Doprava

3. jarní série Termín odeslání: 8. dubna 2019

Úloha 1. (3 body)
Michal byl na dovolené v Indii a jednoho dne si vyrazil na procházku se slonem Bimbem. Když šel ve stejném směru, jako kráčel Bimbo, došel od jeho paty k chobotu na 30 kroků. Pak šel stejně rychle v opačném směru a udělal během cesty od Bimbova chobotu k patě 15 kroků. Jak dlouhý je Bimbo?

Úloha 2. (3 body)
Rado se prochází po Manhattanu, kde ulice tvoří čtverečkovou síť. Vždy, když dojde na křižovatku, si hodí mincí a podle toho, co padne, zahne buď doleva, nebo doprava. Mohl mít takové štěstí, že po 2019 ušlých úsecích skončil tam, kde začínal?

Úloha 3. (3 body)
Pan a paní Novákovi šli se 4 dalšími manželskými páry na autodrom. Každý člověk si půjčil vlastní autíčko a během ježdění do sebe některá autíčka vrážela. Manželé do sebe ovšem nikdy nevrazili. Po skončení jízdy se pan Novák zeptal všech 9 ostatních zúčastněných, s kolika různými lidmi se srazili. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika různými lidmi se srazila paní Nováková?

Úloha 4. (5 bodů)
V Tramvárii se nachází p tramvajových zastávek, kde p je prvočíslo. Mezi každými dvěma zastávkami vede právě jedna přímá kolej, z nichž žádné dvě se nesetkávají jinde než na zastávce. Kolik nejvíce může v Trámvárii jezdit okružních tramvajových linek přes všechny zastávky, pokud žádné dvě linky nesmějí jet po stejné koleji?

Úloha 5. (5 bodů)
Anička jela na hory. Sjezdovky v lyžařském středisku se potkávají v nanejvýš 99 křižovatkách, přičemž mezi dvěma křižovatkami vede vždy maximálně jedna sjezdovka. Žádné dvě křižovatky nejsou ve stejné výšce a na lyžích se dá sjíždět jen dolů. Ukažte, že úseky mezi křižovatkami lze rozdělit na modré a červené takovým způsobem, že Anička není schopná sjet přímo za sebou deset úseků stejné obtížnosti (barvy).

Úloha 6. (5 bodů)
Na souostroví Prasopágy mají velmi zvláštní systém podzemní dopravy – každý ostrov je spojen přímou linkou metra právě se třemi jinými ostrovy. Bylo rozhodnuto, že je pro větší přehlednost třeba jednotlivé úseky metra označit zelenou, žlutou a červenou barvou. Aby bylo byrokracii učiněno zadost, bude úseky střídavě obarvovat ministr dopravy a ministr kultury, přičemž ministr dopravy začíná. V každém kroku si tedy příslušný ministr vybere jeden úsek metra a obarví ho libovolnou barvou. Ministr dopravy by chtěl metro obarvit tak, aby se na žádném ostrově nepotkávaly úseky všech tří barev. Ministr kultury si naopak přeje, aby se na nějakém ostrově linky všech tří barev setkaly. Který z nich umí své přání prosadit?

Úloha 7. (5 bodů)

V Americe se nachází n měst, která jsou spojena jednosměrnými leteckými linkami. V každém z těchto měst se nachází pamětihodnost. Cestovní kancelář chce zřídit v některých amerických městech pobočky, aby ke každé pamětihodnosti mohla uspořádat zájezd začínající v některé ze svých poboček za pomoci nejvýše dvou leteckých linek. Zároveň si chce počínat ekonomicky – nechce, aby měla pobočky ve dvou městech spojených leteckou linkou. Dokažte, že to vždy může zařídit.

