Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 13. KVĚTNA 2019

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.

(a) Nadaní australští pavouci upletli přes noc pavučinu ve tvaru krychle. Do rána se na její stěny nachytaly mouchy, přičemž na každé stěně byla chycena alespoň jedna. Když druhý den přišel Martin k pavučině, představil si v každém vrcholu součin počtů much na jeho přilehlých stěnách. Všiml si, že součet těchto ohodnocení vrcholů je roven 2019. Fíla k němu ihned přiběhl, chvíli se na pavučinu koukal a pak prohlásil, že mu nevěří. Který z chlapců má pravdu? (2 BODY)

(b) Poté, co se chlapci dohádali, si pavouci uložili všechny mouchy do vrcholů takovým způsobem, že v každých dvou byl různý nenulový počet much. Přes noc se na hrany krychle nachytali mravenci. Madam Verča si všimla, že pro každou hranu je počet mravenců na ní roven největšímu společnému děliteli počtů much na příslušných koncových vrcholech. Mohlo se nachytat stejně much jako mravenců? (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Nechť a a b jsou kladná reálná čísla. Rado si nakreslil pravidelný šestiúhelník se stranami délky a a zvenku na každou stranu nalepil obdélník o stranách a a b (k šestiúhelníku přilepený stranou délky a). Všiml si, že ty vrcholy obdélníků, které nejsou vrcholy původního šestiúhelníku, leží na jedné kružnici o poloměru r. Hedvika jeho postup zopakovala, ale s prohozenými hodnotami a a b. Tím dostala kružnici o poloměru h. Ukažte, že $r = h$. (2 BODY)

(b) V obdélníku $ABCD$ označme P a Q středy stran BC a CD. Úsečka BQ protíná úsečky AP a PD postupně v bodech K a L. Úsečky PD a AQ se protínají v bodě M. Středy úseček MA, AK a KL si označíme postupně X, Y a Z. Ukažte, že kolmice z X na BQ, z Y na PD a ze Z na AQ se protínají v jednom bodě. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

(a) Ať $k \geq 2$ je přirozené číslo. Dokažte, že

$$(k-1)^2 \mid k^{k-1} - 1.$$

(2 BODY)

(b) Je dáno prvočíslo p a přirozená čísla m, n taková, že $m < n < p$. Dále nechť platí

$$p \mid m^2 + 1 \qquad \text{a} \qquad p \mid n^2 + 1.$$

Dokažte, že

$$p \mid mn - 1.$$

(3 BODY)

Úloha 4.

(a) Řešte v $\mathbb{Z}$:

$$x^2 - 6x + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

(2 body)

(b) Řešte v $\mathbb{N}_0$ pro $a \geq b \geq c \geq d$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n.$$

(3 body)

Úloha 5.

(a) Viki vyhrál v tombole N kapybar a vykrmil je tak, že žádné dvě z nich nevážily stejně a váha každé v kilogramech byla racionální číslo. Chtěl se před svými kamarády předvést, a tak prohlásil, že kdykoliv mu libovolnou jednu z nich vezmou, umí on zbylé kapybary rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) skupin, aby obě dvě skupiny měly stejný součet hmotností. Pro která sudá N mohl Vikimu trik fungovat? (2 body)

(b) Filip našel 2019 bezedných pytlů s penězi – v prvním jsou jednokoruny, v druhém dvoukoruny, ve třetím trojkoruny atd. Mince různých hodnot vypadají stejně, ale jejich hodnota je přímo úměrná jejich váze. Jednoho dne foukal vítr a zpřeházel popisky u pytlů značící hodnoty mincí v nich. Filip pak popisky k pytlům rozdělil po paměti, ale není si jistý, jestli někde neudělal chybu. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách umí zjistit, jestli popisky rozdělil správně? (3 body)

Úloha 6.

(a) Kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se protínají v bodech X a Y. Označme P průsečík k_2 a tečny ke k_1 v bodě X a Q průsečík přímky S_1Y a kružnice k_2. Ukažte, že $PQ \parallel S_1S_2$. (2 body)

(b) Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y. Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z. Ukažte, že X, Y a Z leží na jedné přímce. (3 body)

Úloha 7.

Na ministerstvu dopravy je k kanceláří. Ty jsou propojeny sofistikovanou potrubní poštou tak, že pro každých n kanceláří existuje další kancelář, která je s každou z nich přímo spojena. Nový ministr dopravy by si chtěl vybrat kancelář, ze které jde bez prostředníka komunikovat se všemi ostatními.

