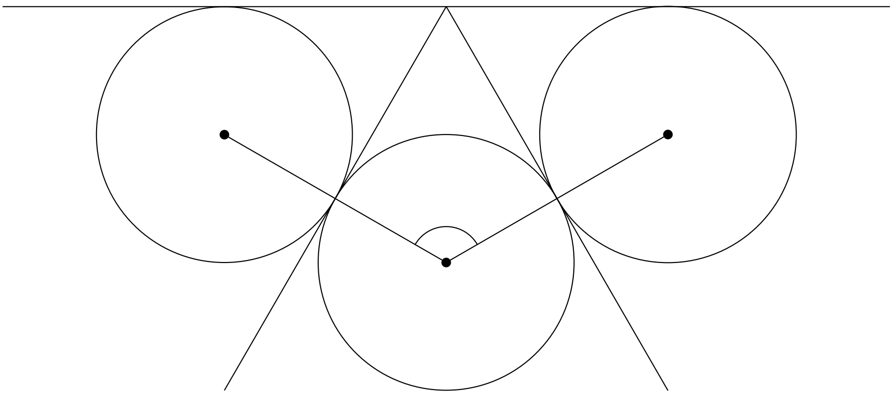
Tečny

2. jarní série Termín odeslání: 4. března 2019

Úloha 1. (3 body)

Petr si do sešitu namaloval takovýto obrázek tvořený třemi jednotkovými kružnicemi a jejich společnými tečnami, které procházejí jedním bodem. Všiml si, že krajní kružnice se dotýkají prostřední kružnice. Jakou velikost má vyznačený úhel?



Úloha 2. (3 body)

E.T. nakreslil do roviny tři jednotkové kružnice a tři přímky tak, aby žádné dvě kružnice ani žádné dvě přímky nesplývaly a každá přímka se dotýkala všech tří kružnic. Nalezněte nějaký možný obsah trojúhelníku vytvořeného ze středů těchto kružnic.

Úloha 3. (3 body)

Nechť $ABCD$ je lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice opsaná trojúhelníku BCD protne přímku DA v bodě E různém od D. Ukažte, že CB je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABE.

Úloha 4. (5 bodů)

Na straně AC trojúhelníku ABC leží bod X. Na stranách AB a BC nalezneme takové body P a Q, aby PX byla tečna ke kružnici opsané XBC a QX byla tečna ke kružnici opsané XBA. Ukažte, že přímka PQ je rovnoběžná s AC.

Úloha 5. (5 bodů)

Kružnice k a l se protínají ve dvou bodech, jeden z nich označme B. Tečna ke kružnici l procházející bodem B protíná kružnici k podruhé v bodě A. Analogicky tečna ke kružnici k procházející bodem B protíná kružnici l podruhé v bodě C. Označme M druhý průsečík kružnice k a přímky AC a N druhý průsečík kružnice l a přímky AC. Ukažte, že pokud body leží na přímce AC v pořadí A, N, M, C, pak platí $2|MN| < |AC|$.

Úloha 6. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě K. Označme M střed oblouku[1] BAC. Druhý průsečík přímky MK s kružnicí opsanou ABC označíme D. Tečny ke kružnici opsané ABC z bodů A a D se protínají v bodě T. Nechť R je průsečík kolmice na AK v bodě A s kolmicí na DK v bodě D. Ukažte, že body T, R a K leží na jedné přímce.

Úloha 7. (5 bodů)

Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k. Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k, body dotyku pojmenovala A a B. Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ. Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L. Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protla k podruhé v bodě T. Ukažte, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\sphericalangle PBT| = |\sphericalangle QLA|$.

