Pravděpodobnost III

3. seriálová série Termín odeslání: 8. dubna 2019

Úloha 1. (5 bodů)
Každá z náhodných veličin X, Y může nabývat pouze hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Víme, že existuje konstanta c taková, že pro libovolná i, j z této množiny platí

$$\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = c \cdot (i + j).$$

Jsou dané veličiny nezávislé?

Úloha 2. (5 bodů)
Kuba se živí psaním scénářů romantických seriálů. Právě píše scénář, ve kterém je deset postav, přičemž pro každou dvojici z nich si Kuba hodil férovou mincí, aby se rozhodnul, zda se do sebe daní dva lidé zamilují. Jeden člověk tak může být zamilován do libovolného počtu jiných lidí. Každí tři různí lidé, kteří se do sebe navzájem zamilují, tvoří *milostný trojúhelník*. Dokažte, že počet milostných trojúhelníků je alespoň 30 s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

Úloha 3. (5 bodů)
Do ZOO přišlo n různě vysokých orgů a $n + 1$ různě vysokých účastníků. Orgové si v náhodném pořadí stoupli do fronty, aby se mohli pokochat pohledem na roztomilé tuleně. Účastníci si mezitím v náhodném pořadí stoupli do jiné fronty, aby se mohli kochat pohledem na rozkošné lachtany. Každý vidí na dané zvíře právě tehdy, když je vyšší než všichni, kteří stojí ve frontě před ním. O kolik se liší rozptyl náhodné veličiny O, která značí počet orgů vidících na tuleně, od rozptylu náhodné veličiny U, která značí počet účastníků vidících na lachtany?

Pravděpodobnost III

3. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Každá z náhodných veličin X, Y může nabývat pouze hodnot z množiny $\{1,2,3,4,5\}$. Víme, že existuje konstanta c taková, že pro libovolná i, j z této množiny platí

$$\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = c \cdot (i + j).$$

Jsou dané veličiny nezávislé?

(Danil Koževnikov)

Řešení:
Pro spor předpokládejme, že jsou náhodné veličiny nezávislé. Pak pro libovolná i, j ze zadané množiny platí $\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = j)$.

Pokud by jeden z deseti možných jevů nemohl nastat, BÚNO $\mathrm{P}(X = 1) = 0$, tak by platilo $0 = \mathrm{P}(X = 1 \cap Y = 1) = 2c$, což implikuje $c = 0$. Nicméně pro každou náhodnou veličinu musí existovat jev, který nastane s nenulovou pravděpodobností, neboli existují taková $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$, že $0 < \mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = j) = \mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = c(i + j) = 0$, což by byl spor. Tedy pro všechna $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$ platí $\mathrm{P}(X = i) > 0$, $\mathrm{P}(Y = j) > 0$, $\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) > 0$ a rovněž $c \neq 0$.

Nyní již můžeme upravovat:

$$\frac{2}{3} = \frac{2c}{3c} = \frac{\mathrm{P}(X = 1 \cap Y = 1)}{\mathrm{P}(X = 1 \cap Y = 2)} = \frac{\mathrm{P}(X = 1) \cdot \mathrm{P}(Y = 1)}{\mathrm{P}(X = 1) \cdot \mathrm{P}(Y = 2)} = \frac{\mathrm{P}(Y = 1)}{\mathrm{P}(Y = 2)} =$$
$$= \frac{\mathrm{P}(X = 2) \cdot \mathrm{P}(Y = 1)}{\mathrm{P}(X = 2) \cdot \mathrm{P}(Y = 2)} = \frac{\mathrm{P}(X = 2 \cap Y = 1)}{\mathrm{P}(X = 2 \cap Y = 2)} = \frac{3c}{4c} = \frac{3}{4},$$

což je hledaný spor. Zadané náhodné veličiny tedy nejsou nezávislé.

Poznámky:
Většina řešitelů správně předpokládala nezávislost daných veličin a získala spor postupným dosazováním konkrétních hodnot. Část z nich bohužel zapomněla rozlišit případ, kdy $c = 0$ nebo kdy je některá z pravděpodobností rovna nule, čímž v průběhu řešení neošetřila dělení nulou.

(Martin Raška)

Úloha 2.

Kuba se živí psaním scénářů romantických seriálů. Právě píše scénář, ve kterém je deset postav, přičemž pro každou dvojici z nich si Kuba hodil férovou mincí, aby se rozhodnul, zda se do sebe daní dva lidé zamilují. Jeden člověk tak může být zamilován do libovolného počtu jiných lidí. Každí tři různí lidé, kteří se do sebe navzájem zamilují, tvoří milostný trojúhelník. Dokažte, že počet milostných trojúhelníků je alespoň 30 s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

(Danil Koževnikov)

Řešení:
Počet různých trojic postav je $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$. Aby daná trojice tvořila milostný trojúhelník, musí se zamilovat každá ze tří dvojic, tedy musí nastat tři nezávislé jevy, z nichž každý nastává s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Daní tři lidé proto tvoří milostný trojúhelník s pravděpodobností $\frac{1}{8}$.