(a) Dokažte, že pro $k = 2n + 2$ může být ministerstvo postaveno natolik nefunkčně, že se mu to nepodaří. (2 body)

(b) Dokažte, že pro $k = 2n + 1$ si vždy svou vysněnou kancelář vybrat umí. (3 body)

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *Nadaní australští pavouci upletli přes noc pavučinu ve tvaru krychle. Do rána se na její stěny nachytaly mouchy, přičemž na každé stěně byla chycena alespoň jedna. Když druhý den přišel Martin k pavučině, představil si v každém vrcholu součin počtů much na jeho přilehlých stěnách. Všiml si, že součet těchto ohodnocení vrcholů je roven* 2019*. Fíla k němu ihned přiběhl, chvíli se na pavučinu koukal a pak prohlásil, že mu nevěří. Který z chlapců má pravdu?* *(Marian Poljak)*

(b) *Poté, co se chlapci dohádali, si pavouci uložili všechny mouchy do vrcholů takovým způsobem, že v každých dvou byl různý nenulový počet much. Přes noc se na hrany krychle nachytali mravenci. Madam Verča si všimla, že pro každou hranu je počet mravenců na ní roven největšímu společnému děliteli počtů much na příslušných koncových vrcholech. Mohlo se nachytat stejně much jako mravenců?* *(Rado van Švarc)*

ŘEŠENÍ:

(a) Dokážeme, že pravdu má Fíla. Označme počty much na spodní a svrchní stěně jako a a f a počty much na bočních stěnách postupně b, c, d, e. Potom součet ohodnocení daných vrcholů je roven:

$$abc + fbc + acd + fcd + ade + fde + aeb + feb = (a + f)(bc + cd + de + eb) = (a + f)(b + d)(c + e).$$

Nicméně prvočíselný rozklad čísla 2019 je roven $3 \cdot 673$ a každá ze tří závorek výše je rovna alespoň 2, tedy není možné zapsat 2019 jako součin tří čísel větších než 1 (jinak by prvočíselný rozklad 2019 musel být součin alespoň tří ne nutně různých prvočísel).

(b) Ukážeme, že to není možné, protože počet mravenců musí být vždy menší než počet much. Mějme dvě různá přirozená čísla a, b a označme (a, b) jejich největšího společného dělitele. Pak existují přirozená k, l taková, že $a = k \cdot (a, b)$ a $b = l \cdot (a, b)$. Z různosti a, b plyne i různost k, l a tedy $k + l \geq 3$. Složením těchto poznatků získáme nerovnost $a + b = (a, b)(k + l) \geq 3(a, b)$. Rovnost nastane právě tehdy, když $k = 1$ a $l = 2$ (nebo $k = 2$ a $l = 1$) neboli jedno z čísel a, b je dvojnásobkem toho druhého.

Označme V počet much a E počet mravenců a sečtěme výše získanou nerovnost přes všechny hrany v krychli. Dostaneme nerovnost $3E \leq 3V$, protože z každého vrcholu vedou tři hrany, a tak se na pravé straně nerovnosti objeví právě třikrát. Po úpravě platí $E \leq V$ s tím, že rovnost nastává právě tehdy, když pro každé dva sousední vrcholy platí, že hodnota v jednom je dvojnásobkem hodnoty v druhém. Tím pádem máme pro sousedy nějakého konkrétního vrcholu jenom dvě možnosti přiřazení hodnot (dvojnásobek a polovinu hodnoty uvažovaného vrcholu), ale každý vrchol má tři sousedy a nějaká hodnota by se tak musela opakovat, což není možné. Tím pádem rovnost nemůže nastat a počet mravenců je vždy menší než počet much.

Poznámky:

Většina řešitelů si troufla pouze na první část úlohy a došlá řešení byla typicky správně a postupovala stejně jako to vzorové. Část řešitelů se lehce zamotala při práci s posledním argumentem v úloze **(a)**, který je sice na první pohled jasný, ale je důležité ho umět říct správně. Bod jsem se za to rozhodl nestrhávat. *(Martin Raška)*

Úloha 2.