Úloha 8. (5 bodů)

Buď ABC trojúhelník splňující $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA|$. Označme ω kružnici jemu opsanou. Nechť tečna k ω z bodu A protíná přímku BC v bodě E. Buď Ω kružnice procházející bodem B, které se přímka AC dotýká v bodě C. Nechť přímka AB podruhé protíná Ω v bodě F. Z bodu E vedeme tečnu k Ω s bodem dotyku K tak, aby body A a K byly na různých stranách od přímky BC. Označme M střed oblouku BC na ω neobsahujícího A. Ukažte, že $AFMK$ je tětivový čtyřúhelník.

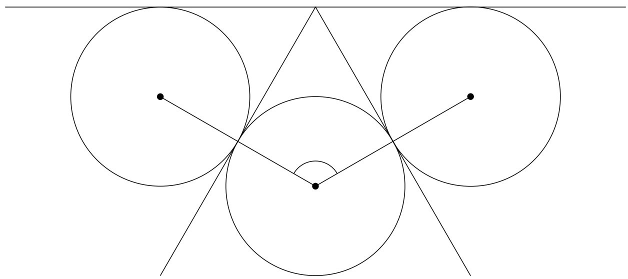
[1] Obloukem BAC myslíme oblouk s koncovými body B a C procházející bodem A.

Tečny

2. jarní série | Vzorové řešení

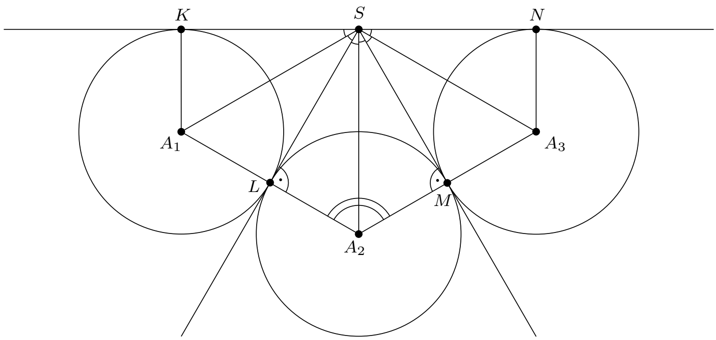
Úloha 1.

Petr si do sešitu namaloval takovýto obrázek tvořený třemi jednotkovými kružnicemi a jejich společnými tečnami, které procházejí jedním bodem. Všiml si, že krajní kružnice se dotýkají prostřední kružnice. Jakou velikost má vyznačený úhel?



(Petr Gebauer)

Řešení:
Označme si body jako na obrázku: S průsečík tečen, A_1, A_2, A_3 středy kružnic a K, L, M, N body dotyku.



Nejprve ukážeme, že délky úseček SK, SL, SM a SN jsou stejně velké. To platí, neboť každá ze tří dvojic po sobě jdoucích úseček tvoří dvojici tečen z bodu S k jedné ze tří kružnic. Proto jsou tyto dvojice úseček – a tím pádem i všechny čtyři úsečky – stejně dlouhé. Pak trojúhelníky SKA_1,

SLA_1, SLA_2, SMA_2, SMA_2 a SNA_2 jsou shodné podle věty *sus*: strany od středu kružnice k bodu dotyku mají délku 1 a úhly mezi poloměry a tečnami jsou vždy $90°$.

Pak jsou úhly u vrcholu S shodné, a tedy $|\sphericalangle LSM| = |\sphericalangle LSA_2| + |\sphericalangle A_2SM| = 2 \cdot \frac{180°}{6} = 60°$. Protože máme $|\sphericalangle SLA_2| = |\sphericalangle SMA_2| = 90°$, umíme ze součtu úhlů ve čtyřúhelníku dopočítat hledaný úhel $|\sphericalangle LA_2M| = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$

Poznámky:
Většina řešitelů použila postup podobný vzorovému řešení. Úloha se dala ale nahlédnout i třeba pomocí překlopení obrázku podle horní tečny a využití vzniklého pravidelného šestiúhelníku.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 2.

