náš výdělek bude činit přibližně $1000 \cdot E(X)$. Dalo by se říct, že zajímavost i zálučnost hazardních her se skrývá v tomto vágním „přibližně“: sice si můžeš spočítat, jaký bude očekávaný výdělek, ale nikdo Ti nezaručí, že ho skutečně dosáhneš, protože mohou nastat i extrémně nepravděpodobné jevy.

Pro druhou z uvedených her tak prostě spočítáme, že střední hodnota výdělku X je $E(X) = = \frac{4}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot (-10) = \frac{-16}{6}$. Ačkoli je tedy pravděpodobnost výhry větší než pravděpodobnost prohry, lze očekávat, že budeme-li hrát dostatečně dlouho, ztratíme v průměru necelé 3 Kč každou hru.

Na zákonech pravděpodobnosti si postavila živobytí kupříkladu kasína. Pokud se v kasinu rozhodneš hrát nějakou hru založenou na náhodě, můžeš se spolehnout na to, že vypočítáš-li si střední hodnotu svého výdělku, bude vždy záporná.

Úloha 15. Při ruletě se kulička kutálí po obvodu kola, dokud neskončí v jedné z 37 přihrádek očíslovanými od 0 do 36 včetně. Uvažme zjednodušenou variantu rulety, kde sudá čísla kromě nuly jsou černá, lichá čísla jsou červená a nula zelená. Dají se s ní hrát kupříkladu následující hry:

- (1) Vsadíš si x Kč na to, že kulička skončí na černém políčku. Pokud se tak stane, vrátí se Ti $2 \cdot x$ Kč. Jinak se Ti nevrátí nic.
- (2) Vsadíš si x Kč na to, že kulička skončí na konkrétním políčku. Pokud se sázka vydaří, vrátí se Ti $36 \cdot x$ Kč. Jinak se Ti nevrátí nic.

Ověř, že v obou případech je střední hodnota výdělku záporná.

Právě díky principům pravděpodobnosti fungují i pojišťovny. Pojišťování se je totiž vlastně také forma hazardu. Můžeš si být jistý (jistá), že částka, kterou po Tobě bude chtít pojišťovna za pojištění proti povodni, bude zaručeně větší než pravděpodobnost povodně vynásobená škodou, která nastane, pokud povodeň opravdu přijde.

Přesto máme o pojišťování poněkud jiné smýšlení než o hazardu. Jeden důležitý rozdíl je v tom, že povodně nepřicházejí moc často, ale když přijdou, napáchají obvykle velké škody. Nám tak nevdá, že si platíme za to, že v případě nepravděpodobné události nepřijdeme na mizinu.

Pokud se Ti někdy v budoucnu přihodí, že budeš vlastnit hotel, asi se Ti vyplatí jej pojistit proti živelné pohromě, vypuknutí nakažlivé nemoci apod. Pokud se Ti ale někdy v budoucnu přihodí, že budeš vlastnit tisíce hotelů po celém světě, vzpomeň si na tuto kapitolu¹³ a uvědom si, že se nevyplatí pojišťovat jednotlivě každý hotel. Každým rokem sice pravděpodobně několik hotelů postihne nějaká pohroma, ale ušlý zisk bude více než vyvážen výdělkem zbylých hotelů. Kdybys místo toho každý hotel pojistil(a), sice by Ti pojišťovna v případě pohromy zaplatila ušlý zisk, ale dohromady bys zaplatil(a) víc, než kolik bys dostal(a).¹⁴

Sumační notace

Dříve než budeme moci pokračovat ve zkoumání náhodných veličin, zavedeme si nové značení, které

¹³A na nás.

¹⁴Tomuto principu se říká samopojištění.

je k nezaplacení, jakmile je potřeba zapisovat složitější součty. To bude brzy i náš případ.

Celkem často se stává, že chceme sečíst nějaký velký počet čísel, třeba všechna přirozená čísla od 1 do 100. V takovém případě napíšeme prostě jen $1+2+\dots+100$ a předpokládáme, že každý pochopí, co tím myslíme. Někdy dokonce počet sčítanců ani neznáme předem; třeba když sčítáme čísla od 1 do n , napíšeme to prostě jako $1+2+\dots+n$. V předchozím díle v kapitole o nekonečných prostorech jsme se dokonce setkali s nekonečnými součty, což vedlo k výrazům jako $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$.

Tento trojtečkový zápis je pohodlný a skvěle funguje pro jednoduché případy. Nicméně má i své problémy. Může stát, že existuje víc než jedna rozumná interpretace takového zápisu, což může vést k nedorozuměním: například $3 + 5 + 7 + \dots + 97$ může znamenat součet všech lichých čísel od 3 do 97, ale stejně tak dobře to může být součet všech lichých prvočísel menších než 100. Těžce spoléháme na lidskou intuici, protože vlastně neexistuje žádná jednoznačně správná interpretace tří teček, takže i nejjednodušší výrazy jako $1 + 2 + \dots + 100$ oplývají jistou nejednoznačností.

Taky se nám může stát, že místo posloupnosti budeme sčítat čísla v nějaké tabulce. Pak začíná být intuitivní zápis nepřehledný a komplikovaný, protože tam těch trojteček zkrátka je trochu moc. V úplně obecném případě však ani nevíme, jestli se množina čísel, která sčítáme, dá pěkně představit jako posloupnost, tabulka nebo něco úplně jiného. Příkladem je třeba naše definice střední hodnoty náhodné veličiny. Tu spočteme tak, že sečteme výrazy $P(\omega) \cdot X(\omega)$ pro všechna $\omega \in \Omega$.

Hodil by se tedy nějaký elegantnější zápis pro „podívej se na všechny $\omega \in \Omega$, spočti, kolik je $P(\omega) \cdot X(\omega)$, a všechna tahle čísla sečti“.

Takový zápis si teď představíme. Základním kamenem nové notace je velké řecké písmeno sigma: Σ .¹⁵ Výrazu, který s jeho pomocí vytvoříme, pak říkáme **suma**. Notaci používáme ná sledovně: pokud chceme prostě sečíst čísla od a do b včetně, napíšeme

$$\sum_{i=a}^b i.$$

Tím myslíme: Představ si, že proměnná i je na začátku a a my k ní v každém kroku přičteme jedna, než se dostaneme na b . V každém kroku (včetně toho, kdy $i = b$) si navíc připočteme i k výslednému součtu. Pokud bychom tak chtěli sečíst lichá čísla od 3 do 97, napíšeme prostě $\sum_{i=1}^{48} (2i+1)$. Tato notace totiž znamená součet $(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots + (2 \cdot 48 + 1) = 3 + 5 + \dots + 97$. Pokud chceme sčítat hodnoty nějaké obecné funkce f , napíšeme prostě $\sum_{i=a}^b f(i)$.

Novou proměnnou, kterou jsme zavedli v Σ notaci, je zvykem značit i , j nebo k . Samozřejmě ji můžeš značit jak chceš, pokud se tak nejmenuje nějaká jiná proměnná, kterou už používáš. Pozor, tato nová proměnná má význam pouze „uvnitř sumy“!

Úloha 16. Rozmysli si, že

- (1) $\sum_{i=a}^b (f(i) + g(i)) = \sum_{i=a}^b f(i) + \sum_{i=a}^b g(i)$,
- (2) $\sum_{j=a}^b c \cdot f(j) = c \cdot \sum_{j=a}^b f(j)$,
- (3) $\sum_{k=a}^b c = (b - a + 1) \cdot c$.

Nová notace na první pohled může působit zbytečně složitě, ale její výhoda se dostaví, hned jak se rozhodneme sčítat něco složitějšího než posloupnost, třeba tabulku. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Úloha 17. V tabulce 10×10 jsou napsána přirozená čísla tak, že v políčku na i -tém řádku a j -tém sloupečku je napsáno číslo $i + 2 \cdot j$. Jaký je součet čísel v tabulce?

Úloha se dá vyřešit různými způsoby. My si ukážeme přístup „prostě to sečtu“, který je velice snadný, pokud ses již se sumami trochu šzil(a).

¹⁵V řecké abecedě Σ odpovídá „S“, jež je počátečním písmenem latinského *summa*. Mimocho dem, jestli ses už někdy setkal(a) se znakem pro integrál $\int$, asi už tušíš, proč připomíná protáhlé písmeno S.

Řešení. Pro i -tý řádek si napíšeme součet čísel na tomto řádku jako $\sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j)$. Celkový součet všech čísel v tabulce je tak

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j).$$

Z předešlé úlohy už víme, že vnitřní sumu můžeme upravit jako

$$\sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j) = 10 \cdot i + 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j.$$

Snadno spočteme, že $\sum_{j=1}^{10} j = 55$. Můžeme tak dosadit do výrazu s dvojitou sumou a spočítat

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j) = \sum_{i=1}^{10} (2 \cdot 55 + 10 \cdot i) = 10 \cdot 2 \cdot 55 + 10 \cdot \sum_{i=1}^{10} i = 1100 + 10 \cdot 55 = 1650.$$

Všimni si, že nezáleží na tom, jestli se rozhodneme čísla v tabulce počítat po řádcích, nebo po sloupečcích (my počítali po řádcích). To zní jako nevinný a zcela triviální fakt, ale jedná se o jeden z největších triků v matematice¹⁶, který zanedlouho také nejdou použijeme.

Sumy se navíc na rozdíl od trojtečkové notace dají použít i ve chvíli, kdy počítáme přes netriviální množiny, jako třeba lichá prvočísla menší než 100. V takovém případě se obvykle prostě napíše

$$\sum_{\substack{p \text{ je prvočíslo,} \\ 3 \leq p \leq 100}} p.$$

Jak jsme již naznačili, pro nás budou sumy nesmírně užitečné při počítání s náhodnými veličinami, například střední hodnota se spočítá tak, že pro všechny elementární jevy ω našeho prostoru sečteme $P(\omega) \cdot X(\omega)$. V naší notaci pak prostě píšeme

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Tím myslíme, že daný výraz sečteme pro úplně všechny ω , pro která platí $\omega \in \Omega$.

Jak víš, střední hodnotu také můžeme počítat tak, že seskupíme elementární jevy podle toho, jaký dávají výsledek, a spočítáme vážený průměr. Označíme-li obor hodnot X jako $H(X)$, můžeme psát $E(X) = \sum_{x \in H(X)} P(X = x) \cdot x$.

Linearita střední hodnoty

Náhodné veličiny jsou nesmírně užitečným nástrojem, ale aby se projevily v plné síle, musíme jim obvykle mít vícero. V této kapitole si ukážeme, jak pracovat s několika náhodnými veličinami. Základním nástrojem je takzvaná linearita střední hodnoty, což není nic jiného než pozorování, že střední hodnota součtu několika veličin je rovna součtu jejich středních hodnot.

Vraťme se nyní k našemu pravděpodobnostnímu prostoru odpovídajícímu třem hodům mincí. Uvažovali jsme náhodnou veličinu X , která odpovídá počtu panen, které padly. Spočetli jsme, že střední hodnota X je 1,5.

Jak jsme si také řekli, výsledek 1,5 je velice přirozený: pokud si totiž hodíme jen jednou mincí, střední hodnota počtu panen bude 0,5. Při hodu třemi mincemi tak očekáváme, že střední hodnota bude třikrát větší.

¹⁶A také v účetnictví před příchodem počítačů: chceš-li si být opravdu jistý (jistá), že jsi správně sečetl(a) výplaty deseti zaměstnanců za dvanáct měsíců, sečti nejprve výplaty v tabulce po zaměstnancích a pak po měsících.

To je velice intuitivní myšlenka, ale i takové se musejí dokázat. Z definice náhodné veličiny nic takového totiž neplyne! Veličina „počet panen při hodu třemi mincemi“ je dokonce definovaná na jiném prostoru než veličina „počet panen při hodu jednou mincí“. Ukažme si nyní jednoduchý důkaz této myšlenky řečený v jazyce náhodných veličin.

Zavedeme si na našem osmiprvkovém prostoru tři náhodné veličiny X_1 , X_2 a X_3 , kde X_i říká, kolik panen padlo v i -tém kroku. Například X_1 je rovno jedné pro čtyři elementární jevy (panna, panna, panna)¹⁷, (panna, panna, orel), (panna, orel, panna) a (panna, orel, orel). Jinak je X_1 rovno nule.

Všimni si, že pro každý jev ω platí $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$. Například pro jev $\omega = (\text{panna}, \text{orel}, \text{panna})$ je $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 0$, $X_3(\omega) = 1$ a $X(\omega) = 1 + 0 + 1 = 2$. To v našem zápisu zapisujeme jako $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Ω								
X_1 :	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2 :	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3 :	0	1	0	1	0	1	0	1
$X = X_1 + X_2 + X_3$:	0	1	1	2	1	2	2	3

Dále si všimni, že $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 0,5$. A teď přijde trik: Protože $X = X_1 + X_2 + X_3$, můžeme vyjádřit střední hodnotu X jako součet středních hodnot veličin X_1 , X_2 a X_3 , který ale snadno spočítáme:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot (X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)) \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X_1(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X_2(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X_3(\omega) \\
 &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5.
 \end{aligned}$$

Faktu, že předchozí výpočet funguje, se říká **linearita střední hodnoty**. Pojďme si ho nyní zformulovat jako obecné tvrzení.

Tvrzení. (linearita střední hodnoty) *Pro libovolnou náhodnou veličinu X a reálné číslo c platí $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$. Dále necht' $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované pro stejný pravděpodobnostní prostor Ω . Potom $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$.*

Důkaz. V prvním případě chceme dokázat, že

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot cX(\omega) = c \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega),$$

¹⁷Tedy v prvním, druhém i ve třetím kroku padla panna.

což je ale pouhé vytknutí čísla c před sumu.

Přepíšeme-li druhý bod tvrzení v jazyce sum, chceme dokázat, že výraz

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n P(\omega) X_i(\omega)$$

je rovný výrazu

$$E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X_i(\omega).$$

To je ale pouhé přehození sum (chceš-li, sčítáme prvky po řádcích a po sloupečcích).

Poznamenejme, že ačkoli jsme si linearitu střední hodnoty ukázali na příkladu hodu třemi mincemi, které jsou na sobě nezávislé, linearita střední hodnoty vůbec žádnou nezávislost nevyžaduje, funguje vždy!

Úloha 18. Viki si hodil deseti kostkami a Jáchym si dvacetkrát hodil falešnou mincí, na které padá panna s pravděpodobností 0,2. Potom od celkového počtu ok, která padla Vikimu, odečetli dvojnásobek celkového počtu panen, které padly Jáchymovi. Jaká je střední hodnota výsledku?

Dej si pozor na to, že předchozí tvrzení funguje pouze pro součet náhodných veličin a obecně neplatí pro jiné operace.

Úloha 19. Najdi dvě náhodné veličiny X_1, X_2 takové, že $E(X_1) \cdot E(X_2) \neq E(X_1 \cdot X_2)$.

Linearita střední hodnoty je nesmírně užitečný nástroj. Pojdme si ukázat jeho použití na následující úloze.

Úloha 20. Na celostátní kolo matematické olympiády dorazilo n soutěžících, přičemž každý dostal visačku. Visačky se nicméně nedopatřením zamíchaly a byly rozděny náhodně – každé možné rozdělení má stejnou pravděpodobnost. Jaký je střední počet soutěžících, kteří dostali visačku se svým jménem?