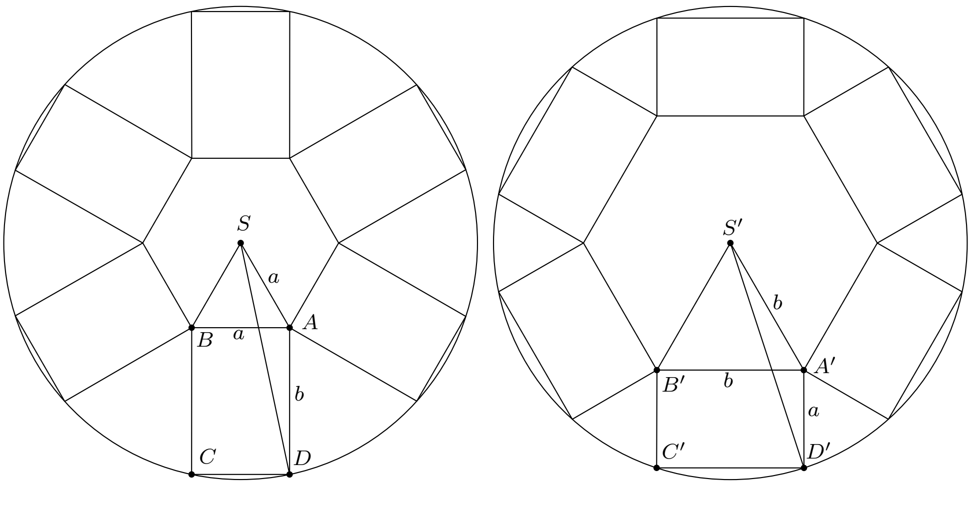
(a) *Nechť a a b jsou kladná reálná čísla. Rado si nakreslil pravidelný šestiúhelník se stranami délky a a zvenku na každou stranu nalepil obdélník o stranách a a b (k šestiúhelníku přilepený stranou délky a). Všiml si, že ty vrcholy obdélníků, které nejsou vrcholy původního šestiúhelníku, leží na jedné kružnici o poloměru r. Hedvika jeho postup zopakovala, ale s prohozenými hodnotami a a b. Tím dostala kružnici o poloměru h. Ukažte, že $r = h$.* (David Hruška)

(b) *V obdélníku $ABCD$ označme P a Q středy stran BC a CD. Úsečka BQ protíná úsečky AP a PD postupně v bodech K a L. Úsečky PD a AQ se protínají v bodě M. Středy úseček MA, AK a KL si označíme postupně X, Y a Z. Ukažte, že kolmice z X na BQ, z Y na PD a ze Z na AQ se protínají v jednom bodě.* (Jakub Löwit, Rado van Švarc)

Řešení:

(a) Střed Radova šestiúhelníku si označme S. Nechť AB je nějaká ze stran šestiúhelníka a $ABCD$ je obdélník k ní nalepený. Z pravidelnosti daného šestiúhelníka plyne, že ASB je rovnostranný trojúhelník, takže $|SA| = |AB| = a$. Dále platí, že $|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle BAD| = 60° + 90°$. Tedy v trojúhelníku SAD je $|SA| = a$, $|AD| = b$ a $|\sphericalangle SAD| = 150°$.

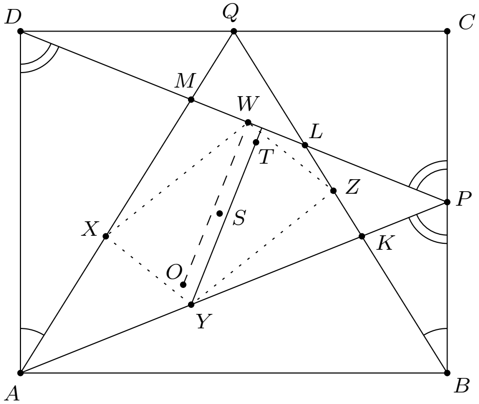
Pokud si střed Hedvičina šestiúhelníku označíme S' a stejným způsobem uvažujeme obdélník $A'B'C'D'$, dostaneme analogickým postupem, že $|S'A'| = b$, $|A'D'| = a$ a $|\sphericalangle S'A'D'| = 150°$. Tedy z věty *sus* jsou trojúhelníky SAD a $D'A'S'$ shodné. Speciálně pak $|SD| = |D'S'|$. A protože $r = |SD|$ a $h = |D'S'|$, je $r = h$.



(b) Ze symetrie je $|\sphericalangle DAQ| = |\sphericalangle QBC|$ a z rovnoběžnosti a symetrie platí $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DPC| = |\sphericalangle APB|$. Potom jsou trojúhelníky DAM a PBK podle věty *uu* podobné. Tedy $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle BKP| = |\sphericalangle AMD| = 180° - |\sphericalangle AML|$, takže čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový.

Označme si W střed úsečky ML a O střed kružnice opsané $AKLM$. Protože XY je střední příčka v trojúhelníku MAK, je $XY \parallel KM$. Analogicky $ZW \parallel KM$, takže $XY \parallel ZW$. Stejně tak platí $XW \parallel YZ$, takže $XYZW$ je rovnoběžník. Jeho střed si označme S.

Označme si T obraz bodu O podle S. Ukážeme, že přímky ze zadání procházejí bodem T. Ukážeme to například pro kolmici z Y na LM, pro zbylé dvě se to provede analogicky. Protože O je střed kružnice opsané $AKLM$, leží na ose úsečky LM, čili na kolmici z W na LM. Při středové souměrnosti přes S se O přenese na T, W na Y a úsečka WO na úsečku YT. Protože při středové souměrnosti se zachovávají rovnoběžnosti, jsou YT a WO rovnoběžné. Nyní protože $WO \perp LM$, je i $YT \perp LM$, což jsme přesně chtěli ukázat.