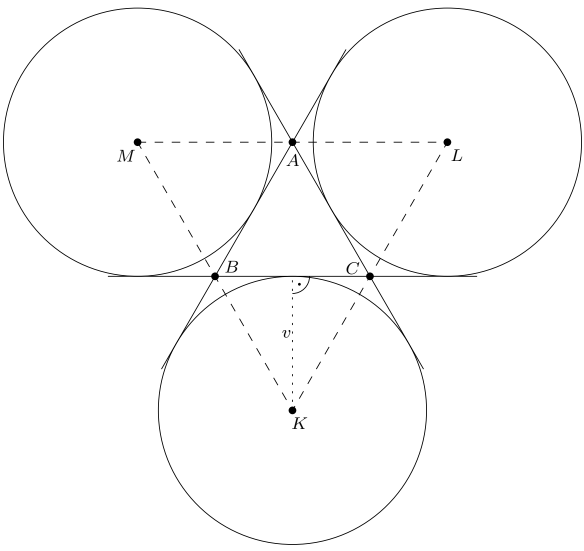
E.T. nakreslil do roviny tři jednotkové kružnice a tři přímky tak, aby žádné dvě kružnice ani žádné dvě přímky nesplývaly a každá přímka se dotýkala všech tří kružnic. Nalezněte nějaký možný obsah trojúhelníku vytvořeného ze středů těchto kružnic.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Vezměme si rovnostranný trojúhelník ABC a připišme mu kružnice se středy K, L, M. Ty jsou zřejmě všechny stejně velké. Najdeme tedy takovou délku strany trojúhelníku ABC, aby připsané kružnice byly jednotkové. Zadání je splněno, neboť připsané kružnice se dotýkají všech tří přímek vytvořených prodloužením stran trojúhelníku.

Úsečka spojující K a B je osou vnějšího úhlu $\triangle ABC$, velikost úhlu $\sphericalangle CBK$ je tedy $60°$. Aplikováním podobného pozorování na další vrcholy trojúhelníku a středy kružnic dostaneme další tři rovnostranné trojúhelníky, které jsou díky společným stranám stejně velké jako $\triangle ABC$. Dohromady tyto čtyři trojúhelníky tvoří rovnostranný trojúhelník KLM (body K, B, a M leží na jedné přímce, protože u vrcholu B se sečtou tři úhly velikosti $60°$; obdobně pro zbylé strany).

Výška trojúhelníku CKB je rovna poloměru kružnic, je to tedy 1 jednotka. Snadno spočteme délku strany tohoto trojúhelníku: $|CB| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot v = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Jeho obsah je pak $S_{CKB} = \frac{|CB|v}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Díky shodnosti malých trojúhelníků už snadno dostaneme obsah trojúhelníku tvořeného středy kružnic: $S_{KLM} = 4 \cdot S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Poznámky:

Téměř všechna řešení postupovala velmi podobně jako vzorové. Jen doplním, že vzhledem k formulaci zadání úlohy skutečně nebylo potřeba zjišťovat, jestli toto rozložení je jediné možné.

(Michal Töpfer)

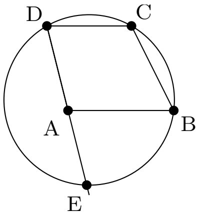
Úloha 3.

Nechť $ABCD$ je lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice opsaná trojúhelníku BCD protne přímku DA v bodě E různém od D. Ukažte, že CB je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABE.

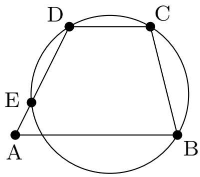
(Rado van Švarc)

Řešení:

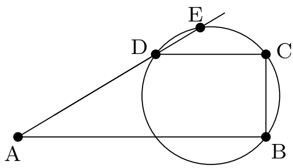
Nejprve si všimněme, že body B, C, D a E leží (v nějakém pořadí) na společné kružnici. K důkazu využijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu. Rozebereme tři případy podle polohy bodu E, viz obrázek.