Spočítejme nejprve, jaký je výsledek pro nějaké malé n , řekněme $n = 4$. Označme si čtyři účastníky písmeny A, B, C, D . Každé možné rozdělení visaček odpovídá nějaké permutaci čtyř písmenek A, B, C, D . My máme pro každou permutaci spočítat, kolik účastníků dostalo svojí visačku – takové účastníky budeme nazývat spokojenými. V následující tabulce každá permutace odpovídá jednomu sloupečku a spokojení účastníci jsou vyznačeni tučně. My máme spočítat průměrný počet spokojených účastníků, tedy máme sečíst hodnoty pro všechny sloupečky, což jsme udělali v poslední řádce. Následně máme vydělit $4! = 24$, abychom dostali pravděpodobnost.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Σ
$A:$	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D	6
$B:$	B	B	C	C	D	D	A	A	C	C	D	D	A	A	B	B	D	D	A	A	B	B	C	C	6
$C:$	C	D	B	D	B	C	C	D	A	D	A	C	B	D	A	D	A	B	B	C	A	C	A	B	6
$D:$	D	C	D	B	C	B	D	C	D	A	C	A	D	B	D	A	B	A	C	B	C	A	B	A	6
$\Sigma:$	4	2	2	1	1	2	2	0	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	0	1	1	2	0	0	24

Označíme-li X počet spokojených účastníků, pohledem na poslední řádku vidíme, že $P(X = 0) = \frac{9}{24}$, $P(X = 1) = \frac{8}{24}$, $P(X = 2) = \frac{6}{24}$, $P(X = 3) = \frac{0}{24}$ a $P(X = 4) = \frac{1}{24}$. Tedy

$$E(X) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{8 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{24} = 1.$$

Tento způsob je dost pracný a vůbec není jasné, jak ho zobecnit pro libovolné n . Co kdybychom ale spokojené účastníky sčítali po řádcích a ne po sloupečcích? Vidíme, že v každé řádce je přesně šest spokojených účastníků (poslední sloupeček tabulky), což vůbec není náhoda. Všechny visačky jsou totiž stejné a pro libovolného účastníka proto musí být pravděpodobnost, že dostane danou

visačku, stejná pro všechny visačky. Jinými slovy, když se podíváš na sloupečky, ve kterých je A na svém místě, zjistíš, že odpovídají $3! = 6$ permutacím písmenek B, C, D . Tento postup je velice snadné zobecnit pro libovolné n a sepsat na jeho základě čistě kombinatorické řešení. My si ukážeme, jak se dá důkaz elegantně zformulovat s využitím linearit střední hodnoty, jejíž podstata, jak víme, je přesné sčítání prvků tabulky po řádcích a po sloupečích.

Řešení. Zavedme si n náhodných veličin X_i , přičemž $X_i = 1$, pokud i -tý soutěžící dostal svou visačku, a $X_i = 0$ jinak. Povšimněme si, že pro náhodnou veličinu X „počet soutěžících, kteří dostali svou visačku“ platí $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Povšimněme si, že pravděpodobnost, že i -tý soutěžící dostal svou visačku, je přesně $\frac{1}{n}$, neboť pravděpodobnost, že dostal danou visačku, musí být stejná pro všech n visaček, protože se všechny chovají stejně. Pro náhodnou veličinu X_i tak platí $E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot 1 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{1}{n}$. Z linearit střední hodnoty tak plyne

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

V předchozím důkazu jsme použili náhodné veličiny, které nabývaly pouze hodnoty nula, nebo jedna. Taková veličina se dá plně popsat tím, pro které elementární jevy našeho prostoru dává výsledek jedna. Odpovídá tak vlastně přesně nějakému jevu. Proto se náhodné veličiny, které nabývají pouze hodnoty 0, nebo 1, nazývají **indikátory**, neboť indikují, zda nastal nějaký jev.

Na první pohled se může zdát, že jsou indikátory směšně jednoduché. Linearita střední hodnoty ale ukazuje, že mohou být nesmírně užitečné, neboť i komplikovanější náhodné veličiny se často dají vyjádřit jako součet indikátorů (i počet padlých panen jsme tak ostatně zapsali). Hlavní výhodou této metody je, že nás vůbec nemusí zajímat, jestli jsou jednotlivé jevy nezávislé, protože i kdyby mezi sebou byly provázány nějakými složitými vztahy, tak se jejich střední hodnota stále bude chovat pěkně díky linearitě střední hodnoty.

Tvrzení. *Nechť I_A je indikátor jevu A , tedy náhodná veličina, která nabývá hodnoty 1, nastal-li jev A , a jinak je 0. Potom platí $E(I_A) = P(A)$.*

Důkaz. Indikátor dá jedničku pro všechny elementární jevy, které leží v A , takže z definice střední hodnoty platí $E(I_A) = 0 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) + 1 \cdot \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A)$.

S indikátorovým trikem po ruce se již můžeš pustit do řešení následujících úloh!

Úloha 21. Na stole leží balíček 32 hracích karet. Otočíme prvních pět z nich. Jaká je střední hodnota počtu otočených srdcových karet?

Úloha 22. Na sluníčku se v kroužku hrálo 2018 tuleňátek. Jelikož jsou tuleňátka malá a neposedná, každé z nich v jednu chvíli šťouchlo do náhodně zvoleného souseda (do každého s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Jaká je střední hodnota počtu šťouchnutých tuleňátek?

Úloha 23. Pomocí střední hodnoty nahlédni, že $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k = \frac{n}{2} \cdot 2^n$.

Následující úloha ukazuje, jak moc je užitečná linearita střední hodnoty. Zatímco spočítat $E(X)$ a $E(Y)$ je jednoduché, zbylé tři části úlohy ukazují, že se zkoumané náhodné veličiny X a Y chovají v různých ohledech velmi rozdílně.

Úloha 24. Kuba a Rado si n -krát hodili mincí. Za každé dva po sobě jdoucí orly dostane Kuba bod (dvojice, za které dostává body, se mohou překrývat). Za každého orla následovaného pannou dostane jeden bod Rado. Označme X a Y náhodné veličiny udávající počet bodů, které dostane Kuba, respektive Rado.

- (1) Kolik je $E(X)$ a kolik $E(Y)$?
- (2) Jaké jsou maximální možné hodnoty X a Y ?
- (3) Řekněme, že Kuba získá bod za dvojici hodů $i, i+1$. Jaká je pravděpodobnost, že získá bod za dvojici hodů $i+1, i+2$? A kolik to vyjde pro Rada?
- (4) (těžší) Dokaž, že pro $n \geq 4$ je $P(X = 0)$ větší než $P(Y = 0)$.

Počítání s indikátory se také dobře chová vůči základním množinovým operacím, jak ukazují následující příklady:

Úloha 25.

- (1) Rozmysli si, že jsou-li I_X, I_Y indikátory jevů X, Y , tak $I = I_X I_Y$ je indikátor jevu $X \cap Y$.
- (2) Se stejnou notací jako v první části dokaž, že $I' = 1 - (1 - I_X)(1 - I_Y)$ je indikátor $X \cup Y$.
- (3) (těžká, princip inkluze a exkluze) Ukaž, že pro libovolnou n -tici jevů $A_1, \dots, A_n$ platí (v sumě dole sčítáme přes všechny neprázdné podmnožiny S množiny $\{1, \dots, n\}$)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{S=\{s_1, \dots, s_k\}} (-1)^{k-1} P(A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \dots \cap A_{s_k}).$$

Diskrétní prostory*

Nejprve poznamenejme, že Σ notace, kterou jsme si zavedli, se dá zobecnit i na nekonečné součty. Chceme-li „sečíst“ hodnoty nějaké funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pro všechna přirozená čísla, můžeme místo $f(1) + f(2) + \dots$ psát $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$. Všimni si uvozovek v předchozí větě: v přímém smyslu totiž není možné doslova sečíst nekonečně mnoho čísel.¹⁸ S dostatečně krotkými součty, což bude i náš případ, nicméně můžeme zacházet úplně stejně jako s těmi konečnými. Speciálně stále můžeme používat úpravy pro konečné součty, které známe z Úlohy 16. To mimo jiné znamená, že se naše definice náhodné veličiny a střední hodnoty dají velmi snadno zobecnit z konečných pravděpodobnostních prostorů i na nekonečné diskrétní.

Vraťme se nyní k příkladu z minulého dílu, kde jsme uvažovali prostor odpovídající pokusu, kdy házíme mincí tak dlouho, než nám padne panna. V našem příkladě byla mince falešná a panna padla v každém pokusu nezávisle s pravděpodobností p . Přirozená otázka je, jaký je průměrný počet hodů, po kterém nám panna padne. Jinými slovy chceme znát střední hodnotu náhodné veličiny, která pro všechna přirozená i nabývá hodnoty i s pravděpodobností $p \cdot (1-p)^{i-1}$ – to je totiž přesně pravděpodobnost, že panna padne poprvé v i -tém kroku. Potřebujeme tedy znát hodnotu nekonečného součtu $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p(1-p)^{i-1}$. Ta se dá spočítat pěkným trikem, který si nyní ukážeme.

Tvrzení. *Házíme-li mincí, na které padá panna s pravděpodobností $p > 0$, než poprvé padne panna, je střední hodnota počtu hodů rovna $1/p$.*

Ověřme, že výsledek dává smysl – čím menší pravděpodobnost, že padne panna, tím déle se v průměru musíme snažit. Speciálně dostáváme, že je-li mince férová, tedy $p = 1/2$, v průměru jsou potřeba dva hody na to, aby padla panna.

Důkaz. Označme X náhodnou veličinu odpovídající prvnímu kroku, ve kterém padne panna. Uvažme nyní první krok. Pokud padne panna (to se stane s pravděpodobností p), máme $X = 1$. Co když panna nepadne? Jednotlivé hody jsou nezávislé (mince nemá paměť), takže střední počet hodů, než padne panna, je pořád $E(X)$. K tomu je potřeba přičíst právě vykonaný krok. Dostáváme tak rovnici

$$E(X) = p \cdot 1 + (1-p)(E(X) + 1),$$

jejímž řešením je $E(X) = \frac{1}{p}$.

Úloha 26. Zkus najít alternativní důkaz předešlého tvrzení podle následujícího návodu:

- (1) Rozmysli si, že pro libovolnou náhodnou veličinu X , která může nabývat pouze kladných celočíselných hodnot, platí $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$.
- (2) Uvědom si, kolik je $P(X \geq i)$ v našem případě, a sečti řadu.

¹⁸Pročez neexistuje smysluplná odpověď na otázky typu: „Kolik je $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$?“

Náhodné veličiny na početných prostorech se ovšem někdy mohou chovat poněkud zálučně, speciálně se může stát, že střední hodnota náhodné veličiny vyjde nekonečno. Můžeme si například vymyslet náhodnou veličinu, která má s pravděpodobností 2^{-i} hodnotu 2^i . Potom je střední hodnota takové veličiny rovna součtu $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \dots = \infty$.¹⁹ To je také zdrojem následujícího paradoxu:

Úloha 27. (Petrohradský paradox) Uvažme následující hru – nejprve zaplatíš 1000 Kč a pak si budeš házet mincí, než Ti padne panna. Pokud padla v i -tém kroku, dostaneš 2^i Kč. Vyplatí se Ti hru hrát?

Dostaneme, že hru se vyplatí hrát, ať už je vkladní částka jakákoli, neboť očekávaný zisk bude vždy nekonečno. Problém je v tom, že jak jsme si řekli na příkladě pojišťování, pro velké částky a značně nepravděpodobné jevy už občas nemá valný smysl vyvozovat ze střední hodnoty nějaké závěry. A v tomto případě už pro $n = 100$ pracujeme s neskutečně malými pravděpodobnostmi, pro které získáme nepředstavitelné bohatství.

Úloha 28. Vyplatilo by se Ti předchozí hru hrát, pokud by byla velikost výhry shora omezena HDP Česka za rok 2017, tj. $5 \cdot 10^{12}$ Kč? Jinými slovy, ve chvíli, kdyby panna v dalším hoďu mohla vést k výhře převyšující tuto mez, tak se už ve hře nepokračuje a prostě dostaneš tyto peníze.

Pravděpodobnostní metoda a střední hodnota

Pamatuješ si ještě, jak jsme na začátku seriálu s pravděpodobnostní metodou řešili příklady, které na první pohled s pravděpodobností vůbec nesouvisely? Se střední hodnotou se tato metoda stává ještě silnější! Motto našeho přístupu na začátku bylo, že pokud má náhodné zvíře ze ZOO rypáček s nenulovou pravděpodobností, existuje v ZOO zvíře, které má rypáček. Nyní budeme používat následující: pokud má náhodné zvíře ze ZOO v průměru 4,1 nohou, tak v ZOO existuje zvíře, které má alespoň 4,1 nohou, a stejně tak existuje zvíře, které má nejvýše 4,1 nohou. Vzhledem k tomu, že zvířata mají celočíselný počet nohou, musí dokonce existovat zvíře s alespoň pěti nohama a zvíře s nejvýše čtyřma nohama. Síla tohoto přístupu spočívá v tom, že díky linearitě střední hodnoty umíme průměrné počty lečého počítat neuvěřitelně snadno.

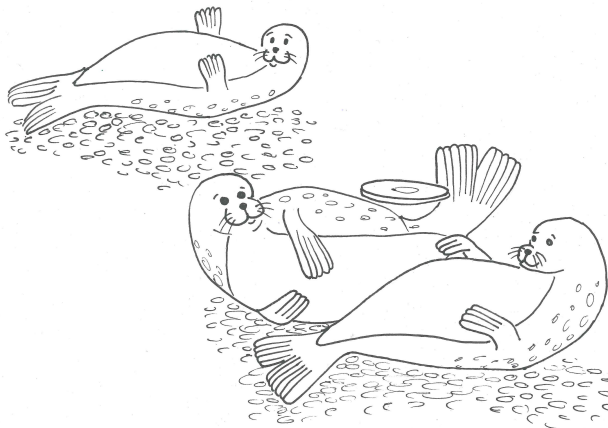
Úloha 29. Na každoroční turnaj ve frisbee dorazilo n tuleňů. Víme, že m dvojic tuleňů se kamarádí. Ukaž, že je můžeme rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) týmů tak, aby dvojic, které se mají rády a jsou spolu ve stejném týmu, bylo alespoň $\frac{m}{2}$.

Řešení. Rozdělme tuleňů do týmů náhodně, tedy pro každého se rozhodneme, do jakého týmu přijde, nezávisle na ostatních s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Zavedme indikátorovou náhodnou veličinu X_i , $1 \leq i \leq m$, pro každou dvojici tuleňů, kteří se kamarádí. Pravděpodobnost, že konkrétní dvojice bude ve stejném týmu, je přesně $\frac{1}{2}$, neboť s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ skončí oba tuleňi v prvním týmu a se stejnou pravděpodobností skončí oba v druhém týmu.

Nechť X je náhodná veličina udávající počet kamarádkých dvojic ve stejném týmu. Máme $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$. Z linearity střední hodnoty tak dostáváme, že $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_m) = m \cdot \frac{1}{2}$.

To ale nutně znamená, že existuje rozdělení tuleňů, pro které je počet kamarádkých dvojic ve stejném týmu alespoň $\frac{m}{2}$. Kdyby totiž pro každé rozdělení byl počet takových dvojic menší než $\frac{m}{2}$, i střední hodnota by musela být menší než $\frac{m}{2}$, neboť se jedná o průměr počtu kamarádkých dvojic ve stejném týmu pro všechna možná rozdělení.

¹⁹Nelekej se symbolu nekonečna, ten tady neznamená nic jiného, než že tento součet roste nad všechny meze.



Jak už se to u ukázkových úloh občas stává, použili jsme zde kanón na vrabce²⁰. Existuje totiž i mnohem jednodušší řešení, které na první pohled s tím pravděpodobnostním vůbec nesouvisí.

Úloha 30. Vyřeš předchozí příklad bez použití pravděpodobnosti.

Nyní si zkus tento postup aplikovat sám (sama) na následující příklady. Stejně jako u klasické pravděpodobnostní metody existuje následující recept:

- (1) Přečti si v zadání, co máš zvolit, a udelej to náhodně. Rozmysli si, jaký pravděpodobnostní prostor odpovídá této volbě.
- (2) Musíš dokázat, že pro danou volbu je počet něčeho nabývá alespoň/nejvýše nějaké hodnoty. Stačí dokázat, že střední hodnota veličiny při náhodné volbě je rovna alespoň/nejvýše této hodnotě.
- (3) Spočítej střední hodnotu pro svou náhodnou volbu. Může se hodit rozložit danou veličinu na součet jednoduchých veličin a pak použít linearitu střední hodnoty.

Úloha 31. Máme opět n tulenů a m kamarádkých dvojic. Dokaž, že je můžeme rozdělit do tří (ne nutně stejně velkých) týmů tak, aby počet kamarádkých dvojic ve stejném týmu byl *nejvýše* $m/3$.

Úloha 32. Do soutěže Česko hledá Superstar se přihlásilo a soutěžících. Posuzují je čtyři porotci, přičemž každý z nich hodnotí soutěžícího pouze slovy „dobrý“, „ucházející“ nebo „špatný“. Dokaž, že existují dva porotci, kteří se shodli na alespoň šestině soutěžících.

Úloha 33. V turnaji hrálo n hráčů, přičemž každý hrál s každým. Po skončení turnaje bychom rádi soutěžící seřadili tak, že první porazil druhého, druhý třetího atd. Dokaž, že turnaj mohl dopadnout tak, aby počet způsobů, jak soutěžící seřadit, byl alespoň $\frac{n!}{2^n - 1}$.

