

Austrálie

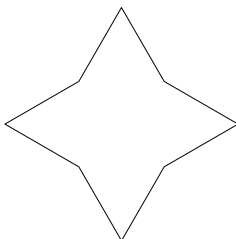
1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 1. ŘÍJNA 2018

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Na australské pláži se válí hvězdice, jejíž tvar vidíte na obrázku¹. Rozřežte ji čtyřmi přímkami na třináct částí.



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Rodinka 2018 koalů leží na přímce, přičemž vzdálenost každých dvou sousedních je 1. Na jednom z krajních koalů sedí blecha. Dokažte, že blecha umí postupně kousnout každého koalu, pokud použije pouze skoky délky $1, 2, \dots, 2017$, každý právě jednou.

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

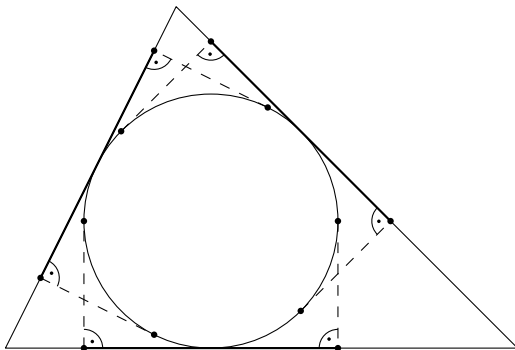
Na šachovnici 100×100 je rozmístěno 50 ježur, které se pohybují jako šachoví králové. Pak se na dalším neobsazeném políčku objeví Štěpán, který se pohybuje jako šachová věž, ježury však nemůže vyhazovat ani přeskakovat. Nejdříve se najednou pohne všech 50 ježur, poté Štěpán – to se opakuje, dokud není Štěpán vyhozen. Ukažte, že ať jsou ježury a Štěpán na začátku rozmístění jakkoli, existuje pro ježury strategie, se kterou Štěpána vždy vyhodí.

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Z vrcholu hory Uluru si Petr přinesl kámen s vyrytým tajuplným obrazcem. Je na něm trojúhelník a úsečky vzniklé kolmými průměty jeho kružnice vepsané na jednotlivé strany. Dokažte, že koncové body těchto průmětů leží všechny na jedné kružnici.

¹Na obrázku je čtverec s čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky na jeho stranách.



ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Marian na svém pozemku nakreslil tabulku se dvěma řádky a jedenácti sloupci. Na každé políčko spodního řádku postavil jednoho klokana. Klokany očísloval postupně zleva doprava jako $-5, -4, \dots, 4, 5$. Následně začal tleskat. Po každém tlesknutí právě jeden klokan přeskočil na některé políčko sousedící hranou s tím, na kterém stál. V žádném kroku nebyli dva klokani na jednom políčku. Kolikrát nejméně musel Marian tlesknout, aby na konci každý klokan stál na místě, na kterém na začátku stál klokan s opačným číslem?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Dingo, klokan a ptakopysk se potkali u limonády a bavili se o svých oblíbených prvočíslech d , k , p . Pak zjistili, že ta splňují vztah $\frac{d}{k} - \frac{4}{p+1} = 1$. Určete všechny možné trojice d , k , p .

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termít. Tito termiti byli v nějakém pořadí označení čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Večer se každý termít nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Jediné, co termiti umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termiti se součtem čísel 2019.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Chrabrý Hedvules se vydal na dovolenou do Austrálie. Uprostřed buše potkal hydry sestávající ze spousty hlav, z nichž některé byly spojené krky². Poté, co na něj hydra zaútočila, praštil Hedvules hydry do jedné z jejích hlav. I stala se zvláštní věc: zmizely všechny krky vyrůstající z této hlavy, ale naopak z ní vyrostly krky do všech hlav, s nimiž tato hlava předtím nebyla spojena. Kolik takových ran mu určitě stačí na to, aby se hydra rozpadla na alespoň dvě části, když víme jen to, že hydra měla na začátku právě 100 krků?