Poznámky:

V části **(a)** jste většinou postupovali buď jako vzorák, nebo přímo pomocí vyjádření r a h v závislosti na a, b, obvykle pomocí Pythagorovy věty. Skoro všechna došlá řešení byla správně.

V části **(b)** se objevilo znatelně méně řešení. Některá postupovala synteticky, některá analyticky. Za hezká syntetická (ale ne za všechna syntetická) jsem dával $+i$, za ošklivá analytická (ale ne za všechna analytická) jsem dával $-i$. *(Rado van Švarc)*

Úloha 3.

(a) *Ať $k \geq 2$ je přirozené číslo. Dokažte, že*

$$(k-1)^2 \mid k^{k-1} - 1.$$

(Jakub Löwit)

(b) *Je dáno prvočíslo p a přirozená čísla m, n taková, že $m < n < p$. Dále nechť platí*

$$p \mid m^2 + 1 \qquad \text{a} \qquad p \mid n^2 + 1.$$

Dokažte, že

$$p \mid mn - 1.$$

(Pavel Hudec)

Řešení:

(a) Dle známého vzorce víme, že $a^n - b^n = (a-b)(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1}b^i)$.

Po dosazení $a = k$, $b = 1$, $n = k-1$ dostáváme:

$$k^{k-1} - 1 = k^{k-1} - 1^{k-1} = (k-1)(k^{k-2} + k^{k-3} + \cdots + 1).$$

Ukážeme, že $k-1$ dělí pravou závorku $(k^{k-2} + k^{k-3} + \cdots + 1)$. Podívejme se na ni modulo $k-1$ (budeme využívat toho, že $k \equiv 1 \pmod{k-1}$):

$$(k^{k-2} + k^{k-3} + \cdots + 1) \equiv (1^{k-2} + 1^{k-3} + \cdots + 1) \equiv (k-1) \cdot 1 \equiv 0 \pmod{k-1}.$$

Dokázali jsme, že $k-1$ dělí i pravou závorku, tudíž dohromady máme $(k-1)^2 \mid k^{k-1} - 1$.

(b) Pokud číslo dělí nějaká dvě čísla, dělí i jejich rozdíl a součet. Proto platí $p \mid (n^2+1)-(m^2+1) = (n-m)(n+m)$. Protože $p > n-m > 0$ a zároveň p je prvočíslo, tak p nemůže dělit $n-m$, jelikož je tento výraz menší.

Takže máme $p \mid n+m$, z čehož dostáváme i $p \mid (n+m)^2$. Z toho odvodíme, že $p \mid (n+m)^2 - (n^2+1) - (m^2+1)$. Po zjednodušení dostáváme $p \mid 2(mn-1)$. Víme však, že $p > n > m > 0$, tudíž $p \geq 3$. Proto je dvojka nesoudělná s p, takže máme, že $p \mid mn-1$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Přijatá řešení příkladu **(a)** byla velice podobná. Trochu se lišila ve využívání modulární aritmetiky či prostého dělení polynomů, ale v principu byla stejná. Až na pár drobností byla všechna správně.

Příklad **(b)** už poslalo méně lidí, ale i tak přišlo dost řešení. Všechna byla moc hezká a velmi podobná vzorovému, avšak našla se i taková, která využívala docela silných tvrzení. Za mě se úloha všem moc povedla.

(Filip Čermák)

Úloha 4.

(a) *Řešte v $\mathbb{Z}$:*

$$x^2 - 6x + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

(Rado van Švarc)

(b) *Řešte v $\mathbb{N}_0$ pro $a \geq b \geq c \geq d$:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n.$$

(Jakub Löwit)

Řešení:

(a) Nejprve si všimněme, že nutně $y \geq 0$, neboť pro záporná y není pravá strana zadané rovnice celočíselná. Upravme si nyní levou stranu na čtverec:

$$(x-3)^2 - 8 = 7 \cdot 2^y,$$
$$(x-3)^2 = 7 \cdot 2^y + 8.$$

Jelikož je levá strana druhou mocninou nenulového celého čísla, musí se každé prvočíslo v jeho prvočíselném rozkladu vyskytovat v sudé mocnině ($x \neq 3$, neboť pravá strana je kladná). Pokud by však $y \geq 4$, dává pravá strana zbytek 8 po dělení 16. Je tedy dělitelná 2^3, ale ne 2^4, což nelze.

Zbývá tedy vyřešit případy, kdy $y = 0$, 1, 2 a 3. Pro tato y je po řadě pravá strana rovnice rovna 15, 22, 36 a 64. Pouze poslední dvě hodnoty jsou čtverce celých čísel, tudíž $(x, y) \in \{(3 \pm 6, 2), (3 \pm 8, 3)\} = \{(-3, 2), (9, 2), (-5, 3), (11, 3)\}$ jsou všechna řešení.