Úloha 8. (5 bodů)

V Chrochrostánu je m měst, přičemž některé dvojice měst jsou spojeny železnicí. Je známo, že z každého města vede přesně $2nk$ železničních tratí. V Chrochrostánu dále sídlí mn přepravních společností a každá by ráda provozovala právě k tratí. Každá společnost přitom chce, aby všechny její tratě začínaly ve stejném městě. Dokažte, že si tak společnosti tratě skutečně umí rozdělit.

Doprava

3. jarní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Michal byl na dovolené v Indii a jednoho dne si vyrazil na procházku se slonem Bimbem. Když šel ve stejném směru, jako kráčel Bimbo, došel od jeho paty k chobotu na 30 kroků. Pak šel stejně rychle v opačném směru a udělal během cesty od Bimbova chobotu k patě 15 kroků. Jak dlouhý je Bimbo?

(Viki Němeček)

Řešení:

Označme b délku slona Bimba měřenou v Michalových krocích.

Z prvního případu vyjádříme úsek, který Bimbo ušel, vztahem $s_1 = 30 - b$, neboť Michal musel ujít nejen celou délku od paty k chobotu, ale i úsek s_1. Z druhé procházky dostaneme vzdálenost, kterou slon urazil, než se Michal dostal k ocasu, výrazem $s_2 = b - 15$. Dále si uvědomme, že se rychlosti slona a Michala nezměnily. Pokud tedy Michal v druhém případě ušel pouze poloviční trasu, muselo se stát to samé i Bimbovi. Z toho plyne $s_1 = 2s_2$.

Vyřešíme soustavu rovnic dosazením

$$\begin{aligned} s_1 &= 30 - b, \\ 2s_2 &= 30 - b, \\ 2 \cdot (b - 15) &= 30 - b, \\ 3b &= 60, \\ b &= 20. \end{aligned}$$

Bimbo je tedy dlouhý 20 Michalových kroků.

Poznámky:

Z došlých řešení byla většina správná a od vzorového řešení se lišila vyjádřeními různých vztahů mezi délkami, rychlostmi a časy. Pouze několik řešitelů si neuvědomilo, že se Bimbova trasa musela zmenšit stejně jako Michalova, ti proto došli k nesprávnému výsledku. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 2.

Rado se prochází po Manhattanu, kde ulice tvoří čtverečkovou síť. Vždy, když dojde na křižovatku, si hodí mincí a podle toho, co padne, zahne buď doleva, nebo doprava. Mohl mít takové štěstí, že po 2019 ušlých úsecích skončil tam, kde začínal?

(Rado van Švarc)

Řešení přes stejný počet úseků protilehlými směry:
Nechť jsou ulice na Manhattanu orientované severojižně a východozápadně. Předpokládejme, že Rado skončil na stejné křižovatce, kde začínal. Pak počet úseků, které Rado ušel směrem na sever, musí být stejný jako počet úseků, které Rado ušel směrem na jih. Obdobně počet úseků ušlých směrem na západ musí být stejný jako počet úseků ušlých směrem na východ. Proto musel projít sudý počet severojižních a sudý počet západovýchodních úseků. Celkem tedy Rado ušel sudý počet úseků, což je ale spor, protože podle zadání ušel 2019 úseků. Rado tedy nemohl skončit tam, kde začínal.

Řešení šachovnicovým obarvením:
Obarvíme si křižovatky Manhattanu na černé a bílé jako na nekonečné šachovnici. Pak z černé křižovatky dojdeme kterýmkoliv jedním ušlým úsekem na bílou křižovatku a z bílé křižovatky dojdeme kterýmkoliv jedním ušlým úsekem na černou křižovatku. Nyní BÚNO předpokládejme, že křižovatka, na které Rado začínal, je černá. Pak tedy po lichém počtu ušlých úseků musel Rado skončit na bílé křižovatce, a tudíž i po 2019 ušlých úsecích musel skončit na bílé, což znamená, že nemohl skončit tam, kde začínal.