²Každý krk vždy spojuje právě dvě hlavy.

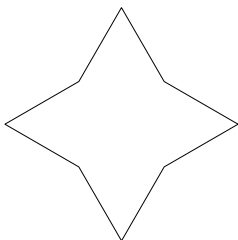
Austrálie

1. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

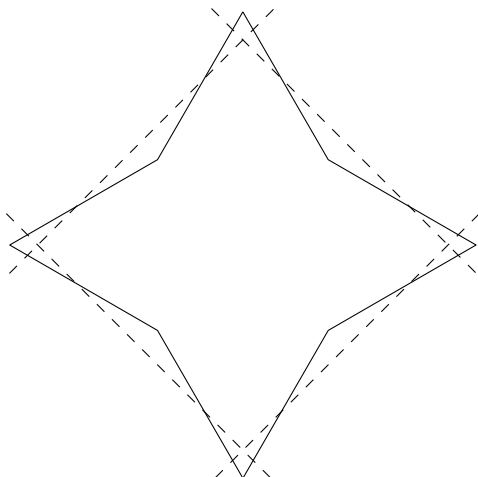
Na australské pláži se válí hvězdice, jejíž tvar vidíte na obrázku¹. Rozřežte ji čtyřmi přímkami na třináct částí.



(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Rezy vedeme například jako na obrázku:



¹Na obrázku je čtverec s čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky na jeho stranách.

POZNÁMKY:

Většina správných řešení použila konstrukci podobnou vzorovému řešení, ale byly použity i jiné, méně pravidelné konstrukce. Některé z nich by dokonce šly lehce poupravit a hvězda by se jimi dala rozseknout až na 15 částí.

U této úlohy nám stačilo, když jste přímky do obrázku nakreslili. Někteří řešitelé se přesto snažili do detailu popsat, jaké přímky použili. Pokud si nejste jisti, jak moc musíte svoje řešení zdůvodňovat, za obsáhlejší a detailnější řešení vám body nestrhneme a zlobit se nebudeme. Avšak když něco podstatného vynecháte, o body můžete přijít. (Filip Bialas)

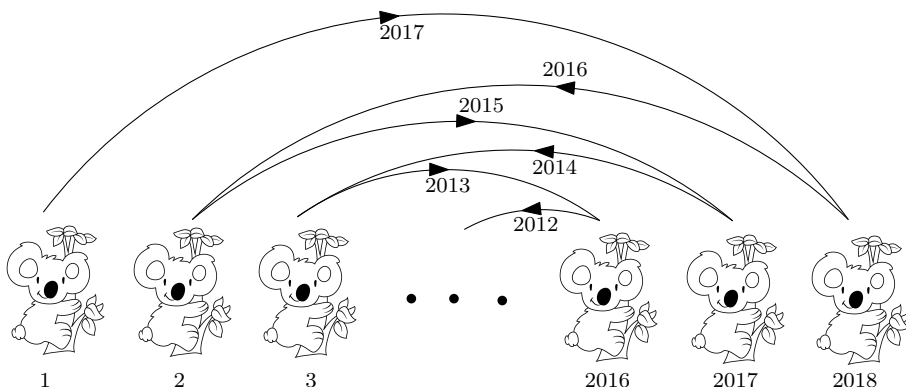
Úloha 2.

Rodinka 2018 koalů leží na přímce, přičemž vzdálenost každých dvou sousedních je 1. Na jednom z krajních koalů sedí blecha. Dokažte, že blecha umí postupně kousnout každého koala, pokud použije pouze skoky délky $1, 2, \dots, 2017$, každý právě jednou.