Úloha 34. Rozmysli si, že pokud vyřešíš nějaký příklad (např. z první sekce tohoto dílu) s použitím nerovnosti $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$, místo použití této nerovnosti můžeš zavést vhodné indikátory a použít linearitu střední hodnoty. Nová metoda je tedy do jisté míry zobecněním základní pravděpodobnostní metody.

Úloha 35. Na společenském večeru se sešlo n účastníků a n účastnic, kteří si spolu chtějí zatancovat. Předpokládejme, že existuje alespoň $n^2 - n + 1$ párů (tvořených osobami opačného pohlaví),

²⁰V tomto případě spíš tuleně.

které by spolu chtěly tancovat. Ukaž, že umíme všech $2n$ tanečnicků popárovat tak, aby každý tancoval se člověkem, se kterým tancovat chce.

Úloha 36. (těžká) Mějme $n > 1$ reálných čísel, jejichž součet je nula, a zároveň je alespoň jedno z nich nenulové. Ukažte, že je můžeme označit $a_1, \dots, a_n$ tak, aby platilo $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 < 0$.

Úloha 37. (těžká a se spojitými prostory) Tulák má kabát o povrchu 1 a na něm pět záplat o obsahu $\frac{1}{2}$. Ukaž, že se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti s obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Závěr

Možná že jistě ale určitě snad.

Jiří Suchý

Hurá! Dočetl(a) jsi až na konec druhého dílu. Doufáme, že ses už šzil(a) s pravděpodobnostními prostory a ani náhodné veličiny Tě dnes nebudou strašit ve spánku. V tomto díle jsme si ukázali, jak aplikovat naše znalosti k řešení příkladů, ale do příštího dílu si hlavně zapamatuj, co to jsou náhodné veličiny, k čemu se může hodit znát jejich střední hodnotu a jak ji vypočítat s použitím linearity střední hodnoty. Těšíme se na Tebe u příštího dílu a do té doby přejeme hodně zdaru při řešení soutěžních úloh!



Návody k úlohám

2. (1) Nic. (2) Nic. (3) Jeden tým může být hodně malý. (4) Pravděpodobnost, že zakázaná skupina je celá v jednom týmu, teď nebude $2 \cdot \frac{2^{18}}{2^{24}}$, ale $2 \cdot \binom{18}{6} / \binom{24}{12}$.

3. Rozděl PraSátka náhodně a pak pokračuj jako ve vzorovém příkladu.

4. Zvol náhodnou uspořádanou dvojici studentů (záleží na pořadí a v obou náhodných výběrech můžeš zvolit téhož studenta). Jaká je pravděpodobnost, že ani jeden z nich nevyřešil první úlohu?

5. Učitel(ka) nejspíš bude říkat, že sis měl(a) dojít o přestávce, ale nakonec Tě pravděpodobně pustí.

6. Náhodně zvol 14 jazyků nezávislými náhodnými výběry; pravděpodobnost, že jeden z učitelů mluví náhodně zvoleným jazykem, je alespoň $\frac{1}{2}$. A ano, konstantu 14 jde výrazně zlepšit.
7. Když děti rozdělíme náhodně, bude pravděpodobnost, že dané dítě nemá ve své skupince žádného kamaráda, rovna nejvýše $\frac{\binom{59}{29}}{\binom{89}{29}}$.
8. Náhodně zvol permutaci a podívej se na jednotlivé za sebou jdoucí dvojice prvků. Chtěli bychom použít odhad na sjednocení pravděpodobností, jenže náš odhad pomocí součtu odhaduje na druhou stranu. Platí ale, že když od součtu pravděpodobností navíc odečteme součet pravděpodobností všech dvojic jevů, otočí se odhad na druhou stranu.
9. Zvol známosti náhodně. Jaká je pak pravděpodobnost, že z daných n lidí se všichni znají?
10. Co se stane, pokud prohodíme orla a pannu? Ve druhé části můžeš popárovat jevy, které mají stejnou pravděpodobnost, vyjde $\frac{n}{2}$.
15. Prostě to dosaď do vzorečku.
16. První dvě části plynou ze základních vlastností aritmetických operací; pro třetí část uvědom, kolik sčítanců tam je.
22. Zaveď si indikátory jevů „ k -té tuleňátko bylo šfouchnuté“.
23. Vyber si z n prvků náhodnou podmnožinu a podívej se na střední hodnotu její velikosti.
25. (1) Plyne z definice indikátoru.
(2) Vzpomeň na to, jak se průniky a sjednocení operace chovají vůči doplňkům.
(3) Zaveď si indikátory a zkus trochu zobecnit poznatky z prvních dvou částí; na konci kombinatoricky nahlédni, jak se ronásobí jeden výraz.
26. Použij, že $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, atd. Následně sečti tu řadu.
31. Postupuj stejně jako s rozdělováním do dvou týmů.
32. Podívej se na náhodné dva porotce a pro každého soutěžícího zaveď indikátor, že se na něm porotci shodli. Co můžeme říct o pravděpodobnosti toho, že se na daném soutěžícím náhodní dva porotci shodlí?
33. Řekněme, že každý zápas skončil náhodně. Jaká je pravděpodobnost toho, že pro dané seřazení hráčů každý porazil toho po své pravici?
35. Jaká je střední hodnota hodnota počtu „dobrých“ párů, popárujeme-li účastníky s účastnicemi náhodně?
36. Označ je náhodně a spočítej $E(a_1 a_2)$. Může se hodit roznásobit si výraz $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.
37. Uniformně náhodně zvol bod na kabátu, nechť se nachází uvnitř D záplat. Zkus nějak interpretovat a odhadnout výraz $E(\binom{D}{2})$.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) Nic, prostě by pravděpodobnost jevů A_i nebyla přesně 2^{-5} , ale nejvýše 2^{-5} .
(2) Nic, počet účastníků překvapivě vůbec nehraje roli. Samozřejmě, pokud máme podmínky pro šestice, musí být počet účastníků alespoň 6.
(3) Jsou-li všichni účastníci v jednom, nebo všichni v druhém týmu, určitě bude všech deset požadavků porušeno. To ale znamená, že pro 32 podmínek máme $P(A_1 \cup \dots \cup A_{32}) < P(A_1) + \dots + P(A_{32})$. I pro 32 podmínek tak stejným postupem dostaneme ostrou nerovnost $P(A_1 \cup \dots \cup A_{32}) < 1$. Bez tohoto pozorování bychom dostali pouze neostrou nerovnost, která ale nestačí.
(4) V tomto případě už není pravda, že vybrat šestici znamená udělat šest nezávislých rozhodnutí. Vybrat dvanáct účastníků tak, že tato dvanáctice obsahuje danou šestici účastníků,

znamená, že musíme zvolit 6 zbylých účastníků z celkového počtu $24 - 6 = 18$. Máme tedy $P(A_i) = 2 \cdot \frac{\binom{18}{6}}{\binom{24}{12}}$. Zbývá ověřit, že $10 \cdot P(A_i) < 1$, což přenecháme kalkulačkám.

3. Rozdělíme PraSátka do týmů náhodně. Musíme odhadnout pravděpodobnost, že daná skupinka nebude mít reprezentanta v jednom týmu. Zafixujeme jednu z podmínek ze zadání a označme jevem T to, že daná skupinka PraSátek nemá reprezentanta v nějakém jednom týmu, a jevy T_i , $1 \leq i \leq 4$ to, že daná skupinka nemá žádného reprezentanta v i -tém týmu. Máme $P(T_i) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, neboť pro každé PraSátko se rozhodujeme nezávisle. Dále $P(T) = P(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \leq P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T_4) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$, neboť pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností. Máme tedy méně než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ jevů, z nichž každý nastane s pravděpodobností nejvýše $4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Víme, že pravděpodobnost sjednocení nějakých jevů je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, ten je ale menší než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$.

4. Zvolme dvakrát po sobě náhodného studenta z 200. Dokážeme, že s nenulovou pravděpodobností tato dvojice vyřešila všechny příklady. Může se stát, že vybereme dvakrát stejného studenta, ale to nevadí, neboť pokud jeden student vyřešil všechno, přidáme k němu prostě do dvojice libovolného jiného studenta; tato dvojice pak opět vyřešila všechno.

Zavedme jevy $U_1, U_2, \dots, U_6$, kde jev U_i znamená „žádný ze zvolených studentů nevyřešil i -tou úlohu“. Nejvýše 80 studentů nevyřešilo první úlohu, takže pravděpodobnost toho, že ji nevyřešil první student, je nejvýše $\frac{80}{200} = \frac{2}{5}$. Pro druhého to vyjde stejně a díky nezávislosti dvou voleb tedy platí $P(U_i) \leq \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Pravděpodobnost, že některá ze šesti úloh nebyla vyřešena ani jedním ze zvolených studentů, odhadneme součtem pravděpodobností, neboli $P(U_1 \cup \dots \cup U_6) \leq P(U_1) + \dots + P(U_6) \leq \frac{24}{25} < 1$. Některá dvojice proto musela vyřešit všechny úlohy.

5. Tak, a teď se můžeš s chutí pustit do dalších příkladů!

6. Pro $n \leq 7$ stačí zvolit všechny jazyky. Předpokládejme dále, že se vyučuje alespoň 14 jazyků. Pro náhodně zvolený jazyk je pravděpodobnost toho, že jím bude pevně zvolený učitel mluvit, rovna alespoň jedné polovině, neboť každý učitel ovládá alespoň polovinu všech vyučovaných jazyků.

Zvolme nezávisle náhodně 14 jazyků (jeden jazyk tedy možná zvolíme vícekrát). Nazvěme A_i jev „ i -tý učitel nemluví žádným ze zvolených jazyků“. Pravděpodobnost, že první učitel nemluví prvním z nich, je rovna nejvýše $\frac{1}{2}$, stejně tak pro každý z jazyků; jelikož jsme jazyky volili nezávisle na sobě, dostáváme $P(A_1) \leq 2^{-14}$. Analogickou úvahu můžeme provést i pro ostatní učitele. Teď už stačí odhadnout pravděpodobnost sjednocení pomocí součtu pravděpodobností, tedy $P(A_1 \cup \dots \cup A_{500}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{500}) \leq 500 \cdot 2^{-14} < 1$, takže musí existovat volba, pro níž každý učitel umí alespoň jeden zvolený jazyk.

7. Řekněme, že se jedno z dětí jmenuje Fíla. Pak existuje celkem $\binom{89}{29}$ 30členných skupin, ve kterých je Fíla; je-li počet Fílových kamarádů k , tak $\binom{89-k}{29}$ z nich neobsahuje žádného z Fílových kamarádů. Pro $k \geq 30$ je $\binom{89-k}{29} \leq \binom{59}{29}$. To znamená, že pokud zvolíme náhodné rozdělení do tří skupinek, je pravděpodobnost, že Fíla nebude mít ve skupině kamaráda, rovna nejvýše $\frac{\binom{59}{29}}{\binom{89}{29}} = \frac{59 \cdot 58 \cdot \dots \cdot 31}{89 \cdot 88 \cdot \dots \cdot 61} = \frac{59}{89} \cdot \frac{58}{88} \cdot \dots \cdot \frac{31}{61}$. Každý z těchto zlomků je roven nejvýše $\frac{2}{3}$. Dále pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, takže je při náhodném rozdělení pravděpodobnost, že nějaké dítě nemá žádného kamaráda ve své skupince, rovna nejvýše $90 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{29} < 1$. Proto musí existovat nějaké vyhovující rozdělení.

8. Pro libovolné množiny S_i platí: $|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| \geq |S_1| + \dots + |S_n| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - \dots - |S_{n-1} \cap S_n|$. V prvních n členech totiž započteme každý prvek ze sjednocení k -krát, pokud se vyskytuje v k různých množinách S_i ; tentýž prvek se ale bude nacházet i v průsečíku libovolné dvojice řečených množin, takže ho pak odečteme $\binom{k}{2}$ -krát. Je tedy dohromady započten přesně $\left(k - \frac{k(k-1)}{2}\right)$ -krát. Tento výraz je roven nejvýše jedné pro libovolné nezáporné k , takže na pravé straně započteme každý člen z levé strany nejvýše jednou, čímž je nerovnost dokázána.

Uvažme náhodnou permutaci π a označme pro $1 \leq i \leq 2n-1$ jako X_i jev „ $|\pi(i) - \pi(i+1)| = n$ “. Stačí nám ukázat, že platí $P(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{2n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Spočítáme, že $P(X_i) = \frac{1}{2n-1}$ a $P(X_i \cup X_j) = 0$ pro $|i-j| = 1$ a $P(X_i \cup X_j) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}$ jinak. Nakonec použijeme dokázanou nerovnost, kterou ještě před tím vydělíme velikostí celého pravděpodobnostního prostoru, aby se z velikostí množin staly pravděpodobnosti: $P(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{2n-1}) \geq P(X_1) + \dots + P(X_n) - P(X_1 \cap X_2) - P(X_1 \cap X_3) - \dots - P(X_{2n-2} \cap X_{2n-1}) = (2n-1) \frac{1}{2n-1} - \left(\binom{2n-1}{2} - (2n-2) \right) \frac{1}{(2n-1)(2n-3)} = 1 - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$.

9. Pro každou dvojici se náhodně rozhodneme, zda se zná, nebo nezná. Pravděpodobnost, že daných n lidí se navzájem zná, je $2^{-\binom{n}{2}}$, neboť pro každý z $\binom{n}{2}$ párů se s pravděpodobností jedna polovina rozhodneme, že se daní dva lidé budou znát. Stejně tak $2^{-\binom{n}{2}}$ je pravděpodobnost, že daných n lidí se navzájem nezná. Počet způsobů, jak z $2^{n/2}$ lidí vybrat n , je $\binom{2^{n/2}}{n}$. Pravděpodobnost, že bude existovat n lidí, kteří se navzájem buď všichni znají, nebo všichni neznají, je tedy nejvýše $\binom{2^{n/2}}{n} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{n}{2}}$ (zde používáme, že pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu pravděpodobností). Nakonec spočítáme, že tento výraz je menší než jedna, což Ti přenecháme jako ne tak docela jednoduché cvičení.

11. (1) Platí to pro všechny veličiny, neboť pro všechny elementární jevy platí $X(\omega) + X(\omega) = 2 \cdot X(\omega)$.
 (2) Pro všechny elementární jevy ω musí být $X(\omega) \cdot X(\omega) = X(\omega)$, tedy $X(\omega) = 0$, nebo $X(\omega) = 1$; naopak každá náhodná veličina s touto vlastností zřejmě splňuje zadanou rovnici.

12. Rozdělme elementární jevy do m skupin podle toho, jaký výsledek pro ně dává X . Součet pravděpodobností jevů, pro které je X rovné x_i , je z definice $P(X = x_i)$. Formulí pak dostaneme jako součet příspěvků všech m skupin.

13. Hodíme si spravedlivou mincí a padne-li panna, položíme $X = 4$, a padne-li orel, definujeme $X = \frac{1}{4}$. Potom je $E(X) = E(1/X) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} > 2$.

14. Pravděpodobnost, že v nějakém kole hodíme dvě šestky, je $\frac{1}{36}$. Pravděpodobnost, že v daném kole nehodíme dvě šestky je tak $\frac{35}{36}$. Pravděpodobnost prohry je tak z nezávislosti jednotlivých pokusů rovna $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, takže pravděpodobnost výhry je $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0,49$.

15. Nehraj ruletu o peníze. ;)

18. Nechť X značí celkový počet ok a Y celkový počet panen. Střední hodnota počtu ok při hodu jednou kostkou je 3,5, takže z linearity střední hodnoty máme $E(X) = 35$. Obdobně $E(Y) = 20 \cdot 0,2 = 4$. Nakonec opět z linearity střední hodnoty máme $E(X - 2Y) = E(X + (-2) \cdot Y) = E(X) + (-2) \cdot E(Y) = 27$.

19. Uvažme kupříkladu hod férovu mincí a náhodnou veličinu X , která dává 1, padne-li orel, a 0, padne-li panna. Máme $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Jak už víme, platí $X \cdot X = X$, takže zvolíme-li $X_1 = X_2 = X$, máme $E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{1}{4}$, ale $E(X_1 \cdot X_2) = E(X) = \frac{1}{2}$.