(b) Označme si $L = \{a, b, c, d\}$ množinu neznámých na levé straně zadané rovnice. Všimněme si, že jsou-li všechny neznámé z L sudé a $(a, b, c, d, n) = (2A, 2B, 2C, 2D, N)$ je řešením, pak i $(a, b, c, d, n) = (A, B, C, D, N-1)$ je řešením. Platí to i naopak – zdvojnásobením neznámých v L libovolného řešení dostaneme nové řešení. Tedy každé řešení zadané rovnice vznikne z nějakého řešení, ve kterém je alespoň jedna z neznámých v L lichá, několikerým provedením této operace. Dále se tedy stačí zabývat pouze řešeními s alespoň jednou neznámou lichou.

Pro $n \geq 1$ je pravá strana dělitelná 4. Aby byl ale součet čtyř čtverců celých čísel dělitelný čtyřmi, musí být všechna tato čísla sudá nebo všechna lichá – sudá čísla totiž dávají v druhé mocnině zbytek 0 a lichá zbytek 1 po dělení čtyřmi. Jelikož předpokládáme, že je alespoň jedno z našich čísel liché, musejí být lichá všechna. Potom ale dávají po dělení osmi v druhé mocnině vždy zbytek 1, z čehož dostáváme, že v součtu dávají zbytek 4 po dělení osmi. Takže n musí být nutně 1.

Tudíž mohou nastat pouze dvě možnosti pro n a to případy, kdy $n = 0$ nebo $n = 1$ a zároveň jsou všechna čtyři čísla lichá.

Pro $n = 0$ je zjevně jediným řešením $(a, b, c, d) = (2, 1, 1, 1)$.

Pro $n = 1$ musí být

$$\frac{28}{4} \leq a^2 \leq 28,$$

čímž dostaneme následující řešení:

$$(a, b, c, d) \in \{(3, 3, 3, 1), (4, 2, 2, 2), (5, 1, 1, 1)\},$$

přičemž prostřední řešení rovněž dostaneme zdvojnásobením řešení $(2, 1, 1, 1)$.

Množina všech řešení tak je

$$(a, b, c, d, n) \in \Big\{ \left(2 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, k\right), \left(3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, k+1\right), \left(5 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, k+1\right) \,\Big|\, k \in \mathbb{N}_0 \Big\}.$$

POZNÁMKY:
Úlohy nebyly těžké, velká většina doručených řešení byla správně. Většina řešitelů se rozhodla řešit pouze první úlohu, kterou šlo řešit i jinými způsoby – velmi časté bylo použití diskriminantu či dělitelnosti sedmi. K řešení druhé úlohy dva řešitelé využili i Jacobiho větu, která přesně určuje počet řešení rovnice $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k$ s parametrem k. *(Tomáš Novotný)*

Úloha 5.

(a) *Viki vyhrál v tombole N kapybar a vykrmil je tak, že žádné dvě z nich nevážily stejně a váha každé v kilogramech byla racionální číslo. Chtěl se před svými kamarády předvést, a tak prohlásil, že kdykoliv mu libovolnou jednu z nich vezmou, umí on zbylé kapybary rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) skupin, aby obě dvě skupiny měly stejný součet hmotností. Pro která sudá N mohl Vikimu trik fungovat?* *(Pavel Hudec)*

(b) *Filip našel 2019 bezedných pytlů s penězi – v prvním jsou jednokoruny, v druhém dvoukoruny, ve třetím trojkoruny atd. Mince různých hodnot vypadají stejně, ale jejich hodnota je přímo úměrná jejich váze. Jednoho dne foukal vítr a zpřeházel popisky u pytlů značící hodnoty mincí v nich. Filip pak popisky k pytlům rozdělil po paměti, ale není si jistý, jestli někde neudělal chybu. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách umí zjistit, jestli popisky rozdělil správně?*
(Jakub Löwit)

Řešení:

(a) Ukážeme, že Vikimu nemůže trik fungovat pro žádné přirozené sudé číslo N. Poté ukážeme, že jedině pro poněkud podivný případ, kdy $N = 0$ a Viki tedy nemá kapybary žádné, mu trik funguje.

Uvědomíme si, že jelikož hmotnost každé z kapybar je racionální číslo, můžeme BÚNO vynásobit všechny kapybaří hmotnosti nejmenším společným násobkem jejich jmenovatelů a řešit úlohu jen pro celočíselné hmotnosti kapybar. Dále si všimneme, že parita všech hmotností musí být nutně stejná. V okamžiku, kdy by stejná nebyla (mezi kapybarami by se vyskytovala alespoň jedna se sudou hmotností a alespoň jedna s lichou), nutně neplatí, že kdykoli odebereme libovolnou kapybaru, tak součet zbývajících je sudý. Neboť v případě, že součet vah všech kapybar je sudý, můžeme odebrat kapybaru s lichou hmotností a vytvořit tím lichý součet hmotností. Na druhou stranu v případě, že součet vah všech kapybar je lichý, stačí odebrat kapybaru se sudou hmotností a opět nemůžeme rozdělit kapybary na dvě stejně hmotné skupiny. Hmotnosti kapybar jsou tudíž buď všechny liché, nebo všechny sudé. Z důvodu sudosti N je proto jejich součet rovněž sudý.