Poznámky:
Celkově se sešlo velké množství řešení, přičemž většina z nich kopírovala jeden z postupů nastíněných výše. Úloha byla velmi jednoduchá, a proto jsem se rozhodl být trochu přísnější vůči zápisu řešení. Díval jsem se hlavně na to, jestli bylo řešení kompletní, nebyly v něm myšlenkové skoky a jestli byl sled myšlenek dostatečně vysvětlený. Pokud jste náhodou ztratili bod nebo dva, neberte to tedy jako špatně vyřešenou úlohu, ale jako prostor pro zlepšení svých zápisů řešení!

(Jáchym Solecký)

Úloha 3.

Pan a paní Novákovi šli se 4 dalšími manželskými páry na autodrom. Každý člověk si půjčil vlastní autíčko a během ježdění do sebe některá autíčka vrážela. Manželé do sebe ovšem nikdy nevrazili. Po skončení jízdy se pan Novák zeptal všech 9 ostatních zúčastněných, s kolika různými lidmi se srazili. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika různými lidmi se srazila paní Nováková?

(Viki Němeček, Marian Poljak)

Řešení:
Celkem bylo na autodromu 10 lidí. Víme, že nikdo se nesrazil sám se sebou ani se svým manželem nebo manželkou. Každý tedy mohl narazit do nejvýše osmi lidí. Aby pan Novák dostal devět různých výsledků, počty srážek nutně musely být 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Označme si zúčastněné kromě pana Nováka podle počtu srážek: $X_0, X_1, \ldots, X_8$.

Víme, že X_8 se srazil se všemi kromě jednoho člověka, to musel(a) být nutně jeho manžel(ka). Jediný, kdo se nesrazil s nikým, je X_0, všichni ostatní mají alespoň jednu srážku, a to s X_8. Z toho plyne, že X_8 a X_0 musí být manželé. Pro ostatní páry postupujeme podobně. X_7 se srazil se všemi kromě dvou lidí, jedním z nich je X_0 a partner X_7. Všichni kromě X_0 a X_1 mají alespoň dvě srážky (s X_8 a X_7), tedy X_7 a X_1 tvoří manželský pár. Stejnou úvahou spárujeme X_6 a X_2, X_5 a X_3.

Zbývá nám pouze osoba X_4, která v označené skupině nemá protějšek, takže to musí být paní Nováková. Paní Nováková se tedy srazila se čtyřmi lidmi.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a postupovala velmi podobně jako vzorové řešení.

(Michal Töpfer)

Úloha 4.

V Tramvárii se nachází p tramvajových zastávek, kde p je prvočíslo. Mezi každými dvěma zastávkami vede právě jedna přímá kolej, z nichž žádné dvě se nesetkávají jinde než na zastávce. Kolik nejvíce může v Tramvárii jezdit okružních tramvajových linek přes všechny zastávky, pokud žádné dvě linky nesmějí jet po stejné koleji? *(Jakub Löwit)*

ŘEŠENÍ:

Pro $p = 2$ vede v Tramvárii právě jedna kolej a tedy zde neexistuje okružní linka.

Pro $p > 2$ vede z každého města $p - 1$ kolejí a protože máme p měst a každá kolej vede mezi dvěma městy, existuje v Tramvárii právě $\frac{p(p-1)}{2}$ kolejí. Každá okružní jízda přes všechna města projede právě p kolejí, a proto může v Tramvárii existovat maximálně $\frac{p-1}{2}$ okružních linek. Protože p je liché, je toto číslo celé.