21. Pro $1 \leq k \leq 5$ uvažme jevy A_k „ k -tá karta je srdcová“. Dále pro každý jev A_k zavedme jeho indikátor I_k . Máme $E(I_k) = P(A_k) = \frac{1}{4}$. Pro celkový počet srdcových karet X platí $X = I_1 + \dots + I_5$ a z linearity střední hodnoty tak máme $E(I_1 + \dots + I_5) = E(I_1) + \dots + E(I_5) = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

22. Pro každé $1 \leq k \leq 2018$ zavedeme indikátor I_k pro jev A_k „ k -té tuleňátko bylo šfouchnuté“. Platí $E(I_k) = P(A_k) = \frac{3}{4}$, neboť tuleňátko nebude šfouchnuto jen tehdy, když oba jeho sousedi šfouchnou svého druhého souseda. Pro počet šfouchnutých tuleňátek X pak máme z linearity střední hodnoty $E(X) = E(I_1 + \dots + I_{2018}) = E(I_1) + \dots + E(I_{2018}) = 2018 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3027}{2}$.

23. Uvažme náhodně vybranou podmnožinu n objektů. Pro každý jev A_i „ i -tý prvek byl vybrán“ si zavedeme indikátor I_i , pro nějž platí $E(I_i) = P(A_i) = \frac{1}{2}$. Střední hodnota počtu vybraných objektů je tedy $\frac{n}{2}$. Na druhou stranu ji můžeme vyjádřit jako $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} / 2^n \cdot k$.

24. Panny budeme označovat jako P a orly jako O .

- (1) Zavedeme indikátor pro každou z $n - 1$ dvojic. Z linearity střední hodnoty pak vyjde $\frac{n-1}{4}$.
- (2) Je to $n - 1$ pro sekvenci $OOOO \dots$ a $\lfloor n/2 \rfloor$ pro sekvenci $OPOP \dots$
- (3) Vyjde $\frac{1}{2}$ pro Kubu a 0 pro Rada.
- (4) Potřebujeme spočítat počet řetězců tvořených písmeny O a P takových, že a) neobsahují podřetězec OO a b) neobsahují podřetězec OP . a) Řekněme, že a_n je počet řetězců na n prvcích neobsahující OO . Potom platí $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Dále uvažme libovolný řetězec na $n \geq 3$ prvcích neobsahující OO . Takový řetězec buď končí na písmeno P , nebo O . V prvním případě může být prvních $n - 1$ znaků řetězce libovolným řetězcem neobsahujícím OO . V druhém případě musí být předposlední znak P , ale prvních $n - 2$ znaků zase může být libovolný řetězec neobsahující OO . Dostáváme tak rovnici $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, z které může počítat další členy: 2, 3, 5, 8, 13, $\dots$. Této posloupnosti se také říká Fibonacciho. b) Jestliže posloupnost neobsahuje OP , platí, že jakmile je v posloupnosti nějaké O , napravo od něj už musí být samá O čka. Každá taková posloupnost nejdřív obsahuje nějaký počet P ček (klidně nulový) a pak nějaký počet O ček (také klidně nulový). Takových posloupností je $n + 1$. Stačí dokázat $a_n \geq n + 1$, což Ti přenecháme jako snadné cvičení na matematickou indukci.

25. (1) Součin dvou indikátorů bude roven jedné právě tehdy, pokud budou oba z nich nenulové, takže pro ty jevy, které jsou součástí X i Y , neboli pro jejich průnik, jinak bude roven nule, takže rovnost plyne z definice indikátoru.

(2) Stačí všimnout, že platí $I_{\overline{X}} = 1 - I_X$ a $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, načež pouze použijeme výsledek z první části a dostaneme kžénou rovnost.

(3) Definujeme si pro všech n jevů A_i jejich indikátorové veličiny I_i a pro sjednocení těchto jevů indikátorovou veličinu I . Jelikož platí $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$, vyplývá z minulého cvičení vyplývá rovnost $1 - I = (1 - I_1)(1 - I_2) \dots (1 - I_n)$. Roznásobíme-li pravou stranu, tak po odečtení jedničky a vynásobení -1 dostáváme $I = \sum_{j=1}^n I_j - \sum_{1 \leq j < k \leq n} I_j I_k + \dots + (-1)^{n-1} I_1 I_2 \dots I_n$. Uvážením střední hodnoty obou stran dostaneme dokazovanou rovnost.

26. (1) Máme $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots$, $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \dots$ atd. V sumě $\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$ se po takovémto vyjádření všech $P(X \geq i)$ vyskytuje každý výraz $P(X = j)$ přesně j -krát. Proto $\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(X = j) = E(X)$.

(2) V případě s mincí je $P(X \geq i) = (1 - p)^{i-1}$, neboť se to stane právě tehdy, padne-li během prvních $i - 1$ hodů pokaždé orel, takže $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i = \frac{1}{p}$, kde jsme sečetli geometricku řadu.

28. Střední hodnota vyjde nula, jen když můžeme udělat alespoň sto hodů, což vede na částku 2^{100} Kč, jež je zásadně větší než HDP Česka.

30. Budeme tuleně do týmů přidávat po jednom. Pokaždé když přidáváme nového tuleně, uvažíme přátelské vztahy mezi tímto tuleněm a tuleni, které jsme už do týmů rozdělili. Aktuálního tuleně pak prostě dáme do týmu, kde je více jeho kamarádů. Protože v každém kroku byl počet přidávaných vztahů uvnitř týmů alespoň roven polovině celkového počtu přidávaných vztahů, musí na konci platit, že počet vztahů uvnitř týmů je alespoň poloviční oproti počtu všech vztahů.

31. Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu se dvěma týmy. Rozdělíme tuleně náhodně a pro každou dvojici zavedeme veličinu X_i indikující, zda je ve stejném týmu. Dostáváme $E(X_i) = \frac{1}{3}$. Z linearity střední hodnoty je střední počet dvojic ve stejném týmu roven $m \cdot \frac{1}{3}$, takže existuje rozdělení, kde je takových dvojic nejvýše $m \cdot \frac{1}{3}$.

32. Nechť X je náhodná veličina značící počet soutěžících, na kterých se shodli náhodní dva porotci. Stačí dokázat $E(X) \geq \frac{a}{6}$. Dále pro každé i označme A_i jev „náhodní dva porotci se shodli

na i -tém soutěžícím“. Pověsimně si, že pro každého soutěžícího existují alespoň dva porotci, kteří mu dali stejné hodnocení. Možných dvojic porotců je $\binom{4}{2} = 6$, takže máme $P(A_i) \geq \frac{1}{6}$.

Pro všechna $1 \leq i \leq a$ budíž X_i indikátor jevu A_i . Máme $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_a) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_a) \geq a \cdot \frac{1}{6}$.

33. Představme si, že turnaj dopadnul náhodně, tj. každý hráč vyhrál každý ze svých zápasů s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Existuje celkem $n!$ různých seřazení všech hráčů, protože očíslováme-li hráče čísly od 1 do n , tak každé seřazení můžeme ztotožnit s nějakou permutací π . Můžeme si tedy zavést indikátor I_π , který je roven jedné právě tehdy, když hráč $\pi(i)$ porazil hráče $\pi(i+1)$ pro $i = 1, \dots, n-1$, jelikož jsou všechny výsledky zápasů nezávislé, tak $E(I_\pi) = 2^{1-n}$. Z linearity střední hodnoty je proto průměrný počet vyhovujících seřazení roven (sčítáme přes všechny permutace) $\sum_\pi E(I_\pi) = \frac{n!}{2^{n-1}}$.

34. Pro jevy $A_1, \dots, A_n$ zavedeme indikátory $I_1, \dots, I_n$. Poté náhodná veličina $X = I_1 + \dots + I_n$ odpovídá „počtu jevů A_i , které nastaly“. Nyní z linearity střední hodnoty dostáváme $E(X) = E(I_1) + \dots + E(I_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$. Při použití původní metody bychom se snažili dokázat $P(A_1) + \dots + P(A_n) < 1$ a interpretovali to tak, že pravděpodobnost, že nenastane žádný z jevů A_i je větší než nula. Nyní se snažíme dokázat to samé, ale nakonec řekneme, že pokud je střední počet jevů A_i , které nastaly, ostře menší než jedna, musí nastat případ, kdy počet nastávších jevů je přesně nula, neboť tento počet je vždy nezáporné celé číslo.

35. Popárujeme tanečníky náhodně a pro každý pár zavedeme indikátor X_i , který dá jedničku, právě když lidé z i -tého páru spolu chtějí tancovat. Existuje celkem n^2 dvojic účastník-účastnice a alespoň $n^2 - n + 1$ z nich spolu chce tancovat, takže $E(X_i) \geq \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$. Z linearity střední hodnoty dostaneme $E(\sum_{i=1}^n X_i) = nE(X_1) \geq \frac{n^2 - n + 1}{n} > n - 1$, takže musí existovat nějaké popárování, ve kterém bude všech n párů spokojených.

36. Označme si čísla nějakým pevně zvoleným způsobem jako $a_1, \dots, a_n$. Chceme ukázat, že existuje permutace $\{1, \dots, n\}$ π taková, že $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)} < 0$ (na permutaci se díváme jako na funkci). Pro náhodnou permutaci platí $E(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, neboť se $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}$ musí rovnat jednomu z těchto součinů a ze symetrie je každý z nich stejně pravděpodobný. Z linearity střední hodnoty (a symetrie) tedy je $E(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)}) = nE(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Zároveň však platí $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, takže pro čísla s nulovým součtem je díky nezápornosti čtverců $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 0$ a kvůli tomu, že aspoň jedno číslo je nenulové, bude nerovnost dokonce ostrá. Proto $E(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)}) < 0$.

37. Pokud máme dvě náhodné veličiny X, Y na Ω a pro libovolný jev $\omega \in \Omega$ je $X(\omega) \geq Y(\omega)$, tak ze vzorečku pro střední hodnotu plyne $E(X) \geq E(Y)$. Vyberme uniformně náhodně bod na kabátu, necht D je počet záplat, které jej pokrývají. Z linearity střední hodnoty je $E(D) = 5 \cdot \frac{1}{2}$. Pro celá čísla $0 \leq d \leq 5$ platí $\frac{d(d-1)}{2} \geq 2d - 3$, takže $E(\binom{D}{2}) \leq E(2D - 3) = 2E(D) - 3 = 2$. Kombinatoricky můžeme výraz $E(\binom{D}{2})$ interpretovat jako průměrný počet dvojic záplat, v nichž leží uniformně náhodně zvolený bod, což se díky naší geometrické interpretaci pravděpodobnosti rovná součtu obsahů průniků dvojic různých záplat. Dvojic záplat je celkem $\binom{5}{2} = 10$, takže předpokládáme-li, že libovolné dvě záplaty mají průnik s obsahem menším než $\frac{1}{5}$, dostáváme $E(\binom{D}{2}) < 2$, což je spor s výše odvozenou nerovností. Proto se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti s obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Pravděpodobnost III. – Návrat velkých čísel

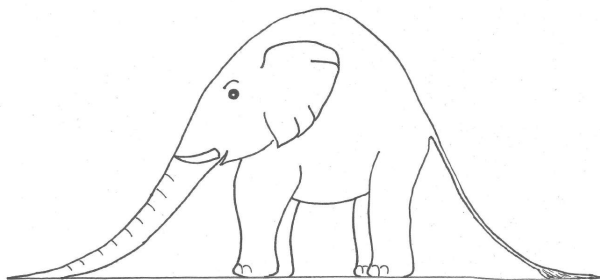
Lékařství dělá lidi nemocnými, matematika mrzutými a teologie hříšnými.

Martin Luther

Milý příteli,

vítej u třetího dílu seriálu o pravděpodobnosti! Zatímco v předchozím díle jsme Ti chtěli ukázat, jak se pomocí pravděpodobnosti dají řešit všemožné matematické úlohy, zde bychom Ti především rádi naznačili, proč je vlastně pravděpodobnost tak užitečným nástrojem i mimo svět matematiky. Naším hlavním cílem bude pomocí náhodných veličin vysvětlit princip, kterému se říká *zákon velkých čísel*.

Nejprve si však zopakujme, co jsme si řekli v předchozím díle. Představili jsme si pravděpodobnostní metodu, jež umožňuje pomocí pravděpodobnosti řešit úlohy, které s ní zdánlivě vůbec nesouvisí. Poté jsme si zavedli náhodné veličiny (značené velkými písmeny, nejčastěji X), což jsou v podstatě proměnné nabývající různých hodnot s různou pravděpodobností. Definovali jsme je jako funkce z pravděpodobnostního prostoru Ω do reálných čísel. Díky této definici můžeme s různými náhodnými veličinami definovanými na stejném pravděpodobnostním prostoru provádět různé operace a stále dostaneme náhodnou veličinu: jsou-li například X, Y definované na Ω , pak náhodná veličina $2X + Y^2$ přiřadí každému $\omega \in \Omega$ číslo $2X(\omega) + Y(\omega)^2$. Po stručném shrnutí sumační notace jsme ji hned aplikovali při zavedení střední hodnoty náhodné veličiny $E(X)$, což je prostě průměrná hodnota X . Nakonec jsme si pro libovolné náhodné veličiny X, Y a číslo c dokázali vztahy $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ a $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$, které se dohromady nazývají linearita střední hodnoty. V řadě případů nám tyto vlastnosti velmi usnadňují její výpočet. Všechny nově nabyté znalosti jsme pak použili k vylepšení pravděpodobnostní metody, té se však ve třetím díle věnovat vůbec *nebudeme*.



Začátek tohoto dílu bude věnován především intuici za již zmíněným zákonem velkých čísel,

který může sice na první pohled působit poněkud složitě, ale ve skutečnosti pouze potvrzuje správnost našich představ o pravděpodobnosti. Dále prozkoumáme několik užitečných myšlenek, jako je nezávislost náhodných veličin (což je zobecnění nezávislosti *jevů* z prvního dílu) nebo rozptyl.

Zákon velkých čísel

Zákony jsou jako párky, lepší nevědět, jak vznikají.

John Godfrey Saxe

Vraťme se opět k našemu oblíbenému příkladu s házením mincí. Předpokládejme, že si n -krát hodíme mincí a spočítáme, kolik nám padlo panen. Tomu odpovídá monstrózní pravděpodobnostní prostor obsahující 2^n elementárních jevů – každý odpovídá jedné z možných posloupností hodnot. V minulém díle jsme si ukázali, jak takoveto pokusy popisovat pomocí náhodných veličin. Pro hod s pořadovým číslem i můžeme vytvořit náhodnou proměnnou A_i , která bude říkat, zda v i -tém hodu padla panna (v tomto případě bude rovna jedné), či nikoli (bude rovna nule). Takovým proměnným také říkáme indikátory, neboť indikují, zda nastal daný jev (padla panna). Střední hodnota této proměnné $E(A_i)$ bude rovna $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$. Použitím linearity střední hodnoty dostáváme, že pro střední počet padlých panen platí $E(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = E(A_1) + E(A_2) + \dots + E(A_n) = n/2$.

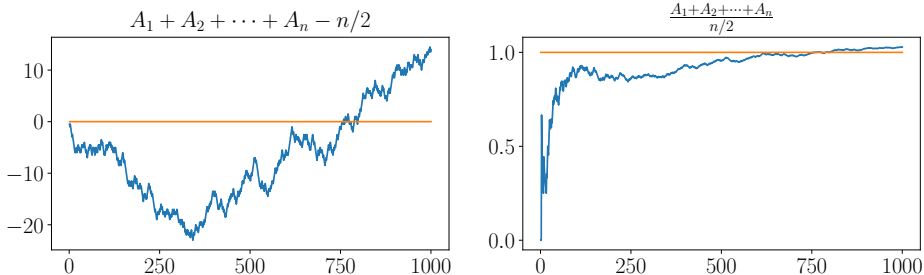
Všimni si, že ačkoli v předchozím příkladu byly jednotlivé hody mincí nezávislé, tak to pro použití linearity střední hodnoty nebylo nutné, protože platí i obecně. Můžeme třeba uvážit jinou náhodnou veličinu B odpovídající tomu, že si nejprve náhodně s poloviční pravděpodobností vybereme mezi mincí, která má na obou stranách pannu, a mincí, která má na obou stranách orla, a poté si touto mincí n -krát hodíme. Střední hodnota B je $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot n = n/2$ (mohou nastat jen dvě možnosti). Zároveň ale můžeme totéž spočítat pomocí indikátorů: Zavedeme-li B_i jako indikátor toho, zda je i -té slovo na papíře „panna“, bude opět platit, že B_i je rovno jedné s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, a podle stejného vzorečku jako výše dostaneme, že $E(B) = E(B_1) + E(B_2) + \dots + E(B_n) = n/2$. Tentokrát už ale o nezávislosti mluvit nemůžeme: Nastane-li jev $B_1 = 1$, víme, že už jistě nastanou i všechny ostatní jevy $B_i = 1$.