Případ 1



Případ 2a



Případ 2b

(1) $E \notin \overrightarrow{AD}$: Potřebujeme ukázat $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ABC|$. Z rovnoběžnosti přímek AB a CD dostáváme $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCD| = 180°$. Body C a E leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce BD, platí tedy

$$|\sphericalangle ABC| = 180° - |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEB|\,.$$

Jelikož však $E \notin \overrightarrow{AD}$, jsou úhly $\sphericalangle DEB$ a $\sphericalangle AEB$ totožné.

(2) $E \in \overrightarrow{AD}$: Potřebujeme ukázat $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle EBC|$. Obdobně jako v předchozím případě $|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle DAB| = 180°$. Mohou nastat dvě možnosti, kde může ležet bod E:

(a) $E \in AD$. V tomto případě leží body B a D v opačných polorovinách vzhledem k přímce EC, tudíž

$$|\sphericalangle EBC| = 180° - |\sphericalangle EDC| = 180° - |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle EAB|\,.$$

(b) $E \notin AD$. body B a D nyní leží ve sletjné polorovině vzhledem k přímce EC a tedy

$$|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle EDC| = 180° - |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle EAB|\,,$$

čímž jsme ověřili poslední možný případ.

Alternativní řešení (podle Matěje Doležálka):

Označme (p, q) orientovaný úhel mezi přímkami p a q, tj. úhel, o který musíme otočit přímku p proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímku q. Pro čtyři body K, L, M, N ležící na společné kružnici pak platí

$$(KM, ML) = (KN, NL)$$

nezávisle na jejich pořadí.

Obdobnou vlastnost má orientovaná verze věty o obvodovém a úsekovém úhlu. Pro kružnici k a libovolné na ní ležící body P, Q, R tvrdí, že přímka t procházející bodem R je tečnou k právě tehdy, když

$$(PQ, QR) = (PR, t)\,.$$

Nyní nám stačí tato pozorování spojit:

$$(AE, EB) = (DE, EB) = (DC, CB) = (AB, CB)\,,$$

přičemž rovnost prvního a posledního členu jsme chtěli ukázat.

Poznámky:

Úloha byla trochu nepříjemná kvůli více možným případům polohy bodu E, které bylo třeba alespoň částečně řešit zvlášť. Mnoho řešitelů vyřešilo pouze jednu variantu a na zbylé konfigurace zcela zapomnělo, za což jsem strhával jeden bod. Pokud naopak bylo řešení zcela kompletní, uděloval jsem bonusové $+i$.

V geometrických úlohách občas nastává problém s řešením několika dost podobných, nicméně přece jen různých, konfigurací. Dokud jsou tyto konfigurace tři jako v tomto případě, je to ještě celkem v pohodě, ale když je jich ještě o dost víc, tak se opravdu hodí používat při sepisování orientované úhly jako zde v alternativním řešení. Přitom klasicky stačí úlohu vyřešit v jedné konfiguraci a posléze jen ověřit, zda řešení po přepsání do orientovaných úhlů nevyřeší všechny.

(Tomáš Novotný)

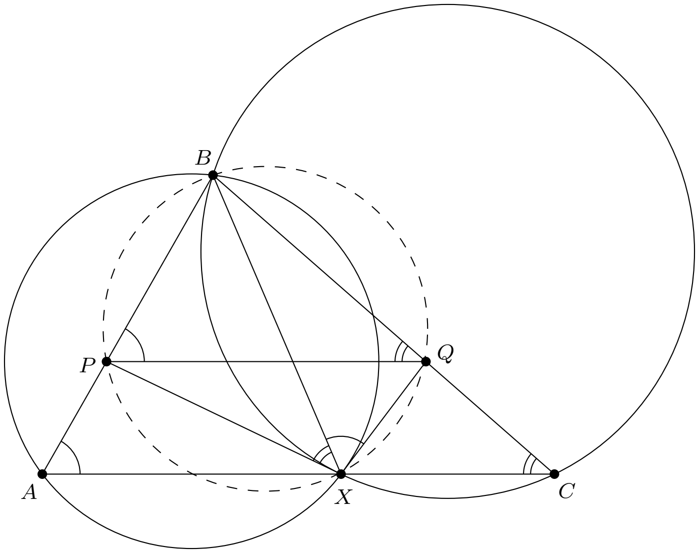
Úloha 4.