Nyní ještě potřebujeme najít takovou konstrukci okružních linek v Tramvárii, aby linek bylo $\frac{p-1}{2}$. Očíslujme si tedy zastávky v Tramvárii postupně od 0 do $p - 1$. Poté můžeme v Tramvárii zvolit následující okružní linky:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 0, 1, 2, \dots, p \pmod p, \\
(2) & 0, 2, 4, \dots, 2p \pmod p, \\
\vdots & \\
(\mathrm{i}) & 0, i \pmod p, 2i \pmod p, \dots, pi \pmod p, \\
\vdots & \\
(\frac{p-1}{2}) & 0, \frac{p-1}{2} \pmod p, 2 \cdot \frac{p-1}{2} \pmod p, \dots, p \cdot \frac{p-1}{2} \pmod p.
\end{array}
$$

Jinými slovy to jsou linky, které začínají na nule, tvoří je p úseků a v každém úseku se posunou o i měst jedním směrem, kde i jde od 1 do $\frac{p-1}{2}$. Snadno vidíme, že všechny takové linky opět končí v nule.

Nyní stačí ukázat, že tyto linky jsou disjunktní a každá z nich prochází všemi zastávkami. Pro to si stačí uvědomit, že na jedné lince mají všechny úseky stejný rozdíl čísel zastávek modulo p, který je navíc pro každou okružní linku jiný. Díky tomu jsou všechny linky disjunktní.

Zbývá ukázat, že námi nalezené linky jsou skutečně okružní, tj. že každé dvě zastávky s výjimkou poslední jsou různé, čímž budeme mít p různých zastávek na každé lince. Pro spor nechť se tramvaj na i-té lince po projetí $k < p$ a $\ell < p$ cest nachází ve stejném městě. Pak $ik \equiv i\ell \pmod p$ a protože i není dělitelné p, platí i $k \equiv \ell \pmod p$. Ale protože k i ℓ jsou menší než p, tak $k = \ell$.

Zkonstruovali jsme tak $\frac{p-1}{2}$ vyhovujících okružních linek a správná odpověď je tedy $\frac{p-1}{2}$.

POZNÁMKY:

Mnoho řešitelů pouze nalezlo, že okružních linek může být maximálně $\frac{p-1}{2}$, ale již se tento případ nepokusilo zkonstruovat. Tím si vysloužili pouze 2 body. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Úloha 5.

Anička jela na hory. Sjezdovky v lyžařském středisku se potkávají v nanejvýš 99 křižovatkách, přičemž mezi dvěma křižovatkami vede vždy maximálně jedna sjezdovka. Žádné dvě křižovatky nejsou ve stejné výšce a na lyžích se dá sjíždět jen dolů. Ukažte, že úseky mezi křižovatkami lze rozdělit na modré a červené takovým způsobem, že Anička není schopná sjet přímo za sebou deset úseků stejné obtížnosti (barvy).

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Křižovatky si seřadíme podle nadmořské výšky a očíslujeme je čísly $1, 2, \dots, n$, přičemž křižovatce na nejvyšším místě přiřadíme jedničku, nejnižší číslo n. Speciálně budou všechna čísla vždy nejvýše dvouciferná. Každý úsek sjezdovky, který spojuje dvě křižovatky mající stejnou číslici na místě desítek[1], obarvíme modře. Zbylé úseky obarvíme červeně.

Předpokládejme, že Anička sjíždí za sebou úseky modré barvy. Jelikož stejnou číslici na místě desítek má maximálně deset křižovatek, znamená to, že Anička může projet maximálně devět úseků modré barvy.

Pokud Anička sjíždí pouze úseky červené barvy, musí cestou navštívit pouze křižovatky s po dvou různými číslicemi na místě desítek (po každém úseku se musí číslo na místě desítek změnit, a může se pouze zvýšit). Existuje nejvýše deset různých číslic, proto může Anička projet maximálně devět úseků červené barvy.

Poznámky:

Řešení se sešlo (na to, že jde o pátou úlohu) relativně málo. Velká část ze správných řešení se držela výše uvedeného argumentu, někteří zvolili jinou konstrukci indukcí. *(Tonda Češík)*

Úloha 6.