Zavedeme-li si pro i-tou trojici indikátorovou veličinu X_i, která nabývá hodnoty jedna, tvoří-li daná trojice milostný trojúhelník, a jinak je rovna nule, bude pro střední hodnotu této veličiny platit $\mathrm{E}(X_i) = \frac{7}{8}\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{8}$. Počet milostných trojic X pak můžeme vyjádřit jako součet $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{120}$. Z linearity střední hodnoty plyne

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{120}) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_{120}) = 120\cdot\frac{1}{8} = 15.$$

Nakonec už jen stačí použít Markovovu nerovnost podobně jako v seriálovém textu. Dostáváme

$$\mathrm{P}(X \geq 30) = \mathrm{P}\left(X \geq 2\cdot \mathrm{E}(X)\right) \leq \frac{1}{2},$$

neboli počet milostných trojúhelníků je alespoň třicet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

Poznámky:
Většina řešení postupovala přesně podle toho vzorového. Pozor, pokud je střední hodnota náhodné veličiny 30, neznamená to, že tato veličina nabývá hodnoty větší (či menší) než 30 s poloviční pravděpodobností! Abychom mohli přejít od střední hodnoty k pravděpodobnosti, musíme použít (třeba) Markovovu nerovnost. *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 3.

Do ZOO přišlo n různě vysokých orgů a $n+1$ různě vysokých účastníků. Orgové si v náhodném pořadí stoupli do fronty, aby se mohli pokochat pohledem na roztomilé tuleně. Účastníci si mezitím v náhodném pořadí stoupli do jiné fronty, aby se mohli kochat pohledem na rozkošné lachtany. Každý vidí na dané zvíře právě tehdy, když je vyšší než všichni, kteří stojí ve frontě před ním. O kolik se liší rozptyl náhodné veličiny O, která značí počet orgů vidících na tuleně, od rozptylu náhodné veličiny U, která značí počet účastníků vidících na lachtany?

(Danil Koževnikov)

Kombinatorické řešení:
Představme si obecněji řadu m lidí, kteří se koukají na libovolné ploutvonožce. Pro i-tého člověka si zaveďme indikátorovou veličinu X_i, která je rovna jedné právě tehdy, když dotyčný vidí na zvířátka. Ze zadání víme, že indikují jevy „i-tý člověk je vyšší než všichni před ním“.

Ze symetrie platí $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{i}$, neboť každá poloha nejvyššího člověka z prvních i je stejně pravděpodobná. Zároveň jelikož X_i jsou indikátory, tak pro ně platí $X_i^2 = X_i$, takže $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i) - \mathrm{E}(X_i)^2 = \frac{i-1}{i^2}$.

Pro spočtení rozptylu součtu $\sum_{i=1}^{m} X_i$ ještě ukážeme, že tyto náhodné veličiny jsou po dvou nezávislé. K tomu si stačí pouze rozmyslet, že jevy, jež dané veličiny indikují, jsou nezávislé, neboli $\mathrm{E}(X_iX_j) = \frac{1}{ij}$ pro $i > j$ (X_iX_j je totiž indikátorem jejich průniku).

Spočítejme si, kolik existuje možností pro rozestavení prvních i lidí do řady. Zafixujme si jejich výšky a zkoumejme pouze to, jak je musíme rozestavit, budeme-li je do fronty umisťovat odzadu. Poslední člověk v řadě musí být nejvyšší, takže pro něj máme přesně jednu možnost, analogicky j-tý člověk musí být nejvyšší ze zatím nezvolených, takže i jeho volba je pevně určena těmi předchozími. Naopak ať už zvolíme rozestavení ostatních $i-2$ lidí jakkoliv, tak ti dva stejně uvidí na ploutvonožce, pro k-tého člověka tedy máme k možností a dohromady dostáváme $(i-1)\cdots(j+1)\cdot(j-1)\cdots 1 = \frac{i!}{ij}$ vyhovujících možností. To znamená, že pravděpodobnost, že oba tito lidé uvidí, je $\frac{1}{ij}$, takže zkoumané jevy jsou vskutku nezávislé.

Proto platí $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{i-1}{i^2}$, takže $\mathrm{Var}(U) - \mathrm{Var}(O) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i-1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{i^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$.

Trikové řešení:

Rozptyl náhodných veličin O, U můžeme vyjádřit i zavedením jiných indikátorů (výpočet předvedeme pouze pro O, pro U je postup analogický, až na změnu počtu lidí a zvířete). Nechť Y_i tedy indikuje jev „i-tý nejvyšší org vidí na tuleně“. Potom zjevně $O = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Tyto jevy jsou nezávislé, neboť to, kde stojí nižší orgové, jistě neovlivní to, zda na tuleně uvidí org vyšší. Zároveň jsou ze symetrie všechna pořadí nejvyšších i lidí stejně pravděpodobná a $Y_i = 1$ právě tehdy, když bude ten nejnižší z nich před všemi ostatními, tudíž platí $\mathrm{E}(Y_i) = \frac{1}{i}$ a řešení můžeme dokončit analogicky, jako to první.

Poznámky:

Jediné řešení, které se vydalo trikovou cestou, jsem ocenil kladným imaginárním bodem. Všechna ostatní řešení se víceméně úspěšně vydala tou přímočařejší cestou, body jsem strhával jen, když jste nedokázali nezávislost náhodných veličin, která je pro zdůvodnění korektnosti výše uvedeného výpočtu nezbytná. Nejčastější chybou bylo zaměňování tuleňů za lachtany, nehledě na její závažnost jsem se za ni nakonec rozhodl body nestrhávat :).

(Danil Koževnikov)