Na straně AC trojúhelníku ABC leží bod X. Na stranách AB a BC nalezneme takové body P a Q, aby PX byla tečna ke kružnici opsané XBC a QX byla tečna ke kružnici opsané XBA. Ukažte, že přímka PQ je rovnoběžná s AC.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Označíme si úhly v trojúhelníku ABC postupně α, β, γ. Úhel $\sphericalangle BXP$ je úsekový úhel příslušný k obloukovému úhlu $\sphericalangle BCX$, z toho plyne $|\sphericalangle BXP| = |\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle ACB| = \gamma$. Analogicky dostaneme $|\sphericalangle BXQ| = |\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$. Ve čtyřúhelníku $BPXQ$ je součet úhlu $\sphericalangle PXQ$ a $\sphericalangle PBQ$ roven $180°$, neboť platí $|\sphericalangle PXQ| + |\sphericalangle PBQ| = |\sphericalangle PXB| + |\sphericalangle PXQ| + |\sphericalangle ABC| = \alpha + \beta + \gamma = 180°$. Čtyřúhelník $BPQX$ je proto tětivový. Úhly nad obloukem BP tedy mají stejnou velikost, $|\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle BXP| = \gamma$, dále $|\sphericalangle BQP| = \gamma = |\sphericalangle BCA|$ a příslušné úhly, které svírají přímky PQ s BC a AC s BC, jsou souhlasné. Z toho plyne, že PQ je rovnoběžná s AC.



Poznámky:
Většina řešení postupovala velmi podobně jako vzorové řešení, a tím si vysloužila plný počet bodů. V geometrických úlohách je ale třeba dbát na správnost a konzistenci značení (např. úhlů), jinak některé rovnosti nemusí obecně platit. Podobné drobné chyby se u několika řešitelů objevily, body jsem za ně nestrhávala. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 5.

Kružnice k a l se protínají ve dvou bodech, jeden z nich označme B. Tečna ke kružnici l procházející bodem B protíná kružnici k podruhé v bodě A. Analogicky tečna ke kružnici k procházející bodem B protíná kružnici l podruhé v bodě C. Označme M druhý průsečík kružnice k a přímky AC a N druhý průsečík kružnice l a přímky AC. Ukažte, že pokud body leží na přímce AC v pořadí A, N, M, C, pak platí $2|MN| < |AC|$.

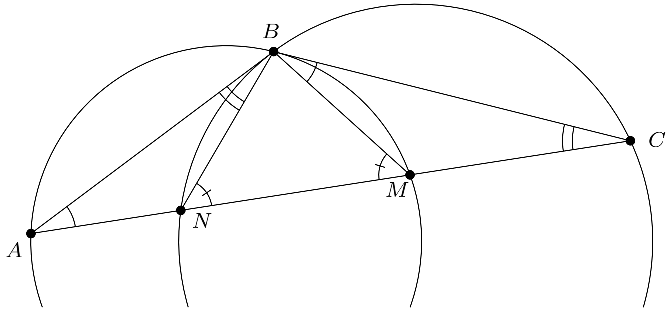
(Jakub Löwit)

Řešení (volně podle Michala Beránka):

Úhel $\sphericalangle MBC$ je úsekový k $\sphericalangle BAM$ a úhel $\sphericalangle NBA$ je úsekový k $\sphericalangle BCN$, tedy $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle BAC|$ a $|\sphericalangle NBA| = |\sphericalangle BCA|$. Z věty *uu* plyne, že trojúhelníky BCM a ABN jsou podobné.