Veličiny A a B nás budou provázet po zbytek dílu a budeme se držet jejich značení (náhodné veličiny jinak obvykle značíme písmeny z konce abecedy).

První příklad s veličinou A jsme dokonce použili v prvním díle jako motivaci k zavedení pravděpodobnosti: hodíme-li si n -krát férovou mincí, očekáváme, že přibližně v půlce případů dostaneme pannu. První a druhý příklad se v tomto ohledu zásadně liší. Ačkoli v druhém příkladu také platí $E(B) = n/2$, nemá smysl očekávat, že budou hodnoty B blízko průměru, poněvadž veličina nabývá pouze hodnot 0 a n .

Co přesně tedy máme na mysli, když v prvním případě očekáváme přibližně $n/2$ panen? Na následujících dvou obrázcích vidíš výsledek pokusu, kdy jsme na počítači postupně generovali 1000 náhodných veličin, přičemž každá nabývá hodnoty 0, nebo 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. To odpovídá házení mincí a sledování počtu panen, takže dále budeme o pokusu mluvit tak, jako kdybychom si doopravdy hodili tisíckrát mincí.

Na prvním obrázku jsme postupně vyznačili to, jak se počet padlých panen liší od střední hodnoty, neboli pro n od 1 do 1000 jsme vyznačili, kolik je $A_1 + A_2 + \dots + A_n - n/2$. Na druhém obrázku je vyznačen podíl $\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n/2}$. Oba obrázky odpovídají stejnému pokusu, takže například platí, že hodnota nalevo je větší než nula právě tehdy, když je hodnota napravo větší než jedna.



Když se podíváš na první obrázek, vidíš, že celkový počet panen nebyl 500 (doopravdy to bylo 514). Dá se spočítat, že pravděpodobnost, že padne přesně 500 panen, se pohybuje kolem pouhých 2,5 %. Graf na levém obrázku ani nevypadá, že by se snažil zůstat v okolí nuly. Naopak se zdá, že se rozdíl počtů panen a orlů s rostoucím počtem hodů postupně zvětšuje.

Tento fakt není tak překvapivý, pokud se smíříme s tím, že mince „nemá paměť“ – to je to, co myslíme, když říkáme, že jednotlivé hody jsou nezávislé. V prvních šestnácti hodech padly jen dvě panny¹ a graf se odchýlil od nuly k hodnotě -7 . To ale vůbec neznamená, že by se v dalších hodech mince musela snažit, aby padalo více panen (a tím se graf vrátil k nule). Panna a orel jsou v každém dalším hodu stejně pravděpodobní, a to nezávisle na historii.

Lidé si to ovšem občas neuvědomují, čímž se dopouštějí tzv. gamblerova omylu. V roce 1913 třeba v jistém kasinu v Monte Carlu hráči prohráli rekordní částky, když v tamní ruletě dvacetšestkrát po sobě skončila kulička na černém políčku. Hráči samozřejmě sázeli na to, že v příštím kole už přece kulička musí padnout na červené políčko. Pozorování, že málokdy padne tolik černých po sobě, je sice správné; když ale tímto nepravděpodobným jevem podmíníme (tedy když už víme, že nastal), je v dalším roztočení rulety černá stejně pravděpodobná jako červená. To, že jsme v minulosti měli smůlu, nás bohužel nijak nechrání před dalším neštěstím.²

Následující úloha ukazuje, že ačkoli je po $2n$ hodech nejpravděpodobnější počet padlých panen roven n , pravděpodobnost tohoto jevu se postupně zmenšuje (a jak jsme si řekli, pro $n = 1000$ je to jen 2,5 %).

Úloha 1. Vzpomeň si, že pravděpodobnost, že v n hodech padne přesně k panen, je $\binom{n}{k} \cdot 2^{-n}$.

- (1) Dokaž, že pro sudé n a nezáporné $k \leq n$ platí $\binom{n}{n/2} \geq \binom{n}{k}$, neboli nejpravděpodobnější počet padlých panen je $n/2$.
- (2) Dokaž, že se s rostoucím $2n$ zmenšuje pravděpodobnost, že při $2n$ hodech padne přesně polovina panen.

Pohlédni však nyní na druhý obrázek, kde udáváme podíl počtu padlých panen a střední hodnoty $n/2$. Ačkoli se tento graf chová pro prvních přibližně 30 hodů docela nevyzpytatelně, poměr se následně rychle přiblíží hodnotě jedna, přesně jak napovídá intuice.

Rozdílné chování obrázků ukazuje i následující úloha. První podúloha se týká obrázku nalevo a její výsledek je přímým důsledkem toho, že mince nemá paměť. Druhá podúloha se týká obrázku napravo a naznačuje, že graf napravo má tendenci vracet se k hodnotě 1, jestliže se od ní vychýlil (prvních několik hodů je totiž stále méně a méně důležitých).

Úloha 2. Předpokládejme, že v prvních deseti hodech padly samé panny. Pro $n \geq 10$ označme $R_n = 10 + A_{11} + \dots + A_n - n/2$, tedy rozdíl počtu panen a střední hodnoty po n hodech. Obdobně podíl po n hodech označme $P_n = \frac{10 + A_{11} + \dots + A_n}{n/2}$.

- (1) Spočítej, že pro všechna $n \geq 10$ platí $E(R_n) = E(R_{10}) = 5$.

¹Opravdu! Samotné nás to překvapilo.

²Jak by Ti Job jistě ochotně potvrdil.

(2) Spočítej, kolik je $E(P_n)$, a ověř, že pro $m \geq n \geq 10$ je $E(P_m) \leq E(P_n)$.

S podobným jevem se mimochodem můžeš setkat i za jiných okolností a obvykle se označuje jako regrese k průměru. Nad jeho jinými variantami se můžeš zamyslet v následující úloze.

Úloha 3. (na zamyšlení, nemusíš nic počítat)

- (1) Jistá soutěž probíhá ve dvou soutěžních dnech, přičemž každý den účastníci řeší tři úlohy. Předpokládejme, že každý soutěžící má pro každou úlohu nezávisle na ostatních poloviční pravděpodobnost, že ji vyřeší. Rozmysli si, že ti, kteří první den vyřešili alespoň dvě úlohy, budou po druhém dni pravděpodobně umístění hůře než po tom prvním.
- (2) Jistý učitel zpozoroval, že pozitivní motivace nefunguje tak dobře jako ta negativní. Pokud se žákovi povedl test výjimečně dobře, učitel jej pochválil. I přesto se příští test obvykle nepovedl tak dobře. Pokud se test žákovi vůbec nepovedl, učitel ho seřval. Příští test se žákovi obvykle povedl lépe. Máš pro to nějaké jiné vysvětlení?
- (3) Bylo vyzpozorováno, že v roce 2017 se v jistých zatačkách odehrálo hodně bouraček. Do zataček byly nainstalovány bezpečnostní kamery a v příštím roce v těchto zatačkách již k tolika haváriím nedošlo. Znamená to nutně, že bezpečnostní kamery zde přispěly k bezpečnějšímu provozu?

Vraťme se k obrázku podílu napravo. Fakt, že se graf na obrázku (s velkou pravděpodobností) drží poblíž hodnoty jedna, se nazývá **zákon velkých čísel**. Tento zákon doopravdy neplatí jen pro férové mince, ale třeba i pro házení falešnou mincí nebo kostkou – a obecně pro nezávislá opakování jakéhokoliv pokusu. My si dokážeme jeho jistou verzi, ale nejprve si povězme, proč je tento fakt vůbec zajímavý.

Zákon velkých čísel potvrzuje naši intuici, že se pravděpodobnost chová předvídatelně, pokud daný pokus opakujeme mnohokrát (jestliže bychom si hodili mincí jen třikrát, nic zajímavého bychom asi nevypozorovali). Ve druhém díle jsme si například jako součást naší představy o tom, co je střední hodnota, pověděli, že se vyplatí hrát hry, ve kterých je střední hodnota výdělku kladná. Ne vždy je to ale tak jednoduché – hrál(a) bys třeba hru, ve které vyhraješ 6 000 Kč s pravděpodobností 90 % a prohraješ 50 000 Kč s pravděpodobností 10 %? I když je střední hodnota výdělku kladná, zdá se zbytečné riskovat své týdenní kapesné kvůli almužně 6 000 Kč. Úplně jiná situace je, pokud bys měl(a) odehrát pět tisíc her, přičemž v každé vyhraješ 1,2 Kč s pravděpodobností 90 % a prohraješ 10 Kč s pravděpodobností 10 %. Pro dostatečné množství pokusů už se prostě můžeme spolehnout na to, že vyhrajeme přibližně 90 % her a vyděláme si. To proto, že platí zákon velkých čísel.

Rozmysleme si, jak formulovat zákon velkých čísel o něco přesněji než „graf na obrázku bude blízko jedné“. Zabýváme se náhodnou veličinou $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ a speciálně nás zajímá poměr $\frac{A}{n/2}$. Pravděpodobnost, že bude tento podíl přesně 1, je mizivá, ale můžeme si zvolit interval, řekněme od 0,9 do 1,1, a pak se ptát, jaká je pravděpodobnost jevu $0,9 < \frac{A}{n/2} < 1,1$. Jestliže dokážeme, že pravděpodobnost tohoto jevu je velká, řekněme alespoň 90 %, můžeme si gratulovat.

Problém je, že tyto podmínky obecně neplatí. Třeba pro $n = 5$ může veličina $\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_5}{5/2}$ nabývat hodnot $0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$ a $\frac{10}{5}$. Jev $0,9 < \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_5}{5/2} < 1,1$ tak nenastane nikdy! Buď je tento podíl nejvýše 0,8, nebo alespoň 1,2. Problém je v tom, že zákon velkých čísel je zákon pro velká čísla, ne pro všechna čísla. Můžeme tak doufat, že podmínky budou s velkou pravděpodobností splněny, pokud si mincí hodíme aspoň, řekněme, tisíckrát, ale je mylné očekávat, že poměr $\frac{A}{n/2}$ bude s velkou pravděpodobností blízko jedné i pro malá n .

Později si opravdu dokážeme, že pro alespoň tisíc pokusů bude poměr $\frac{A}{n/2}$ v intervalu mezi 0,9 a 1,1 s pravděpodobností alespoň 90 %. Důkaz bude obecný a sám (sama) si pak budeš moci rozmyslet, že když zvětšíme počet pokusů, můžeme třeba zúžit interval nebo zvýšit pravděpodobnost, že $\frac{A}{n/2}$ bude ležet po n pokusech v daném intervalu.

Jak vidíš, už jenom formulace principu, který vidíme na obrázku napravo, je nesnadný úkol,

proto Ti doporučujeme si ještě jednou přečíst poslední úsek této kapitoly.

Markovova nerovnost

Abychom nějakou verzi zákona velkých čísel dokázali, musíme si nejprve ukázat pravděpodobnostní nerovnost, kterou k důkazu použijeme. Zatím jedinou pravděpodobnostní nerovností, kterou známe, je fakt, že pravděpodobnost sjednocení jevů je nejvyšší součet jednotlivých pravděpodobností. S touto si již ale nyní nevystačíme.

Ukážeme si nerovnost, která říká, že pokud nějaká náhodná veličina nabývá nezáporných hodnot, tak jen s malou pravděpodobností může nabývat hodnot podstatně větších než její střední hodnota. To zní docela složitě, ale myšlenka je jednoduchá. Představ si, že na dlouhém drátu napnutém mezi dvěma sloupy sedí hejno špačků. Řekněme, že průměrná vzdálenost špačka od levého sloupu je 10 metrů. Kolik špačků může sedět ve vzdálenosti aspoň 20 metrů? Nejvýše polovina! Pokud by totiž více než polovina špačků seděla ve vzdálenosti alespoň 20 metrů, jen díky této polovině by průměrná vzdálenost byla větší než 10 metrů. Lepší odhad než jedna polovina však dostat nemůžeme, neboť se může stát, že polovina špačků sedí ve vzdálenosti 0 od levého sloupu, zatímco druhá polovina ve vzdálenosti 20 metrů. Podobnou úvahu můžeme udělat i pro náhodné veličiny. Získaná nerovnost se jmenuje podle Andreje Markova³.

Tvrzení. (Markovova nerovnost) *Nechť X je náhodná veličina definovaná na konečném pravděpodobnostním prostoru Ω nabývajících pouze nezáporných hodnot. Potom pro libovolné $c > 0$ platí*

$$P(X \geq c \cdot E(X)) \leq \frac{1}{c}.$$

Tedy stejně jako maximálně polovina špačků může sedět dále než dvojnásobek průměrné vzdálenosti, může nezáporná náhodná veličina s nanejvýš třetinovou pravděpodobností nabývat hodnot větších než trojnásobek střední hodnoty. Povšimni si, že se v nerovnosti vyskytuje jednou „ $\geq$ “ a jednou „ $\leq$ “. Nejprve se „ $\geq$ “ vyskytuje uvnitř pravděpodobnosti, kde definuje jev „ X nabývá velké hodnoty“. Následně „ $\leq$ “ říká, že pravděpodobnost tohoto jevu je malá.

Důkaz. Pokud by tomu tak nebylo, měl by jev $X \geq cE(X)$ pravděpodobnost ostře větší než $\frac{1}{c}$. Jenže pokud nezáporná náhodná veličina nabývá hodnoty alespoň $cE(X)$ s pravděpodobností vyšší než $\frac{1}{c}$, musí už její střední hodnota $E(X)$ být vyšší než $cE(X) \cdot \frac{1}{c} = E(X)$, což je nesmysl.

Úloha 4. Rozmysli si:

- (1) Kdy v Markovově nerovnosti nastává rovnost?
- (2) Najdi příklad náhodné veličiny nabývajících záporných hodnot, pro kterou nerovnost neplatí.

Úloha 5. Mediánem $m(X)$ náhodné veličiny X myslíme libovolné číslo, pro které platí, že $P(X \geq m(X)) \geq \frac{1}{2}$ a $P(X \leq m(X)) \geq \frac{1}{2}$. Například pro počet panen při jednom hodu mincí je mediánem libovolné číslo od 0 do 1 a pro hod férovou devítistěnnou kostkou (nabývá hodnot od jedné do devíti) je mediánem pouze číslo 5.

- (1) Rozmysli si, že pro každou veličinu X existuje vždy aspoň jeden medián.
- (2) Dokaz, že pro libovolný medián platí $m(X) \leq 2E(X)$.

Úloha 6. Ve Wonkově továrně na čokoládu je na výběr ze 320 příchutí čokolády. Při procházce továrnou si každé z pěti dětí smělo ochutnat 160 příchutí. Protože bylo na spěch, každé dítě si

³Andrej Markov (1878–) je ruský hokejista, který v roce 2018 dopomohl svému týmu Ak Bars Kazaň k vítězství Gagarinova poháru. Jeho jmenovec Andrej Markov (1856–1922), žák P. Čebyševa, je v teorii pravděpodobnosti znám zejména díky tzv. Markovovým řetězcům, pomocí kterých se modelují nejrůznější pravděpodobnostní procesy.

vybralo náhodných 160 příchutí nezávisle na ostatních dětech. Dokaž, že příchutí, které si žádné dítě nevybralo, je alespoň dvacet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

Vraťme se nyní k zákonu velkých čísel. Zajímá nás náhodná veličina $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, kde každé A_i odpovídá jednomu hodu mincí. Speciálně bychom rádi odhadli pravděpodobnost jevu $\frac{A}{n/2} \geq 1,1$, který také můžeme zapsat jako $A \geq 0,55n$. Díky symetrii panen a orlů je pravděpodobnost, že $A \leq 0,45n$, stejná, takže stačí spočítat, že pravděpodobnost jevu $A \geq 0,55n$ je malá. Pravděpodobnost, že A neleží v intervalu mezi $0,45n$ a $0,55n$, pak bude dvojnásobná (a tedy pořád malá), neboť se jedná o disjunktní jevy.

Pravděpodobnost jevu $A \geq 0,55n$ odhadneme pomocí Markovovy nerovnosti. Máme $E(A) = \frac{n}{2}$, takže Markovova nerovnost říká, že

$$P(A \geq 0,55n) = P(A \geq 1,1 \cdot E(A)) \leq \frac{1}{1,1} \doteq 0,9.$$

Pravděpodobnost, že A neleží v intervalu mezi $0,45n$ a $0,55n$, je tak nejvýše $2 \cdot \frac{1}{1,1} \doteq 1,8$. Ouha, aplikace Markovovy nerovnosti tedy skončila naprostým fiaskem. Chtěli jsme dokázat, že pravděpodobnost tohoto jevu malá, ale pouze jsme zjistili, že je menší než 1,8. Kde se stala chyba?