V případě že jsou všechny liché, tak po odebrání jedné kapybary je součet vah zbývajících kapybar lichý, a tedy kapybary nemůžeme rozdělit na dvě skupiny se stejnou hmotností.

Zbývá nám případ, kdy jsou hmotnosti všech kapybar sudé, tehdy je BÚNO můžeme vydělit jejich největším společným dělitelem a převést tím úlohu na jeden z předcházejících případů. Jediné sudé N, pro které bude Vikimu trik fungovat, je tedy $N = 0$.

(b) Ukážeme, že na určení toho, jestli Filip rozdělil popisky správně, nám bude stačit jedno vážení. Bez jakéhokoliv vážení zjevně správnost rozmístění nezjistíme.

Od této chvíle budeme přívlastkem *zdánlivé* označovat mince nacházející se v pytlích s příslušnými popisky (jestli jsou popisky u správných pytlů zatím nevíme). Na levou misku vah dáme jednu zdánlivou jednokorunu, dále dvě zdánlivé dvoukoruny, …, až 2019 zdánlivých dvatisícedevatenáctikorun. Na pravou stranu vah pak umístíme $1^2 + 2^2 + \cdots + 2019^2$ zdánlivých jednokorun.

Pokud Filip rozdělil popisky správně, tak jsou misky rovnoramenných vah v rovnováze. Pokud ne, pak ukážeme, že v tom případě musí nutně levá miska vah být lehčí, než pravá. K tomu nám dopomůže permutační nerovnost[1], ze které plyne, že pro jakékoli jiné než správné rozdělení cedulek k pytlům musí levá miska vážit méně, než když jsou cedulky přiděleny správně. Na druhou stranu váha pravé misky bude vždy větší nebo rovna váze, kterou by mělo $1^2+2^2+\cdots+2019^2$ opravdových jednokorun.

Rovnost vah může proto nastat pouze v případě, kdy jsou všechny popisky správně umístěny.

Poznámky:

Všechna došlá řešení úlohy **(a)** byla správná a postupovala obdobně jako vzorové řešení.

Druhá úloha byla náročnější, pár řešení opomenulo řádně zdůvodnit proč Filipovi stačí právě jedno vážení. *(Terka Poláková)*

Úloha 6.

(a) *Kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se protínají v bodech X a Y. Označme P průsečík k_2 a tečny ke k_1 v bodě X a Q průsečík přímky S_1Y a kružnice k_2. Ukažte, že $PQ \parallel S_1S_2$.*

(Pavel Hudec)

(b) *Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y. Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z. Ukažte, že X, Y a Z leží na jedné přímce.* *(Pavel Hudec)*

[1] Více informací na 26. stránce seriálu o nerovnostech *https://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*.

Řešení:

(a) Pro část **(a)** ukážeme dvě řešení:

Řešení počítáním úhlů:

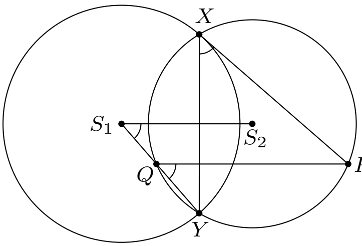
Předpokládejme, že konfigurace vypadá tak, jako na obrázku vlevo – ostatní případy se dělají podobně. Jelikož je XP tečnou k_1, je úhel $\sphericalangle YXP$ úsekovým k tětivě XY. Úhel $\sphericalangle XS_1Y$ je středovým ke stejné tětivě, proto $|\sphericalangle XS_1Y| = 2|\sphericalangle YXP|$. Zároveň jelikož jsou trojúhelníky S_1S_2X a S_1S_2Y shodné podle věty sss, platí i $|\sphericalangle XS_1Y| = 2|\sphericalangle YS_1S_2|$. Konečně ze shodnosti obvodových úhlů dostaneme $|\sphericalangle YXP| = |\sphericalangle YQP|$. Celkově dostaneme

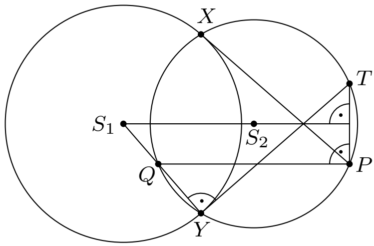
$$|\sphericalangle YS_1S_2| = \frac{1}{2}|\sphericalangle XS_1Y| = |\sphericalangle YXP| = |\sphericalangle YQP|.$$

Úhly $\sphericalangle XS_1S_2$ a $\sphericalangle YQP$ jsou souhlasné a mají stejnou velikost, proto jsou přímky S_1S_2 a PQ rovnoběžné.