Díky této podobnosti víme, že $|\sphericalangle BNM| = 180^\circ - |\sphericalangle BNA| = 180^\circ - |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BMN|$, a tedy trojúhelník NBM je rovnoramenný, takže platí $|BN| = |BM|$. BÚNO předpokládejme $|BM| = 1$, dále označme $|CM| = y$. Z podobnosti trojúhelníků BCM a ABN máme $\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|BM|}{|CM|}$, což můžeme přepsat jako $|AN| = \frac{1}{y}$. Z trojúhelníkové nerovnosti v NBM víme, že $|MN| < 2$. Použitím AG nerovnosti dostaneme

$$|MN| < 2 \le y + \frac{1}{y} = |CM| + |AN|,$$
$$2|MN| < |CM| + |AN| + |MN| = |AC|.$$



Poznámky:

Skoro všechna řešení byla správná, zpravidla se lišila pouze v druhé (odhadovací) části. Tam bylo možné místo AG nerovnosti použít pouze trojúhelníkovou nerovnost nebo sinovou či kosinovou větu. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Úloha 6.

V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC stranu BC v bodě K. Označme M střed oblouku[1] *BAC. Druhý průsečík přímky MK s kružnicí opsanou ABC označíme D. Tečny ke kružnici opsané ABC z bodů A a D se protínají v bodě T. Nechť R je průsečík kolmice na AK v bodě A s kolmicí na DK v bodě D. Ukažte, že body T, R a K leží na jedné přímce.*

(Rado van Švarc)

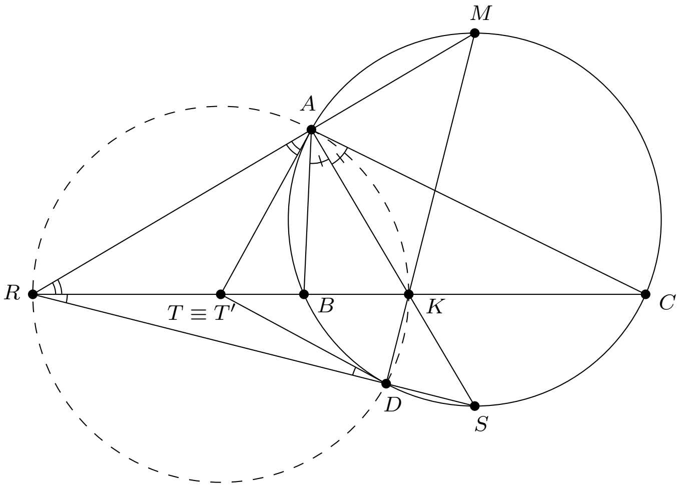
Řešení:

Označme S druhý průsečík AK a kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$. Úsečka SM je průměrem této kružnice a je kolmá na BC, neboť se z rovnosti $|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle SAC|$ jedná o středy protějších oblouků kružnice opsané ABC. Kružnice opsaná je proto Thaletovou kružnicí nad SM. Pro body A, D tedy platí $|\sphericalangle SDM| = 90°$ a $|\sphericalangle SAM| = 90°$, z čehož plyne, že bod R je průsečíkem přímek AM a DS.

Úhly $\sphericalangle RAK$ a $\sphericalangle RDK$ jsou pravé, čtyřúhelník $DRAK$ je tedy tětivový a RK je průměrem kružnice jemu opsané. Ukážeme, že T je středem kružnice opsané $DRAK$. Platí $|\sphericalangle ARK| = |\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle RAT|$ (první dvě rovnosti plynou z obvodových úhlů ve čtyřúhelníku $DRAK$ a poslední z rovnosti úsekového a obvodového úhlu v kružnici opsané ABC). Analogicky odvodíme $|\sphericalangle DRK| = |\sphericalangle DAK| = |\sphericalangle DAS| = |\sphericalangle RDT|$.