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Skoky budeme aplikovat sestupně podle velikosti, přičemž budeme střídat směry. Prvním skokem přeskočí blecha z prvního koaly na koala s číslem 2018. Dalším skokem zpátky na koala s číslem 2 atd. Tímto postupem se po i skocích dostaneme na koala s číslem $2018 - \frac{i-1}{2}$ pro liché i a na koala s číslem $\frac{i}{2} + 1$ pro sudé i . Potom bude koala s číslem i kousnut právě jednou a to po právě $2i - 2$ skocích pro $i \leq 1009$ a po $2(2018 - i) + 1$ skocích pro $i \geq 1010$ (prvního koala bereme jako kousnutého po nula krocích).



POZNÁMKY:

Téměř všichni řešitelé měli úlohu správně. Někteří z nich však v řešení měli mírné nepřesnosti za což jsem body nestrhávala. Stěžejním krokem byl nápad, že blecha musí vybrat krok dosud nejdelší nevybrané velikosti právě v aktuálním skoku, neboť jindy by se jí to už nepodařilo.

(Adéla Kostecká)

Úloha 3.

Na šachovnici 100×100 je rozmístěno 50 ježur, které se pohybují jako šachoví králové. Pak se na dalším neobsazeném políčku objeví Štěpán, který se pohybuje jako šachová věž, ježury však nemůže vyhazovat ani přeskakovat. Nejdříve se najednou pohne všech 50 ježur, poté Štěpán – to se opakuje, dokud není Štěpán vyhozen. Ukažte, že ať jsou ježury a Štěpán na začátku rozmístění jakkoli, existuje pro ježury strategie, se kterou Štěpána vždy vyhodí.

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Popíšeme úspěšnou strategii ježur, která se skládá ze dvou kroků. Ježury se nejprve seřadí do jednoho sloupce, a tím utvoří rojnici. Rojnice ježur potom projde šachovnicí, aby Štěpána polapila.

Šachovnici rozdělíme na 50 pásů, z nichž každý je tvořen dvěma sousedními řádky, a každý pás přiřadíme jedné ježure.

Nejprve si všimneme, že Štěpán ježury v jejich pohybu nijak neomezuje. Pokud totiž některá z ježur vstoupí na políčko se Štěpánem, ježury Štěpána vyhodí a mají vyhráno. Každá ježura se tedy může postavit ve svém pásu do sloupce nejvíce vlevo. Ježury, které se do této pozice dostanou dříve než ostatní, budou přecházet ve svém pásu z jednoho řádku do druhého a zpět (a zůstanou přitom ve správném sloupci). Jakmile jsou všechny ježury ve svém pásu v levém sloupci, začne se celá rojnice pohybovat doprava opakováním následujícího kroku:

Když jsou ježury na tahu a žádná z nich nemůže Štěpána vyhodit, všechny se přemístí o jeden sloupec doprava. Ježura, v jejímž pásu se právě nachází Štěpán, se navíc pohne do Štěpánova řádku. Pokud již nejsou ve stejném řádku, pohne se ježura v rámci svého pásu diagonálně. Ostatní ježury řádek nezmění. Pokud je některá z ježur schopna Štěpána v nějakou chvíli vyhodit, udělá to.

Při tomto postupu platí, že kdykoliv se dostane Štěpán na tah, je v jeho řádku ježura. Nemůže se tedy dostat nalevo od sloupce s ježurami. Jakmile se ocitne ve sloupci s ježurami nebo ve sloupci, který s ním sousedí, bude vyhozen. To se ovšem stane nejpozději tehdy, když ježury dojdou na pravý okraj šachovnice.