Problém je v tom, že kdybychom takto jednoduše pomocí Markovovy nerovnosti dokázali něco pro veličinu A odpovídající opakovanému házení mincí, dokázali bychom to samé i pro veličinu B , která nabývá hodnoty 0 a n se stejnou pravděpodobností. Pro ni ale nic takového neplatí – průměrná hodnota je $n/2$, ale pravděpodobnost, že při n hodech získáme hodnotu mezi $0,45n$ a $0,55n$, je nulová. V následující kapitole se proto zamyslíme nad nezávislostí, protože důležitý rozdíl mezi A a B je právě ten, že jednotlivé hody mincí, pomocí kterých definujeme A , jsou nezávislé. Následně si pro náhodné veličiny zavedeme další parametr, tzv. rozptyl, který už veličiny A a B spolehlivě rozliší.

Nezávislost náhodných veličin

Už v prvním díle jsme si pověděli o nezávislosti jevů. Protože ale nyní pracujeme spíše s veličinami než s konkrétními jevy, hodí se rozšířit si i naši definici nezávislosti. Co znamená, že na sobě dvě veličiny X, Y – tedy dva pokusy – nezávisí? Intuitivně by to mělo znamenat, že známe-li výsledek jednoho pokusu, neovlivní to možné výsledky toho druhého. Řečeno jazykem podmíněné pravděpodobnosti, pro libovolné x a y by mělo platit $P(Y = y | X = x) = P(Y = y)$. Z prvního dílu víme, že tento výraz můžeme přepsat jako $P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$, tedy jevy $X = x$ a $Y = y$ jsou nezávislé. Přesně tak se definuje nezávislost veličin.

Definice. Mějme pravděpodobnostní prostor Ω a na něm dvě náhodné veličiny X a Y takové, že X nabývá hodnot $x_1, x_2, \dots, x_m$ a Y nabývá hodnot $y_1, y_2, \dots, y_n$. Řekneme, že X a Y jsou nezávislé, pokud jsou pro všechna $1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$ jevy $X = x_i$ a $Y = y_j$ nezávislé.

Příkladem je třeba hod dvěma férovými kostkami. V takovém případě pracujeme s pravděpodobnostním prostorem obsahujícím 36 možných výsledků, přičemž každý nastane se stejnou pravděpodobností. Můžeme se nyní ptát na to, kolik ok padlo na první a kolik na druhé kostce, a zavést k tomuto účelu náhodné veličiny X a Y .

Spočítáme, že pro libovolné $1 \leq i \leq 6$ platí

$$P(X = i) = P(X = i \cap Y = 1) + \dots + P(X = i \cap Y = 6) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6},$$

neboť to, že nastal jev $X = i$, odpovídá šestici elementárních jevů. Stejně tak pro libovolné $1 \leq j \leq 6$ dostaneme $P(Y = j) = \frac{1}{6}$. Pro libovolné i a j proto platí $P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{36}$.

Zároveň $P(X = i) \cdot P(Y = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Všechny dvojice jevů $X = i$ a $Y = j$ jsou tedy nezávislé, a můžeme tak směle tvrdit, že i náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé.

Úloha 7. Na stole leží dvě modré, jedna červená a jedna zelená propiska. Vybereme si dvě náhodně. Nechť X je náhodná veličina značící počet vybraných modrých propisek a Y značí počet vybraných červených propisek. Jsou X a Y nezávislé?

Řešení. Pravděpodobnostní prostor odpovídá šesti možným výsledkům. Dáme-li si tu práci, můžeme si nakreslit tabulku a vyplnit do ní pravděpodobnosti všech jevů $X = i \cap Y = j$.

Y	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0
	0	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
		0	1	2
		X		

Pravděpodobnosti jevů $X = i$ dostaneme jako součty po sloupcích (vyjde $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$) a pravděpodobnosti $Y = j$ jako součty po řádcích (vyjde $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$). Aby byly dané veličiny nezávislé, musela by hodnota na každém políčku být rovna součinu součtu odpovídajícího řádku a součtu odpovídajícího sloupce. To ale neplatí, třeba pro jev $X = 0 \cap Y = 0$ máme $0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

Ačkoli nám trvalo tři díly seriálu, než jsme si ukázali definici nezávislých náhodných veličin, je to jeden z konceptů, který často bereme jako samozřejmý. Když si hodíme kostkou, zatímco kamarád si lízne kartu ze zamíchaného balíčku, výsledky na sobě samozřejmě „nezávisí“. Abychom tento koncept mohli pořádně popsat, zavedli jsme si postupně pravděpodobnostní prostory, které obsahují všechny možné výsledky pokusu (to jsou elementární jevy, v tomto případě dvojice stěna kostky a karta). Následně jsme definovali nezávislost, ale jen pro jevy. Poté jsme zavedli náhodné veličiny, které odpovídají jednotlivým pokusům, a teprve nyní jsme všechno spojili dohromady. Plodem našeho snažení je to, že nyní naprosto přesně víme, co to znamená, že jsou dané pokusy nezávislé, a můžeme proto s nimi snáze pracovat. Pro všechny nezávislé veličiny kupříkladu platí, že součin jejich středních hodnot je střední hodnotou jejich součinu.

Tvrzení. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom platí, že $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.*

Než se pustíme do důkazu, ukažme si použití na následujícím příkladu. Uvažme pravděpodobnostní prostor o velikosti 24 odpovídající denním hodinám a veličiny X, Y , kde X pro každý interval o délce jedné hodiny říká, kolik vlaků včera projelo jihlavským nádražím během tohoto intervalu. Dále Y říká, kolik průměrné vagonů měly tyto vlaky. Pokud tedy mezi půlnocí a jednou hodinou ranní projel jeden vlak se dvěma a jeden vlak se čtyřmi vagonů, bude pro odpovídající elementární jev našeho prostoru nabývat X hodnoty 2 a Y hodnoty 3.

Veličina XY říká, kolik vagonů projelo nádražím v daný časový interval. Víme-li, že $E(X) = 20$ a $E(Y) = 3$, dává smysl, že $E(XY) = 60$. To ale platí jen za předpokladu, že jsou veličiny X a Y nezávislé!

Jestliže každou z dvanácti nočních hodin projede stanicí jeden vlak s jedním vagonem, zatímco každou denní hodinu to bude 39 vlaků po pěti vgonech, bude platit $E(X) = 20$ a $E(Y) = 3$. Jenže průměrný počet vagonů bude $\frac{12 \cdot 1 + 12 \cdot 39 \cdot 5}{24} = 98$, což je mnohem více než 60. Rozmysli si, že v tomto případě nejsou X a Y nezávislé.

Důkaz. Nazvěme $H(X)$ a $H(Y)$ obory hodnot X a Y . Na jednu stranu pro veličinu $X \cdot Y$ platí

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x \in H(X)} \sum_{y \in H(Y)} P(X = x \cap Y = y) xy,$$

protože vždy s pravděpodobností $P(X = x \cap Y = y)$ bude $X = x$ a $Y = y$, pročež $XY = xy$. Na druhou stranu zatneme zuby a uvědomíme si, že

$$\begin{aligned} E(X)E(Y) &= \left(\sum_{x \in H(X)} P(X = x)x \right) \cdot \left(\sum_{y \in H(Y)} P(Y = y)y \right) = \\ &= \sum_{x \in H(X)} \sum_{y \in H(Y)} P(X = x)x \cdot P(Y = y)y, \end{aligned}$$

kde jsme roznásobili dvě závorky. Tyto dva výrazy jsou ale stejné, protože z nezávislosti máme $P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ pro všechna x a y .

Úloha 8. Kuba dluží Honzovi obnos, jehož hodnotu již oba dávno zapomněli, a tak se rozhodli, že mu ho Kuba splatí následujícím způsobem.

- (1) Kuba si dvakrát hodí kostkou. Počet ok při prvním hodu postupně určí jednu z šesti hodnot 1, 2, 5, 10, 20, 50. Počet ok při druhém hodu pak určí, kolik mincí této hodnoty dá Kuba Honzovi. Jaká je střední hodnota zaplacené částky?
- (2) Honzu napadlo, že aby se zbytečně neošoupala kostka, bude stačit, když si Kuba hodí jen jednou, a tato hodnota určí částku i počet mincí (tři oka znamenají třikrát pět korun). Jaká je střední hodnota teď?

Úloha 9.

- (1) Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé, pokud pro všechna $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí, že n -tice jevů $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ je nezávislá. Ověř, že pro nezávislé veličiny platí $E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_n)$.
- (2) David se rozhodl podvádět v jisté hře, ve které se desetkrát hodí kostkou (jednotlivé hody jsou nezávislé) a následně se spočte a) součet b) součin jednotlivých počtů ok. Součet ok na protilehlých stranách kostky je vždy sedm. David se naučil házet kostkou tak, že si vždy může vybrat dvojici protějších stěn a hodit tak, že tyto stěny zaručeně nepadnou (ostatní stěny padnou s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Jak má házet kostkou, aby maximalizoval střední hodnotu a) součtu b) součinu ok?

Rozptyl

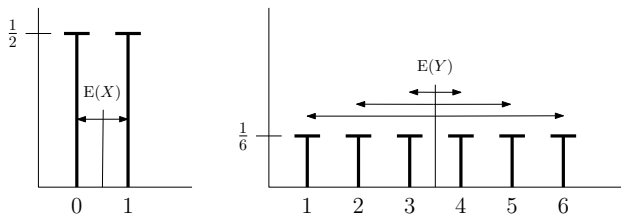
Tragické fiasko s aplikací Markovovy nerovnosti na veličinu A odpovídající hodu n mincemi ukázalo, že znát střední hodnotu dané veličiny nestačí k tomu, abychom rozlišili A od veličiny B , která nabývá hodnoty 0 a n se stejnou pravděpodobností. V této kapitole si povíme o **rozptylu**, což je parametr náhodné veličiny, který nám říká, jak moc jsou hodnoty dané veličiny vzdálené od průměru, a umožní nám tak tyto veličiny rozlišit.

Definice. Rozptylem náhodné veličiny X myslíme střední hodnotu veličiny $(X - E(X))^2$.

Rozptyl se značí $\text{Var}(X)$ (značení pochází z anglického *variance*), takže můžeme psát $\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$. Ačkoli tento výraz vypadá kuriózně, dává dobrý smysl. Předně, $(X - E(X))^2$ je zase náhodná veličina. Známe-li střední hodnotu původní veličiny X (na obrázku vyznačená svislou čarou), pro výpočet rozptylu si nejdříve představíme, že od všech možných hodnot X odečteme $E(X)$ (tím posuneme celý histogram o $E(X)$). Dostaneme veličinu $X - E(X)$, jejíž střední hodnota je nula. Nakonec možné hodnoty této veličiny umocníme na druhou a spočítáme střední hodnotu.

Číslo, které dostaneme, nám v jistém smyslu říká, jaká je průměrná vzdálenost hodnot veličiny X od její střední hodnoty. Nicméně se nejedná o průměr vzdáleností (tomu by odpovídala veličina $|X - E(X)|$), ale o průměr druhých mocnin vzdáleností. Druhá mocnina zařídí, že může-li veličina

nabývat hodnot hodně vzdálených od průměru, bude její rozptyl obrovský. Proto platí, že rozptyl pro hod mincí vyjde jen $\frac{1}{2} \cdot (0,5^2 + 0,5^2) = \frac{1}{4}$, protože výsledek je vždy blízko průměru. Naproti tomu rozptyl hodu kostkou je $\frac{1}{6}(2,5^2 + 1,5^2 + 0,5^2 + 0,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2) = \frac{35}{12}$, neboť výsledky mohou být od průměru dále.



Naším cílem je nyní spočítat rozptyly dvou veličin A a B ze začátku tohoto dílu. Začneme s B . Abychom se při výpočtu rozptylu moc nenadřeli, rozmysli si nejprve dvě obecné vlastnosti rozptylu.

Úloha 10. Dokaž, že pro libovolná čísla a a b platí $\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$ a $\text{Var}(bX) = b^2 \text{Var}(X)$.

Jinými slovy, přičtením jedničky ke všem hodnotám náhodné veličiny se její rozptyl nezmění, a pokud hodnoty vynásobíme deseti, rozptyl se zvětší stokrát.

Z druhé vlastnosti plyne, že rozptyl B je n^2 -násobek rozptylu veličiny indikující, zda v jednom hodu mincí padla panna. Už jsme spočítali, že rozptyl této veličiny je $\frac{1}{4}$; dostáváme $\text{Var}(B) = \frac{1}{4} \cdot n^2$.

Následující tvrzení ukazuje jiný způsob, jak počítat rozptyl.

Tvrzení. Pro náhodnou veličinu X platí $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Důkaz. Po rozepsání rozptylu z definice a roznásobení dostáváme rovnost

$$\text{Var}(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2).$$

Na ni můžeme aplikovat linearitu střední hodnoty:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X)^2).$$

Jakkoli je to na první pohled zvláštní, i $2XE(X)$ a $E(X)^2$ jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru jako X : první z nich přiřadí elementárnímu jevu ω číslo $2E(X) \cdot X(\omega)$, zatímco druhá prostě přiřadí všem jevům stejné číslo $E(X)^2$.

Protože $2E(X)$ je číslo a ne veličina, platí $E(2XE(X)) = E(2E(X) \cdot X) = 2E(X) \cdot E(X) = 2E(X)^2$, a dále $E(E(X)^2) = E(X)^2$. Dohromady tedy dostáváme

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

Úloha 11. Spočítej $\text{Var}(B)$ pomocí předchozího tvrzení.

Úloha 12. Dokaž, že pro libovolnou náhodnou veličinu X platí $E(X^2) \geq E(X)^2$. Kdy v této nerovnosti nastává rovnost?

Úloha 13. Mějme náhodnou veličinu X , která nabývá pouze hodnot z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Pro jakou největší hodnotu n je každá taková X jednoznačně určena (neboli pravděpodobnost každého jevu $X = i$ je pevně dána):

- (1) svojí střední hodnotou?
- (2) svojí střední hodnotou a rozptylem?
- (3) svým rozptylem?

Pokusme se nyní spočítat rozptyl veličiny A . Na první pohled vůbec není jasné, jak na to. Pro počítání střední hodnoty přijde vhod její linearita, tedy fakt, že střední hodnota součtu je součet středních hodnot. Platí něco takového i pro rozptyl? Obecně ne, což si můžeš rozmyslet v následující úloze.

Úloha 14. Uvažme jeden hod férovou mincí (odpovídající pravděpodobnostní prostor má dva prvky) a veličinu P indikující, zda padla panna (tedy je rovná jedné, padla-li panna, a jinak nule), a veličinu O indikující, zda padl orel. Spočítej, že $\text{Var}(O + O) > \text{Var}(O) + \text{Var}(O)$ a $\text{Var}(O + P) < \text{Var}(O) + \text{Var}(P)$.

Klíčovou vlastností rozptylu je nicméně to, že pro nezávislé veličiny je součet jejich rozptylů opravdu rozptylem jejich součtu. To plyne přímo z toho, že pro nezávislé veličiny je $E(XY) = E(X)E(Y)$:

Tvrzení. Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, platí $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Důkaz. Rozepišme výraz $\text{Var}(X + Y)$ s pomocí linearity střední hodnoty.

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 = \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2).\end{aligned}$$

Pro nezávislé náhodné veličiny platí $E(XY) = E(X)E(Y)$, takže se tyto členy odečtou a zbude nám rovnost $\text{Var}(X + Y) = E(X^2) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Úloha 15. Zobecní předchozí tvrzení pro libovolný počet náhodných veličin, tedy dokaž, že máme-li náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ takové, že každá dvojice X_i, X_j ($i \neq j$) je nezávislá, pak platí $\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$.

Spočítat rozptyl náhodné veličiny A je nyní snadné. Máme

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(A_1) + \text{Var}(A_2) + \dots + \text{Var}(A_n) = n \cdot \text{Var}(A_1) = \frac{1}{4}n.$$

Porovnáním s $\text{Var}(B) = \frac{1}{4}n^2$ vidíme, že $\text{Var}(A)$ je pro velké n mnohem menší než $\text{Var}(B)$. To je přesně výsledek, který jsme čekali! Rozptyl veličiny B je obrovský, protože hodnoty, kterých B nabývá, jsou vždy daleko od průměru.

Jdeme do finále. Markovova nerovnost, kterou jsme již potkali, nám totiž překvapivě často o náhodné veličině X řekne více, pokud ji aplikujeme nikoliv přímo na X , nýbrž na veličinu $(X - E(X))^2$, která měří „vzdálenosti hodnot X od průměru“. Dosazení tohoto výrazu do Markovovy nerovnosti je tak užitečným trikem, že výsledná nerovnost má své vlastní jméno po P. Čebyševovi⁴.