Pokud je bod T' středem kružnice opsané čtyřúhelníku $DRAK$, pak musí ležet na osách stran DR a AR a musí to zároveň být střed úsečky RK. Proto pro něj platí $|\sphericalangle RDT| = |\sphericalangle DRK| = |\sphericalangle DRT'| = |\sphericalangle RDT'|$. To znamená, že bod T leží na přímce DT'. Analogicky leží T na přímce AT', tedy T musí být průsečíkem DT' a AT'. Tím je však bod T', a tak $T \equiv T'$. Proto už T musí být středem kružnice opsané čtyřúhelníku $DRAK$, neboli středem úsečky RK, což jsme měli dokázat.

[1] Obloukem BAC myslíme oblouk s koncovými body B a C procházející bodem A.



Poznámky:

Většina s malými odchylkami postupovala jako vzorové řešení, ale sešlo se i několik velmi zajímavých postupů, některé využívaly i Feuerbachovu kružnici, Pascalovu větu nebo harmonické čtyřpoměry. Všechna taková řešení si vysloužila plný počet bodů.

(Hedvika Ranošová)

Úloha 7.

Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k. Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k, body dotyku pojmenovala A a B. Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ. Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L. Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protla k podruhé v bodě T. Ukažte, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\sphericalangle PBT| = |\sphericalangle QLA|$.

(Rado van Švarc)

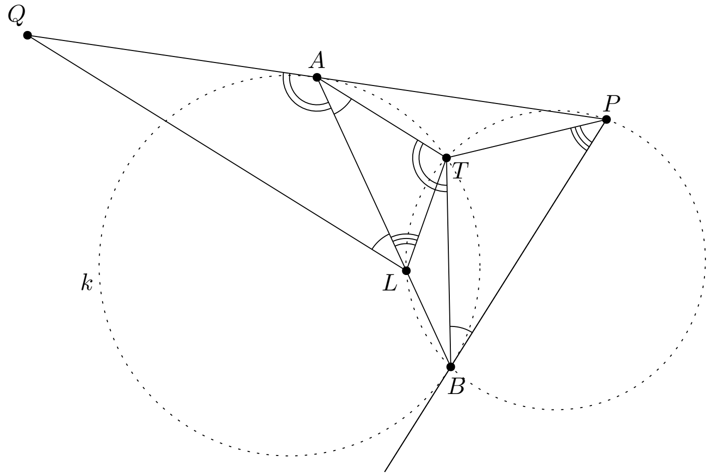
Řešení:

Přímky PA a PB jsou tečnami ke kružnici k a bod A je středem úsečky PQ. Musí tedy platit, že $|PB| = |PA| = |AQ|$. Z věty o obvodovém a úsekovém úhlu pak dostaneme, že $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle PBT|$ a $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle QAL|$. Dále využijeme, že čtyřúhelník $BPTL$ je tětivový, a tak $|\sphericalangle TPB|+|\sphericalangle BLT| = 180°$. Tudíž $|\sphericalangle TPB| = |\sphericalangle TLA|$.

Trojúhelníky ALT a BPT jsou si podobné, jelikož mají stejně velké vnitřní úhly. Musí tedy platit

$$\frac{|AL|}{|AT|} = \frac{|BP|}{|BT|} = \frac{|AQ|}{|BT|}.$$

Z tohoto poměru však také plyne, že jsou si podle věty *sus* podobné i trojúhelníky ALQ a TAB. To již nutně znamená, že $|\sphericalangle QLA| = |\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle PBT|$.