POZNÁMKY:

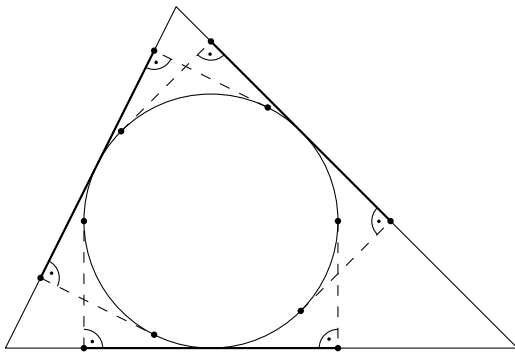
Většina řešitelů využívala podobného postupu jako vzorové řešení. Někteří na začátku rozmístili ježury do jednoho sloupce na různá políčka stejné barvy šachovnice. V takovém případě je ale potřeba říct, proč se mohou ježury na tato políčka dostat všechny najednou (například s využitím diagonálních kroků).

Pár řešitelů si za úvodní rozmístění zvolilo diagonálu. Tento přístup je ovšem složitější a nakonec se jen jednomu povedlo popsat vyhovující postup.

(Petr Gebauer)

Úloha 4.

Z vrcholu hory Uluru si Petr přinesl kámen s vyrytým tajuplným obrazcem. Je na něm trojúhelník a úsečky vzniklé kolmými průměty jeho kružnice vepsané na jednotlivé strany. Dokažte, že koncové body těchto průmětů leží všechny na jedné kružnici.

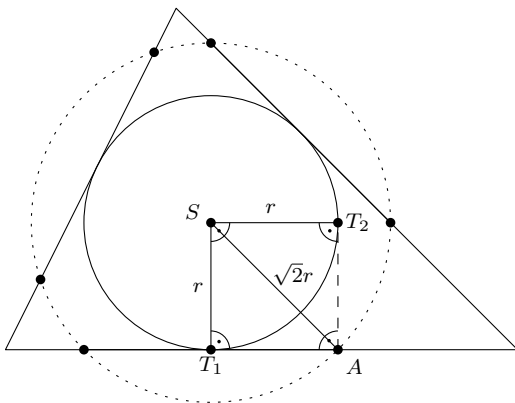


(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Dokážeme, že každý z koncových bodů je od středu kružnice vepsané S vzdálen přesně $\sqrt{2} \cdot r$, kde r je poloměr kružnice vepsané. Pak budou všechny ležet na jedné kružnici s tímto středem.

Vezmeme libovolný z těchto bodů, řekněme mu A . Bodem A prochází dvě tečny ke kružnici vepsané. První je strana trojúhelníka, na které bod leží, druhá je úsečka vymezující kolmý průmět. Tyto tečny spolu svírají pravý úhel. Body dotyku tečen s kružnicí vepsanou označme T_1 a T_2 . Z těchto bodů můžeme vést kolmice na příslušné tečny, které budou procházet středem kružnice vepsané S . Vidíme, že $|ST_1| = |ST_2| = r$. Vznikl nám čtverec AT_1ST_2 se stranou o velikosti r . Vzdálenost $|AS|$ tak můžeme vyjádřit jako délku úhlopříčky tohoto čtverce: $|AS| = \sqrt{2} \cdot r$.



POZNÁMKY:

K této úloze se sešlo poměrně velké množství řešení, z nichž naprostá většina byla správná. Velká část řešitelů použila podobnou úvahu jako ve vzoráku, někteří využívali symetrii nebo v tajuplném obrazení hledali rovnoramenné lichoběžníky.

(Anna Mlezivová)

Úloha 5.

Marian na svém pozemku nakreslil tabulku se dvěma řádky a jedenácti sloupci. Na každé políčko spodního řádku postavil jednoho klokana. Klokany očísloval postupně zleva doprava jako $-5, -4, \dots, 4, 5$. Následně začal tleskat. Po každém tlesknutí právě jeden klokan přeskočil na některé políčko sousedící hranou s tím, na kterém stál. V žádném kroku nebyli dva klokani na jednom políčku. Kolikrát nejméně musel Marian tlesknout, aby na konci každý klokan stál na místě, na kterém na začátku stál klokan s opačným číslem?

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Nejmenší počet tlesknutí je 80. Nejprve dokážeme, že méně to být nemůže, a následně ukážeme konstrukci skoků, která jich právě 80 potřebuje.