Tvrzení. (Čebyševova nerovnost) Pro libovolnou náhodnou veličinu X a $a > 0$ platí

$$P\left((X - E(X))^2 \geq a^2 \text{Var}(X)\right) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $(X - E(X))^2$ nabývá pouze nezáporných hodnot a $\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$, můžeme aplikovat Markovovu nerovnost na veličinu $(X - E(X))^2$ a a^2 , čímž dostaneme dokazovanou nerovnost.

⁴Ruský matematik Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821–1894) je kromě své nerovnosti znám také díky svým příspěvkům k teorii čísel: dokázal kupříkladu tzv. Bertrandův postulát, který tvrdí, že pro libovolné přirozené n se mezi n a $2n$ nachází alespoň jedno prvočíslo. V cizojazyčné literatuře vystupuje pod přezdívkami Chebyshev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff či Chebychev.

Ekvivalentně můžeme psát $P(|X - E(X)| \geq a\sqrt{\text{Var}(X)}) \leq \frac{1}{a^2}$. Odmocnina z rozptylu se nazývá **směrodatná odchylka** a obvykle se značí σ .⁵ Stejně jako rozptyl říká, jak moc jsou hodnoty veličiny vzdáleny od průměru. Dost možná ses s ní již setkal(a) ve fyzice. Pokud pětkrát změříš hustotu neznámého předmětu, pokaždé Ti vyjde trochu jiný výsledek kvůli různým nepřesnostem – měření proto můžeme popisovat náhodnou veličinou. Směrodatnou odchylku této veličiny pak obvykle odhadneš z naměřených dat pomocí jistého vzorečku z fyzikálních tabulek. Odchylka je představitelnější než rozptyl: pokud náhodnou veličinu X měříš v metrech, tak rozptyl má jednotku metry čtvereční, zatímco směrodatná odchylka je opět v metrech.

Podobně jako Markovova nerovnost tvrdí, že náhodná veličina nabývá hodnot vyšších než a -násobek střední hodnoty s pravděpodobností nejvýše $1/a$, Čebyševova nerovnost prohlašuje, že pravděpodobnost, že náhodná veličina je vzdálena od své střední hodnoty o a -násobek směrodatné odchylky, je nejvýše $1/a^2$. Proto směrodatná odchylka dává představu, jak moc se jednotlivá měření obvykle liší od průměru (tedy střední hodnoty).

Úloha 16. Dokaž, že pro libovolnou náhodnou veličinu X nabývajících nezáporných hodnot platí $P(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{E(X)^2}$.

Jako velké finále se nyní naposled vraťme k veličině A popisující hod n mincemi. Máme $E(A) = \frac{n}{2}$ a $\text{Var}(A) = n/4$. Čebyševova nerovnost tak po odmocnění podmínky dává

$$P(|A - E(A)| \geq a\sqrt{n/4}) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Dosadíme-li z estetických důvodů $a = 2c\sqrt{n}$, dostáváme

$$P(|A - E(A)| \geq cn) \leq \frac{1}{4c^2n}.$$

Jestliže za c nyní dosadíme 0,05 a zvolíme $n = 1000$, dostaneme, že počet panen se bude od průměru lišit o více než $0,05n = 0,1 \cdot \frac{n}{2}$ s pravděpodobností nejvýše $\frac{1}{4 \cdot 0,05^2 \cdot 1000} = \frac{400}{4 \cdot 1000} = \frac{1}{10}$, přesně jak jsme slibovali v první kapitole. S rostoucím n bude tato pravděpodobnost dále klesat. Můžeme si vybírat různá c a zkoušet různou přesnost, pro každé c nicméně výraz $\frac{1}{4c^2n}$ bude klesat a nakonec bude zanedbatelně malý.

Postup, který jsme aplikovali pro házení férovou mincí, samozřejmě funguje i pro házení falešnou mincí, kostkou, měření výšky lidí, které potkáš na ulici, ... Vždy platí, že se zvětšujícím se počtem pokusů se pravděpodobnost chová předvídatelněji a ukázněněji. S pomocí nově nabytých poznatků dokonce můžeme zformulovat obecnější verzi našeho tvrzení:

Tvrzení. (Verze zákona velkých čísel) *Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou po dvou nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou střední hodnotu i rozptyl. Potom pro jejich součet $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a libovolné kladné c platí nerovnost*

$$P(|Y - E(Y)| \geq cn) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{c^2n}.$$

Ačkoli toto tvrzení kvůli mnoha písmenkům může působit složitě, nejedná se o nic jiného než o výpočet, který jsme udělali pro házení mincí (vzoreček nahoře dostaneme, pokud si vzpomeneš, že rozptyl jednoho hodu mincí je $\frac{1}{4}$).

Nyní si můžeme konečně s úlevou oddechnout, neboť jsme potvrdili, že intuitivní představa o povaze pravděpodobnosti je správná! Cesta k tomuto důkazu byla sice poměrně dlouhá a náročná, ale zase jsme díky ní narazili na spoustu užitečných a zajímavých konceptů. Dříve než si budeš moci

⁵Uvedený symbol je malé řecké sigma; jeho velkou variantu už znáš jako sumační symbol.

vychutnat zasloužený odpočinek, rádi bychom Ti ještě v hvězdičkových kapitolách představili pár zajímavostí, které souvisí s tím, čím jsme se v tomto díle zabývali.

Zvěřinec náhodných veličin*

Jeden z pojmů, který jsme doteď nezaváděli, je rozdělení náhodné veličiny. Rozdělení je histogram, kterým si popisujeme, jak často daná veličina nabývá jednotlivých hodnot. Jedná se tak o jakýsi prototyp náhodných veličin, u kterých už nás vlastně vůbec nezajímá původní pravděpodobnostní prostor. Zde jsme pro Tebe uspořádali katalog několika důležitých rozdělení. Přidali jsme k nim také některé jejich vlastnosti, přičemž s většinou z nich ses už někde v seriálu potkal(a). Pokud ne, zkus si je sám (sama) odvodit!

Alternativní (Bernoulliho) rozdělení – náhodná veličina nabývající s pravděpodobností p hodnoty 1 a jinak nabývající hodnoty nula. Veličina odpovídá hodu falešnou mincí a my ji z druhého dílu známe jako tzv. indikátor. Pro alternativní náhodnou veličinu X platí $E(X) = p$ a $\text{Var}(X) = p - p^2$.

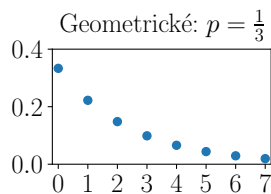
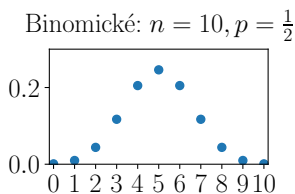
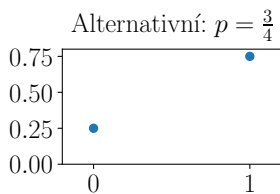
Binomické rozdělení – náhodná veličina značící počet panen při hodu n mincemi, přičemž na každé z nich padne panna s pravděpodobností p . Platí $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Dále máme $E(X) = n \cdot p$ (z linearity střední hodnoty) a $\text{Var}(X) = n(p - p^2)$ (X je součet nezávislých veličin).

Pro $p = \frac{1}{2}$ jsou hodnoty binomického rozdělení přesně kombinační čísla $\binom{n}{k}$ vynásobená 2^{-n} . Proto binomické rozdělení úzce souvisí s kombinačními čísly, tzv. Pascalovým trojúhelníkem nebo tzv. binomickou větou, se kterými ses již možná někde setkal(a). Toto rozdělení nás provázelo po celý tento díl a víme o něm již mnoho. Jestliže si hodíme n mincemi pro sudé n , nejpravděpodobnější výsledek je, že padne $n/2$ panen. Přesto je pravděpodobnost tohoto jevu čím dál menší, když zvětšujeme počet hodů (viz první úlohu). Čebyševova nerovnost říká, že pravděpodobnost, že binomické rozdělení bude nabývat hodnot vzdálených od $n/2$ o více než, řekněme, tři směrodatné odchylky (tedy $3 \cdot \sqrt{\frac{n}{4}}$), je jen $\frac{1}{9}$. Intuice, že počet panen se od střední hodnoty $n/2$ odchýlí o řádově odmocninu z n , vysvětluje rozdílné chování dvou grafů ze začátku tohoto dílu. Zatímco v prvním grafu se křivka postupně vzdaluje od nuly ($\sqrt{n}$ postupně roste), ve druhém grafu se postupně přibližuje k jedničce ($\sqrt{n}/n$ je fakt malé pro velká n).

Úloha 17. (těžká) Mějme sudé n . Nejprve si rozmysli, že $\binom{n}{n/2}$ je určitě menší než 2^n , ale větší než $2^n/(n+1)$. Předchozí úvaha o Čebyševově nerovnosti doopravdy dává lepší představu o tom, jak velké je toto kombinační číslo.

- (1) Pomocí Čebyševovy nerovnosti dokaž, že $\binom{n}{n/2} \geq 2^n \cdot \frac{3}{(8\sqrt{n+4})}$.
- (2) Naopak využij toho, že platí $\binom{n}{n/2} \cdot 2^{-n} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n-2}) \cdots (1 - \frac{1}{2})$ a zároveň $(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{n+1}$, abys dokázal(a), že $\binom{n}{n/2} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n+1}}$.

Geometrické rozdělení – náhodná veličina odpovídající počtu hodů, než na falešné minci padne panna. Padne-li panna s pravděpodobností p , máme $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$ a $E(X) = \frac{1}{p}$ (viz minulý díl). Jedná se o jedno z mála rozdělení s vlastností $P(X \geq a + b | X \geq a) = P(X \geq b)$. Jinými slovy, mince nemá paměť (vzpomeň na gamblerův omyl).



Rovnoměrné rozdělení – náhodná veličina odpovídající tomu, že zlomíme hůl na náhodném místě tak, že pro libovolný úsek hole (třeba pro první třetinu hole) je pravděpodobnost, že zlom bude někde v tomto úseku, úměrná jeho délce.

Spojité rozdělení kromě toho rovnoměrného existuje mnoho a obecně se popisují funkcí, které se říká hustota pravděpodobnosti. V případě hole délky 1 by hustotou byla funkce rovná jedné pro $0 \leq x \leq 1$ a jinak rovná nule. Pravděpodobnost, že si vybereš dané x z nějakého intervalu, pak odpovídá obsahu pod grafem této funkce, což je v případě hole to samé jako délka intervalu. Opravdová hůl se láme snáze poblíž prostředku, což můžeme popsat funkcí, která je od 0 do $\frac{1}{2}$ rostoucí a následně od $\frac{1}{2}$ do 1 klesající. Stejně dlouhé intervaly pak obecně odpovídají různým obsahům, a tedy i pravděpodobnostem. Detaily o hustotě pravděpodobnosti jsou nicméně daleko nad rámec seriálu.

Jako varovný příklad toho, že se spojité náhodné veličiny chovají složitěji, uvádíme úlohu, se kterou přišel na konci 19. století francouzský matematik Joseph Bertrand⁶.

Úloha 18. (Bertrandův paradox) Uvažme kružnici k se středem S a do ní vepsaný rovnostranný trojúhelník se stranou délky 1. Jaká je pravděpodobnost, že bude délka náhodně zvolené tětivy kružnice větší než 1?

- (1) Zvolit si náhodnou tétivu znamená zvolit rovnoměrně a nezávisle dva body na obvodu kružnice a spojit je. Na základě toho si rozmysli, že pravděpodobnost, že dostaneme tétivu delší než 1, je jedna třetina.
- (2) Zvolit si náhodnou tétivu ale také můžeme tak, že si zvolíme náhodný bod A uvnitř kružnice a ten následně interpretujeme jako střed tětivy kolmé na úsečku SA . Rozmysli si, pro které body je daná tétiva delší než 1, a porovnáním obsahů z toho vyvod, že daná pravděpodobnost je jedna čtvrtina.
- (3) Ještě jiný způsob, jak zvolit bod A z předešlého odstavce, je náhodně si zvolit, pod jakým úhlem se vydáš ze středu kružnice S a v jaké vzdálenosti se zastavíš. První je náhodné číslo od 0 do 2π , druhé je náhodné číslo od 0 do poloměru kružnice. V takovém případě si rozmysli, že vyjde jedna polovina.
- (4) Který z předchozích přístupů je správný? :-)

Centrální limitní věta*

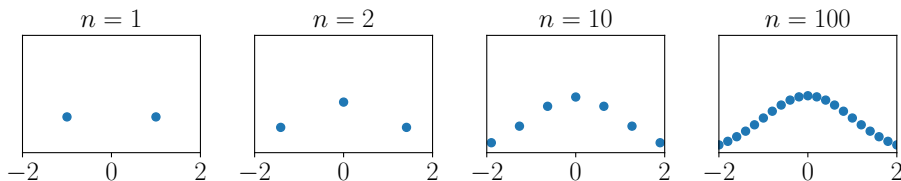
Statistika nuda je, má však cenné údaje.

Zdeněk Svěrák, Jaroslav Uhlíř

To nejlepší nakonec. Podívej se na následující obrázky zobrazující binomické rozdělení s $p = \frac{1}{2}$ pro $n = 1, 2, 10$ a 100. Třeba druhý obrázek odpovídá třem možným počtům panen po hodech dvěma mincemi, které nastanou postupně s pravděpodobnostmi $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Obecně je vidět, že rozdělení se

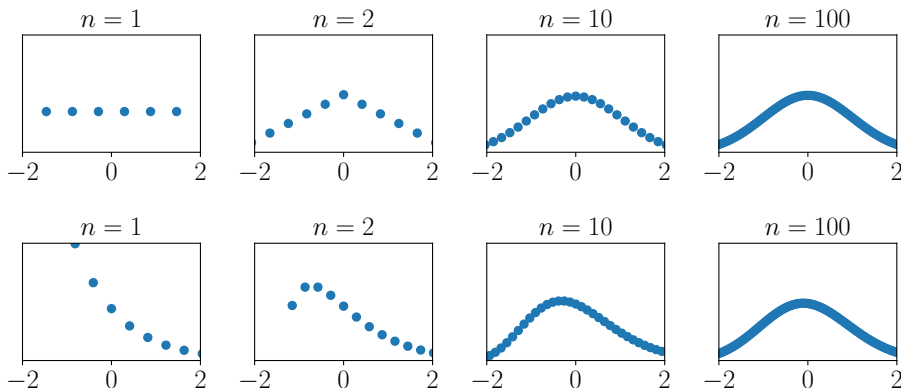
⁶Joseph Bertrand (1.98 m) je basketbalista, kterého můžeš znát díky jeho výkonům v týmu Drážďanští Titáni. Jeho jmenovec Joseph Bertrand (1822–1900) je znám zejména díky tzv. Bertrandovu postulátu, který dokázal až P. Čebyšev.

čím dál tím více podobají jisté křivce, která vypadá jako kopeček⁷. To není tak docela pravda, abychom dosáhli tohoto efektu, museli jsme postupně měnit měřítko na osách x a y . Po vhodném přeskálování ale opravdu platí, že se binomické rozdělení s rostoucím n blíží jisté křivce. Jmenuje se Gaussova křivka a je popsána rovnicí $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, přičemž $e \approx 2,7$ je tzv. Eulerovo číslo.⁸



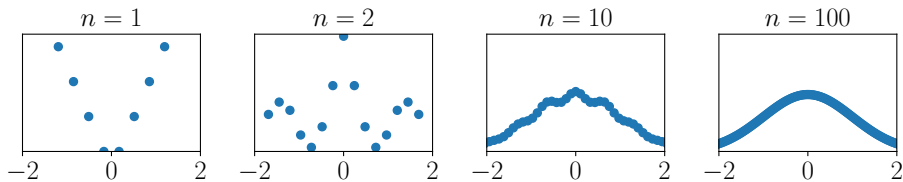
Co přesně jsme udělali s obrázkem? Nejprve jsme od veličiny odečetli střední hodnotu, tedy $n/2$. Tím jsme dosáhli toho, že vrcholy všech kopečků budou na pozici nula. To by samo o sobě ještě nestačilo. Jak víme, rozptyl součtu nezávislých veličin je roven součtu rozptylů, takže pro součet n veličin dostáváme rozptyl $n \cdot \text{Var}(X_1) = n \cdot \frac{1}{4}$. Abychom dosáhli toho, že všechny veličiny budou mít stejný rozptyl, vydělili jsme jejich hodnoty výrazem $\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}$ (nezapomeň, že $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$). To odpovídá „zmáčknutí“ hodnot ve vodorovné ose. Následně jsme stejným poměrem „roztáhli“ hodnoty na svislé ose. To jsme udělali proto, že součet pravděpodobností se vždy musí nasčítat na 1, takže celkový „obsah pod křivkou“ musí být zachován (právě obsah totiž odpovídá naší intuitivní představě o pravděpodobnosti ve spojitých prostorech). Hodnoty na vodorovné ose odpovídají tomu, že se díváme jen do vzdálenosti dvou směrodatných odchylek od průměru (pro $n = 10$ se na obrázek vešlo jen 7 z 11 možných výsledků).