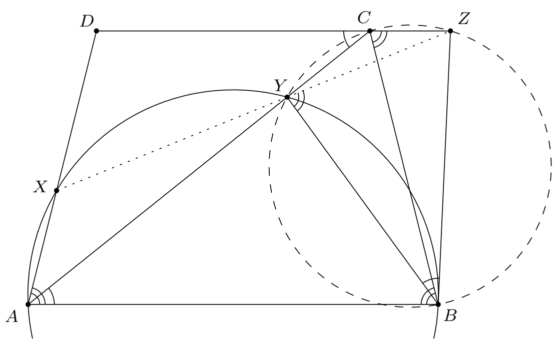
Trikové řešení:

Nechť T je průsečík tečny t ke k_1 v bodě Y a kružnice k_2. Jelikož je t tečna, dostáváme $|\sphericalangle S_1YT| = |\sphericalangle TYQ| = 90°$. Tedy TQ je průměr k_2. Tečny z X a Y jsou sobě obrazem v osové souměrnosti podle přímky S_1S_2, proto jsou sobě obrazem podle S_1S_2 i jejich druhé průsečíky s k_2 – body P a T. To znamená, že $PT \perp S_1S_2$. Zároveň ale TQ je průměr, tedy $PQ \perp TQ$. To už znamená, že přímky S_1S_2 a PQ jsou rovnoběžné.





(b) Z věty o úsekovém úhlu dostáváme rovnost $|\sphericalangle YBZ| = |\sphericalangle BAY|$. Dále pak $|\sphericalangle BAY| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| = 180° - |\sphericalangle YCZ|$ díky rovnoběžnosti AB a CD. To znamená, že $|\sphericalangle YBZ| = 180° - |\sphericalangle YCZ|$, z čehož dostáváme, že čtyřúhelník $YBZC$ je tětivový. Proto ze shodnosti obvodových úhlů platí $|\sphericalangle BYZ| = |\sphericalangle BCZ|$. Díky tomu, že $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, platí $|\sphericalangle BCZ| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle XAB|$. Konečně v tětivovém čtyřúhelníku $AXYB$ platí $|\sphericalangle XAB| = 180° - |\sphericalangle XYB|$. Celkově tak dostáváme $|\sphericalangle BYZ| + |\sphericalangle XYB| = 180°$, což dokazuje, že body X, Y, Z leží na přímce.



Poznámky:
V části **(a)** bylo v úhlícím řešení potřeba rozebrat množství konfigurací, což se nepovedlo ošetřit žádnému řešiteli. V takových situacích je obvykle vhodné použít orientované úhly, které různé konfigurace dokážou vyřešit „najednou“. Správná řešení, která opomíjela nějaký případ, se do nich dala bez větší námahy přepsat, proto jsem za takové problémy nestrhával body. Zároveň chválím *Vojtěcha Gaďurka*, který přišel na řešení podobné „trikovému“ vzorovému.

Část **(b)** nebyla na béčko příliš těžká a řešitelé se s ní poprali dobře.

(Pavel Hudec)

Úloha 7.

Na ministerstvu dopravy je k kanceláří. Ty jsou propojeny sofistikovanou potrubní poštou tak, že pro každých n kanceláří existuje další kancelář, která je s každou z nich přímo spojena. Nový ministr dopravy by si chtěl vybrat kancelář, ze které jde bez prostředníka komunikovat se všemi ostatními.

(a) Dokažte, že pro $k = 2n + 2$ může být ministerstvo postaveno natolik nefunkčně, že se mu to nepodaří.

(b) Dokažte, že pro $k = 2n + 1$ si vždy svou vysněnou kancelář vybrat umí.

(Rado van Švarc, Jakub Löwit)

Řešení:

(a) Chceme najít příklad ministerstva, ve kterém není kancelář spojená se všemi ostatními. Uspořádejme všechny kanceláře do pravidelného $(2n + 2)$-úhelníku. Nyní spojme každou kancelář se všemi ostatními kromě té, která je naproti ní. Je tedy jasné, že neexistuje kancelář, ze které lze komunikovat se všemi ostatními. Je splněna i podmínka ze zadání? Mějme zadanou nějakou n-tici kanceláří, označme ji N. Každá z kanceláří z N není spojená s jednou další (která nemusí ležet mimo N), takže ze zbývajících $n + 2$ kanceláří je nejvýše n takových, že nejsou spojené s nějakou kanceláří z N. Z toho plyne, že pro každou n-tici kanceláří nalezneme ne jen jednu, ale dokonce dvě kanceláře, které jsou s nimi všemi spojené. A to se vyplatí!