Na souostroví Prasopágy mají velmi zvláštní systém podzemní dopravy – každý ostrov je spojen přímou linkou metra právě se třemi jinými ostrovy. Bylo rozhodnuto, že je pro větší přehlednost třeba jednotlivé úseky metra označit zelenou, žlutou a červenou barvou. Aby bylo byrokracii učiněno zadost, bude úseky střídavě obarvovat ministr dopravy a ministr kultury, přičemž ministr dopravy začíná. V každém kroku si tedy příslušný ministr vybere jeden úsek metra a obarví ho libovolnou barvou. Ministr dopravy by chtěl metro obarvit tak, aby se na žádném ostrově nepotkávaly úseky všech tří barev. Ministr kultury si naopak přeje, aby se na nějakém ostrově linky všech tří barev setkaly. Který z nich umí své přání prosadit? (Jakub Löwit)

Řešení:

Své přání si vždy umí prosadit ministr kultury. Ministr kultury bude hrát tak, aby vždy před jeho tahem byly z každého ostrova obarveny buď tři linky z něj vedoucí, nebo nejvýše jedna. Zároveň vždy zajistí, aby existoval alespoň jeden ostrov, ze kterého povede právě jeden obarvený tunel. To je vždy a triviálně po prvním tahu ministra dopravy splněno.

Pokud ministr kultury nemůže svým tahem uzavřít cyklus, pak si vybere ostrov s jednou obarvenou linkou a obarví druhou z něj vedoucí linku jinou barvou. Aby ministr dopravy v následujícím tahu neprohrál, musí obarvit třetí linku. Tím se nemůže uzavřít cyklus, protože jinak by tuto linku mohl už prve obarvit ministr kultury. Z toho také plyne, že oba tyto úseky vedou na ostrov, ze kterého předtím nevedla žádná obarvená linka. Po těchto tazích tedy vzniknou nové ostrovy s jednou obarvenou linkou a současně nevzniknou žádné se dvěma.

Pokud naopak ministr kultury může uzavřít cyklus, může to udělat spojením dvou ostrovů, ze kterých vedla právě jedna obarvená linka. To znamená, že může vybrat barvu nepoužitou na těchto sousedních linkách a obarvit s ní linku kompletující cyklus. Takto ministr kultury hrozí obarvením třetí linky u obou ostrovů třetí barvou. Ministr dopravy může zabránit pouze jedné z těchto hrozeb, čímž však nezabrání ministru kultury ve výhře.

Zároveň stále existuje v průběhu hry ostrov, který má obarvenou jen jednu linku. A protože je souostroví konečné, musí někdy nastat druhý případ a ministr kultury tak skutečně vyhraje.

Poznámky:

Úloha byla náročná obzvláště na přesnou argumentaci – velká většina řešitelů měla hlavní myšlenku strategie ministra kultury, ale úspěšně se vypořádat se všemi problémy, které mohly při jejich postupu potenciálně nastat, se povedlo jen části z nich. *(Pavel Hudec)*

[1] U čísel $1, 2, \ldots, 9$ uvažujeme číslici 0.

Úloha 7.

V Americe se nachází n měst, z nichž některá jsou spojena jednosměrnými leteckými linkami. V každém z těchto měst se nachází význačná pamětihodnost. Cestovní kancelář chce zřídit v některých amerických městech pobočky, aby ke každé pamětihodnosti mohla uspořádat zájezd začínající v některé ze svých poboček za pomoci nejvýše dvou leteckých linek. Zároveň si chce počínat ekonomicky – nechce, aby měla pobočky ve dvou městech spojených leteckou linkou. Dokažte, že to vždy může zařídit.

(Pavel Hudec)

Řešení:

Budeme postupovat indukcí podle n, předpokládejme, že pro libovolné rozmístění linek na méně než n vrcholech tvrzení platí. Pro $n = 0$ zvolíme prázdnou množinu měst, pro $n = 1$ je tvrzení triviální

Zvolíme si město x a označme X množinu měst, do kterých vede z x přímé letecké spojení. Pro naši množinu měst bez x a X tvrzení platí, můžeme tedy podle indukčního předpokladu rozmístit pobočky tak, aby splňovaly podmínky v zadání. Pokud nyní vede z města s pobočkou linka do x, pak se dá dostat do x i X za pomoci nejvýše dvou leteckých linek, tedy pobočky takto rozmístit umíme. Pokud žádná taková linka nevede, pak už město x není spojeno s žádným městem s pobočkou. Proto můžeme do x přidat pobočku a máme vyhovující rozmístění poboček i pro n měst.