To je sice pěkné, ale hod férovou mincí je jen jednou z mnoha aktivit, která se dá opakovat. Co se stane, když budeme házet falešnou mincí, kostkou nebo si vymyslíme svoje vlastní potřeštěné rozdělení? Odpověď je šokující: stane se to samé! Na následujícím obrázku je nejprve stejný proces pro hod kostkou (rozmysli si, proč pro $n = 2$ vypadá obrázek jako střecha) a následně pro geometrické rozdělení, které vypadá jako skluzavka, a pro podivné rozdělení, které vypadá jako údolí. U všech rozdělení jejich součtu nakonec vypadá podezřele stejně!



⁷Případně jako hroznýš, který právě pozřel slona.

⁸Leonhard Euler (1707–1783) a Carl Friedrich Gauss (1777–1855) jsou všeobecně pokládáni za jedno z nejvlivnějších matematiků vůbec. Proto se objevují v poznámce pod čarou v každém druhém PraSečím seriálu.



Fakt, že pokud dost dlouho sčítáme nezávislé veličiny se stejným rozdělením, vypadá výsledek jako kopeček, se nazývá **centrální limitní věta**.⁹ Nejen důkaz, ale i jen samotná formulace tohoto skvostu je nad rámec seriálu, neboť vyžaduje rozsáhlé znalosti z matematické analýzy. Přesto si o ní i o jejích důsledcích něco můžeme říci. Centrální se jí říká proto, že se jedná o jeden ze základních faktů pravděpodobnosti a statistiky, podobně jako fakt, že každé číslo lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel, je základním kamenem teorie čísel. Limitní je proto, že v řeči vyšší matematiky je Gaussova křivka v jistém smyslu tzv. limitou.

K čemu je centrální limitní věta dobrá mimo svět matematiky? Například vysvětluje, proč je většina lidí téhož pohlaví podobně vysoká – na Tvoji výšku totiž má vliv mnoho okolností a speciálně hned několik různých genů. Zjednodušeně lze říct, že to, jak se Tvá výška liší od průměru, je součtem příspěvků všech těchto okolností. Protože na sobě různé okolnosti moc nezávisí a žádná není výrazně důležitější než ty zbylé, platí zde centrální limitní věta a rozdělení výšek vypadá jako kopeček (většina lidí je někde uprostřed).

Na druhou stranu barva očí záleží zejména na jednom genu, a proto je mnoho lidí s modrýma a hnědýma očima, ale není pravda, že by většina lidí měla oči v jakési hnědomodré barvě.

Zkus se sám (sama) zamyslet nad tím, kde všude můžeš Gaussovu křivku (kopeček) potkat. Závise kupříkladu výběr auta nebo mobilního telefonu na mnoha podobně důležitých faktorech, nebo se lidé prostě dělí na dvě skupiny: ty, kdo chtějí nejlepší model za každou cenu, a na ty, kdo se spokojí se standardem stejným pro všechny? V prvním případě budou ceny různých modelů na trhu rozložené podobně jako binomické rozdělení, v druhém případě většina modelů bude mít přibližně jednu ze dvou cen.

I když je Gaussova křivka definovaná pro všechna reálná čísla, platí, že přibližně 99,7 % obsahu pod touto křivkou leží v intervalu od -3 do 3 . Protože podle centrální limitní věty platí pro veličiny, které jsou součtem mnoha stejných nezávislých příspěvků, že $\frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$ vypadá jako Gaussova křivka, můžeme pro tyto veličiny tvrdit, že s pravděpodobností přibližně 99,7 % nabývají hodnot vzdálených od střední hodnoty nejvýše o tři směrodatné odchylky. Podobné vlastnosti této křivky se často používají ve statistice. Ukažme si jednoduché použití na následující úloze z praxe.

Úloha 19. Na večírek přijde sto hostů. Víme, že každý host chce sníst nezávisle na ostatních nula chlebičků s pravděpodobností 20 %, jeden s pravděpodobností 50 % a dva s pravděpodobností 30 %. Kolik máme nakoupit chlebičků, aby s pravděpodobností aspoň 99 % na všechny zbylo?

Řešení. Neukážeme si přesné řešení, jen načrtneme, jak pomůže centrální limitní věta. Označme X_i počet chlebičků, které snědl i -tý host. Zajímá nás veličina $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Z centrální limitní věty víme, že histogram X (tedy její rozdělení) vypadá přibližně jako Gaussova křivka se středem v

$$E(X) = 100 \cdot E(X_1) = 100 \cdot (0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2) = 110.$$

Dále vypočítáme rozptyl:

$$\text{Var}(X) = 100 \cdot (E(X_1^2) - E(X_1)^2) = 100 \cdot (0,2 \cdot 0^2 + 0,5 \cdot 1^2 + 0,3 \cdot 2^2 - 1,1^2) = 49 = 7^2.$$

Na internetu (nebo v tabulkách) můžeme najít, že 99 % obsahu pod křivkou leží v intervalu od $-\infty$ do 2,3. Hledaná odpověď je tak přibližně $110 + 2,3 \cdot 7 = 126,1$, takže musíme koupit aspoň 127 chlebičků. Předchozí výpočet nicméně není žádný důkaz (dopřady chlebičků stačí 126).

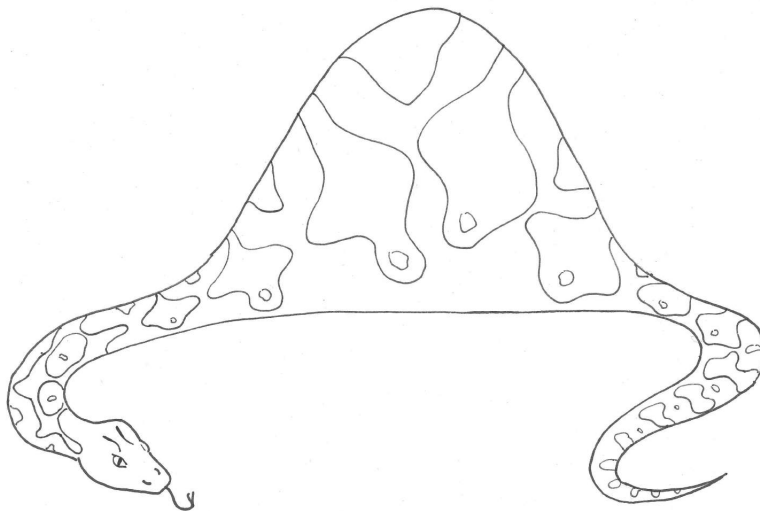
⁹Přesná matematická formulace nepoužívá slovo „kopeček“.

Odhad v podobném duchu bychom dostali i s použitím Čebyševovy nerovnosti, která říká, že libovolná veličina se odchýlí o a směrodatných odchylek s pravděpodobností nejvýše $1/a^2$. Pointa je, že s předpokladem nezávislosti všech veličin (k použití Čebyševa by totiž stačila nezávislost po dvou) dostaneme mnohem přesnější odhad, k jehož použití nám kromě víry v centrální limitní větu stačí jen znalost střední hodnoty a rozptylu dané veličiny.

Závěr

Všudypřítomným a tajemným kopečkem skončila bonusová část posledního dílu. Vždy když si odteď koupíš kopeček zmrzliny, vzpomeň si na chladnou krásu střední hodnoty, roztaj nad definicí nezávislosti a vychutnej si sladkou příchutí zákona velkých čísel.

Doufáme, že sis čtení seriálu a řešení úloh užil(a) podobně, jako jsme si my užili psaní. Seriál pro Tebe psali Danil s Vaškem a obrázky nakreslila Hanka Pařízková. S psaním nám nesmírně pomohlo mnoho dalších PraSátek, za všechny děkujeme Hedvice, Kubovi K., Martinovi T., Michalovi, Mirkovi, Pepovi T., Radovi a Vikimu. A hlavně děkujeme Tobě, žes dočetl(a) až sem – měj se parádně!



Návody k úlohám

1. (1) Napiš si podíl po sobě jdoucích kombinačních čísel.
(2) Napiš si podíl pravděpodobností pro n a $n + 1$.
2. V obou částech využij linearitu střední hodnoty.
3. (1) Jestliže soutěžící vyřešil alespoň dvě úlohy, skončí pravděpodobně po prvním dni mezi první polovinou soutěžících. Jenže druhý den jeho umístění bude náhodné, tedy pravděpodobně horší, než první den.
(2) Výjimečně dobrý výsledek nastává s malou pravděpodobností. Je-li příští test nezávislý na předchozím, s velkou pravděpodobností dopadne hůře.
(3) Počet bouraček je do značné míry náhodný, takže vybrané zatáčky v daný rok možná jen „měly smůlu“ a příští rok v nich pak pravděpodobně již k tolika haváriím nedojde.

4. Podobně jako v příkladu se špačky nastane rovnost jen tehdy, když daná veličina může nabývat pouze jedné nezáporné hodnoty.

Pro druhou část stačí uvážit veličinu, která nabývá pouze hodnot $-1, 0$, a k ní vhodnou hodnotu a .

5. (1) Postupuj od nejmenší možné hodnoty X po největší až do chvíle, kdy pravděpodobnost, že X je nejvýše x , přesáhne jednu polovinu. Dané x je pak medián.

(2) Použij Markovovu nerovnost pro $c = 2$.

9. (1) Postupuj stejně jako pro $n = 2$, neboj se představit si roznásobení n zárovek.

(2) Pro součet použij linearitu střední hodnoty, pro součin předchozí bod.

10. Dosad' do vzorečku a vzpomeň, že $E(X + a) = E(X) + a$ a $E(bX) = bE(X)$.

13. Vyjde postupně 2, 3 a 1. Pokud $P(X = i) = p_i$, musí ve všech podúlohách platit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Známe-li $E(X)$, respektive $\text{Var}(X)$, známe hodnotu výrazů $\sum_{i=1}^n ip_i$, respektive $\sum_{i=1}^n i^2 p_i - (\sum_{i=1}^n ip_i)^2$. Pro důkaz toho, že jsou čísla jednoznačně určena pro daná n , můžeme využít v prvních dvou částech jednoznačnosti řešení jisté soustavy lineárních rovnic. Pro důkaz maximality stačí najít dvě náhodné veličiny nabývající $n + 1$ hodnot, které mají stejný rozptyl či střední hodnotu.

15. Postupuj jako v předchozím tvrzení a neboj se roznásobit výraz $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2$.

16. Dosad' do Čebyševovy nerovnosti, zvol a tak, aby vyšla pravá strana.

17. Pro první část stačí použít, že $\binom{n}{n/2}$ je největší z $n + 1$ čísel, která se dohromady sečtou na 2^n .

(1) Použij Čebyševovu nerovnost s $a = 2$ (ale fungují i jiné hodnoty), abys dokázal(a), že součet kombinačních čísel mezi $n/2 - \sqrt{n}$ a $n/2 + \sqrt{n}$ je velký. Poté použij, že $\binom{n}{n/2}$ je ze všech sčítanců ten největší.

(2) Umocni druhou nerovnost na druhou a porovnej výrazy.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) Z linearity střední hodnoty plyne $E(R_n) = 10 + E(A_{11}) + \dots + E(A_n) - n/2 = 10 + (n - 10)/2 - n/2 = 5$.

(2) Z linearity střední hodnoty plyne $E(P_n) = \frac{10 + E(A_{11}) + \dots + E(A_n)}{n/2} = \frac{n + 10}{n}$. Porovnáním po sobě jdoucích výrazů spočítáme, že $E(P_n) - E(P_{n+1}) > 0$, tedy $E(P_n) > E(P_{n+1})$.

6. Každá příchut' má poloviční pravděpodobnost, že si ji dané dítě vybere. Protože si děti vybírají nezávisle, má proto každá příchut' pravděpodobnost $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, že si ji nikdo nevybere. Zavedeme si pro každou hodnotu indikátorovou proměnnou, která říká, zda si čokoládu nikdo nevybral. Z linearity střední hodnoty pak plyne, že střední počet nevybraných příchutí je $\frac{320}{32} = 10$. Dosazením $c = 2$ do Markovovy nerovnosti dostáváme, že nevybraných příchutí je alespoň dvacet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

8. (1) Vzhledem k nezávislosti hodů to je součin obou středních hodnot, tedy $\frac{1+2+5+10+20+50}{6} \cdot \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 51 + \frac{1}{3}$ Kč.

(2) Veličiny již nyní nejsou nezávislé. Střední hodnota jejich součinu je $\frac{1}{6} \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + \dots + 6 \cdot 50) = 76 + \frac{2}{3}$ Kč.

11.

$$\text{Var}(B) = E(B^2) - E(B)^2 = \frac{1}{2}(0 + n^2) - \left(\frac{1}{2}(0 + n)\right)^2 = \frac{1}{4}n^2.$$

12. Protože $\text{Var}(X)$ je střední hodnotou nezáporné veličiny $(X - E(X))^2$, je vždy nezáporný – proto $E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$, což je požadovaná nerovnost. Aby byl rozptyl nulový, musí být všechny

členy $(x - E(X))^2$ nulové, tedy pro všechna x z oboru hodnot musí být $x = E(X)$, tedy náhodná veličina může nabývat pouze jedné hodnoty (a není tak moc náhodná).

14. Máme $\text{Var}(O) = \text{Var}(P) = E(O^2) - E(O)^2 = E(O) - E(O)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Dále $\text{Var}(O+O) = \text{Var}(2O) = 4\text{Var}(O) = 1$ a $O+P$ je veličina, která vždy nabývá stejné hodnoty, takže její rozptyl je nula.

18. (1) Nejprve náhodně zvolíme jeden z konců tětivy X a vepíšeme do k rovnostranný trojúhelník XAB , čímž kružnici rozdělíme na tři stejně dlouhé oblouky. Délka tětivy bude větší než jedna právě tehdy, když její druhý konec bude ležet na kratším oblouku AB . Tento oblouk tvoří třetinu obvodu kružnice, a proto je pravděpodobnost tohoto jevu $\frac{1}{3}$.

(2) Vepíšeme-li do kružnice rovnostranný trojúhelník ABC , bude střed kružnice S těžištěm trojúhelníku. Označme D střed úsečky AB . Úsečka DC je těžnice, kterou těžiště S dělí v poměru $1 : 2$. Vzdálenost DS je tedy rovna polovině poloměru kružnice.

Zvolíme-li náhodný bod tak, že jeho vzdálenost od S bude přesně polovinou poloměru kružnice, bude délka odpovídající tětivy přesně 1. Bude-li zvolený bod dál, bude tětiva kratší, a bude-li blíže, bude delší. Tětiva bude delší než jedna pro jevy odpovídající bodům v kruhu se středem v S a poloměrem polovičním oproti původní kružnici. Obsah tohoto obrazce je jednou čtvrtinou celkového obsahu.

(3) Na úhlu pochopitelně nezáleží. Tětiva bude delší než jedna právě tehdy, když zvolíme vzdálenost od středu větší než polovina poloměru (viz předchozí bod), což nastane v půlce případů.

(4) V jistém smyslu jsou správné všechny tři přístupy. Záleží na tom, co myslíme „náhodnou tětivou“. Rozdíl mezi přístupy se dá ilustrovat na druhé a třetí podúloze, kde vlastně vybíráme náhodný bod uvnitř kruhu a testujeme, zda je jeho vzdálenost od středu menší než polovina poloměru. Takové body leží v kružnici se stejným středem a polovičním poloměrem, která má proto čtvrtinový obsah.

Když ale vybíráme náhodný bod tak, že si náhodně zvolíme jeho vzdálenost od středu, bude tato vzdálenost menší než polovina poloměru s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Rozdíl mezi druhým a třetím způsobem tak je ten, že třetí v jistém smyslu preferuje body blízko středu nad body blízko okraje kruhu, zatímco ten druhý se chová ke všem stejně.