(b) Pro druhou podúlohu předvedeme dvě řešení:

Řešení přes obarvování dvěma barvami:

Úlohu dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že na ministerstvu neexistuje kancelář, která je spojená potrubní poštou se všemi ostatními. Mezi kancelářemi přidáme ještě několik spojení a ukážeme, že existuje n-tice kanceláří, pro kterou neexistuje další kancelář, která by s každou z nich byla spojená (tím pádem ani před přidáním spojení nemohla být), což bude spor s podmínkou ze zadání.

Ministerstvo znázorníme jako graf. Ten bude mít k vrcholů, kde každý z nich reprezentuje jednu kancelář. Mezi dvěma vrcholy bude hrana, pokud odpovídající kanceláře mezi sebou **nemají** spojení potrubní poštou. Předpoklad, že neexistuje kancelář, která by byla spojená se všemi ostatními, znamená, že z každého vrcholu v námi uvažovaném grafu vede hrana.

Vezměme si dvě barvy – rybízovou a borůvkovou – a budeme postupně obarvovat vrcholy grafu. Podívejme se na libovolnou komponentu grafu (množinu vrcholů, ve které se lze dostat po hranách z jednoho vrcholu do libovolného jiného a k žádnému dalšímu se již dostat nelze). Mohou nastat dvě možnosti. První možnost je, že v komponentě není cyklus. Pak si vybereme jeden vrchol a ten obarvíme rybízovou, všechny vrcholy, které s ním jsou spojené hranou, obarvíme borůvkovou, a tak postupujeme dál – vrcholy, které jsou hranou spojeny s již obarveným vrcholem, obarvíme nepoužitou barvou. Tato konstrukce zajistí, že každý vrchol komponenty bude obarvený, protože z vybraného vrcholu se lze po hranách dostat do všech ostatních vrcholů komponenty. Zároveň každý vrchol má jednoznačně danou barvu, protože komponenta neobsahuje cyklus, a tedy mezi libovolnými dvěma body existuje právě jedna cesta (podél které se střídají barvy).

Obsahuje-li komponenta cykly, pak je postupně projdeme a budeme z nich odebírat hrany, dokud nedostaneme komponentu bez cyklů, a použijeme postup výše. Vzhledem k tomu, že jsme všechny hrany odebrali z cyklů, tak se nám komponenta nemohla rozpadnout.

Nyní máme všechny vrcholy obarvené. Počet vrcholů jedné barvy, nechť je to rybízová, musí být nutně nejvýše n. Víme, že do každého borůvkového vrcholu vede hrana z nějakého rybízového. To znamená, že vezmeme-li množinu n vrcholů, která obsahuje všechny rybízové, pak pro libovolný jiný vrchol bude existovat hrana, která vede do této vybrané n-tice. Převedeno do řeči kanceláří to znamená, že pro takovou n-tici kanceláří neexistuje další kancelář, která by s nimi všemi byla spojená, protože pro každou další kancelář existuje jedna z této n-tice, se kterou není spojená. A dostáváme kýžený spor.

Řešení přes budování velké kliky[2]:
Uvažujme graf s k vrcholy, které reprezentují kanceláře. Mezi dvěma vrcholy bude tentokrát hrana, pokud **mají** spojení potrubní poštou.

Indukcí podle velikosti kliky dokážeme, že takový graf obsahuje kliku o $n+1$ vrcholech. Klikou o jednom vrcholu je zřejmě libovolný vrchol. Mějme tedy kliku velikosti i, kde $i \leq n$. Použijeme podmínku ze zadání na i-tici vrcholů kliky libovolně doplněnou na n-tici. Ta nám říká, že existuje vrchol, který je spojený hranou se všemi vrcholy kliky. To znamená, že ho můžeme přidat do kliky a máme tak kliku velikosti $i+1$.

Mějme tedy kliku o $n+1$ vrcholech. Použijeme podmínku ze zadání na zbylou n-tici vrcholů, čímž dostaneme jeden vrchol kliky, který je spojený se všemi ostatními. Tam se tedy nachází jedna z vysněných kanceláří ministra dopravy.

Poznámky:
Řešení se sešla různorodá. V první části jsem viděl dva různé příklady a dokonce jsem viděl i konstrukci, která využívala indukci. Řada lidí zapomněla zmínit, že zkonstruované ministerstvo neobsahuje kancelář, která je spojená se všemi ostatními. V tomto případě je to zjevné, ale stále by se to mělo říct. V druhé části využívala všechna zcela správná řešení základní myšlenku prvního vzorového řešení. Lišila se v tom, jakým způsobem se vypořádala s cykly. *(Honza „Fanda“ Krejčí)*

[2] Klika je podmnožina množiny vrcholů grafu, jejíž každé dva prvky jsou spojeny hranou.