Poznámky:

K úloze šlo přistupovat různými způsoby, což také dokládá fakt, že každý z osmi úspěšných řešitelů zvolil jiný postup. Vzorové řešení využívající podobnost trojúhelníků bylo inspirováno Adamem Křivkou. Mezi další oblíbené techniky patřilo dokreslování bodů či počítání mocnosti bodu ke kružnici. Narazil jsem však i na aplikaci Cevovy věty. *(Martin Hora)*

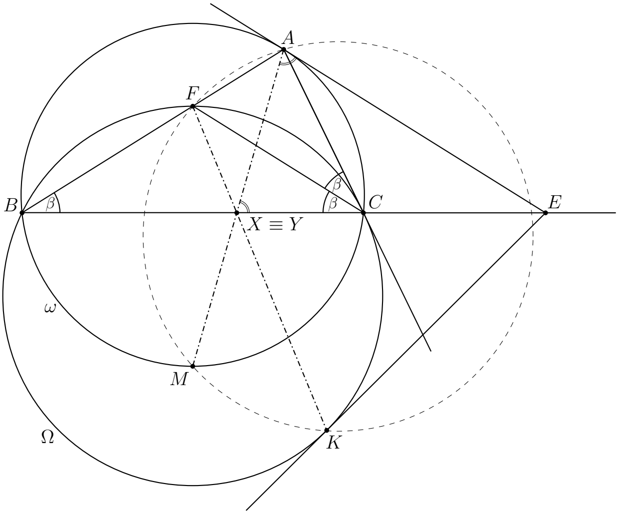
Úloha 8.

Buď ABC trojúhelník splňující $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA|$. Označme ω kružnici jemu opsanou. Nechť tečna k ω z bodu A protíná přímku BC v bodě E. Buď Ω kružnice procházející bodem B, které se přímka AC dotýká v bodě C. Nechť přímka AB podruhé protíná Ω v bodě F. Z bodu E vedeme tečnu k Ω s bodem dotyku K tak, aby body A a K byly na různých stranách od přímky BC. Označme M střed oblouku BC na ω neobsahujícího A. Ukažte, že $AFMK$ je tětivový čtyřúhelník.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Označme $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Nejprve ukážeme, že bod F je středem oblouku BC kružnice Ω neobsahujícího K. Ze shodnosti obvodového a úsekového úhlu tětivy FC máme $|\sphericalangle FCA| = |\sphericalangle CBF| = \beta$, a tedy také $|\sphericalangle FCB| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle FCA| = 2\beta - \beta = \beta = |\sphericalangle FBC|$. Trojúhelník FBC je díky tomu rovnoramenný a F už tedy musí být středem oblouku.



Protože F i M jsou středy oblouků, jsou přímky KF a AM po řadě osami úhlů $\sphericalangle BKC$ a $\sphericalangle BAC$. Dále jelikož bod E leží na chordále kružnic ω a Ω, má k nim stejnou mocnost, z čehož dostáváme $|EA| = |EK|$. Označme průsečík přímek AM a BC jako X. S využitím věty o úsekovém úhlu tětivy AM dostaneme

$$|\sphericalangle EAX| = |\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle AXC|,$$

kde v poslední rovnosti jsme využili součet úhlů v trojúhelníku ABX. To znamená, že trojúhelník AXE je rovnoramenný se základnou AX, tedy $|EA| = |EX|$.

Analogicky se dá ukázat, že přímky FK a BC se protnou v bodě Y takovém, že $|EY| = |EK|$. To už ale znamená, že $|EY| = |EK| = |EA| = |EX|$, a jelikož X i Y jsou vnitřní body úsečky BC, musí už X a Y splývat. Nyní už stačí použít mocnost tohoto bodu k ω a Ω:

$$|AX| \cdot |MX| = |BX| \cdot |CX| = |BY| \cdot |CY| = |FY| \cdot |KY|.$$

Díky platnosti rovnosti výše je pak $AFMK$ tětivový.

Poznámky:

Došlo celkem osm řešení a všechna byla správná. Největší část řešitelů místo použití $|EA| = |EX|$ a $|EK| = |EY|$ dokazovala rovnost poměrů $\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BY|}{|CY|}$. Takové řešení bylo náročnější na výpočty, řešitelé si s tím však bez problémů poradili, za což je tímto chválím. *(Pavel Hudec)*