Poznámky:

Úloha byla triková a došla pouze dvě správná řešení. Jedním z přístupů, který mohl v této úloze vést k cíli, bylo zjistit, že přímočará indukce nefunguje a pokusit se ji nějak opravit.

(Pavel Hudec)

Úloha 8.

V Chrochrostánu je m měst, přičemž některé dvojice měst jsou spojeny železnicí. Je známo, že z každého města vede přesně $2nk$ železničních tratí. V Chrochrostánu dále sídlí mn přepravních společností a každá by ráda provozovala právě k tratí. Každá společnost přitom chce, aby všechny její tratě začínaly ve stejném městě. Dokažte, že si tak společnosti tratě skutečně umí rozdělit.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Trati v grafu si zorientujeme tak, aby do každého města vjíždělo nk tratí a dalších nk vyjíždělo. Potom jednoduše do každého města umístíme n společností a libovolně jim rozdělíme po k tratích vyjíždějících z města ven.

Zbývá ukázat, že tratě skutečně umíme zorientovat tak, že jich do města vchází tolik, kolik jich vychází ven. To ve skutečnosti umíme kdykoliv každým městem prochází sudý počet tratí. Toto tvrzení ukážeme indukcí podle celkového počtu tratí.

Pokud nejsou tratě žádné – je jich nula, je tvrzení zjevné.

Nyní, nechť je tratí $k > 0$ a my už umíme tvrzení ukázat pro všechny počty tratí menší než k. Podívejme se do libovolného města A, kterým nějaká trať prochází. Následně se vydáme po libovolné trati do vedlejšího města a v každém dalším městě nasedneme na zatím neprojetou trať. Toto opakujeme tak dlouho, dokud se nevrátíme do A. Proč tento postup funguje? Kdyby nefungoval, museli bychom někdy přijet do nějakého města B tak, že už bychom nemohli přeskočit na žádnou trať, kterou jsme zatím neprojeli. Ale tratí skrz B vede sudý počet, při každém předchozím průchodu jsme počet použitelných tratí snížili o dva a nyní jsme příjezdem ještě počet použitelných tratí snížili o jedna. To ale znamená, že jsme zatím v B použili lichý počet tratí, což je spor s tím, že jsme je použili všechny.

Časem se tedy vrátíme zpátky do A. Nyní všechny trati na uvedené cestě zorientujeme podle toho, jakým směrem jsme se po nich pohybovali. Následně si představíme, že všechny tyto projeté tratě dočasně zmizely. Z indukčního předpokladu pak zbylé tratě umíme zorientovat požadovaným způsobem, takže po zpětném přidání dočasně zapomenutých tratí máme hotovo (protože jsme do každého města přijeli tolikrát, kolikrát jsme z něj odjeli).

Poznámky:
Velká část řešení spočívala pouze v tom, že řešitelé prohlásili, že do každého města dají n společností a potom to početně vyjde. Nijak ovšem neřekli, jak to udělají. Protože to, jak se to udělá, je ta těžší část úlohy, nedával jsem za toto prohlášení žádné body.

Někteří řešitelé, znalejší v teorii grafů, se odvolávali na znalost eulerovského tahu. Tam je třeba nezapomenout, že v grafu existuje eulerovský tah právě tehdy, když každý vrchol má sudý stupeň a *graf je souvislý.* Proto nejde eulerovský tah použít přímo, ale je třeba ho vyrobit na každé komponentě souvislosti zvlášť. *(Rado van Švarc)*