Pro získání dolního odhadu se podívejme zvlášť na skoky v horizontálním a ve vertikálním směru. Co se horizontálních skoků týče, vzdálenost klokana s číslem x od cílové pozice je právě $|2x|$. Musí tedy učinit nejméně $|2x|$ skoků doprava nebo doleva. Když toto číslo sečteme přes všechny klokany, dostáváme:

$$\sum_{x=-5}^5 |2x| = 2 \cdot (10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 60.$$

Horizontálních skoků je tedy minimálně 60.

Dále ukážeme, že nejvýše jeden z klokánů nemusí někdy v průběhu vyskočit do druhého řádku. Z toho následně vyplyne, že alespoň 10 klokánů musí vyskočit nahoru a zase zpátky (výsledná pozice je na prvním řádku), a minimální počet vertikálních skoků tak bude 20. Pro spor předpokládejme, že existují dva klokani, kteří celou dobu nezmění řádek. Klokan, který začínal více nalevo, nutně skončí více napravo. Někdy v průběhu se tudíž musí potkat a prohodit si vzájemné pořadí, což je kýžený spor. Dokázali jsme, že počet skoků je alespoň $60 + 20 = 80$.

Jako konstrukce pro tento počet funguje například strategie, kdy nejdříve všichni klokani kromě -5 vyskočí nahoru. Následně se -5 přemístí na svou výslednou pozici doprava. Potom klokani -4 až 0 postupně v tomto pořadí sestoupí zpět na první řádek a přeskáčou co nejvíce doprava. Klokani 1 až 5 pak postupně doskáčou nad své cílové místo a přesunou se na něj. Jednoduchým výpočtem nebo úvahou lze ověřit, že výsledný počet skoků je právě 80.

Marian tudíž musel tlesknout alespoň 80krát.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení správně odhalila jednu z možných konstrukcí pro 80 skoků. Nemalá část z nich už ale bohužel nedokázala, že na méně než 80 skoků to nelze, a daná konstrukce je tak skutečně optimální. Tento odhad je nezbytnou součástí správného řešení jakékoli extrémní úlohy. Taková řešení si pak typicky vysloužila dva body. Někteří řešitelé pak také málo nebo nepřesně argumentovali při odhadu minimálního počtu vertikálních skoků.

(Martin Raška)

Úloha 6.

Dingo, klokan a ptakopysk se potkali u limonády a bavili se o svých oblíbených prvočíslech d , k , p . Pak zjistili, že ta splňují vztah $\frac{d}{k} - \frac{4}{p+1} = 1$. Určete všechny možné trojice d , k , p .

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Rovnici roznásobíme a upravíme

$$\begin{aligned}\frac{d}{k} - \frac{4}{p+1} &= 1, \\ d(p+1) - 4k &= k(p+1), \\ (d-k)(p+1) &= 4k.\end{aligned}$$

Pravá strana třetí rovnice nabývá pouze kladných hodnot, d je proto větší než k . Čísla d a k jsou prvočísla, jejich rozdíl tedy nemůže být soudělný s k , neboť pak by byl dělitelný k a platilo by $d - k = nk$, kde $n \in \mathbb{N}$. V těchto případech je $d = (n+1)k$ a d by nebylo prvočíslo. Výraz $d - k$ ale dělí pravou stranu třetí rovnice, musí proto být jedním z dělitelů 4, tzn. 1, 2, nebo 4. Tyto tři možnosti rozebereme:

- (i) Pro $d - k = 1$ dostaneme $p + 1 = 4k$. Z první rovnice vyplývá, že jedno z prvočísel d a k je sudé a druhé liché. Jediné sudé prvočíslo je 2. Proto $k = 2$ jako menší z dvojice a $d = 3$. Dopočítáme $p = 7$. Z první možnosti tedy vyhovuje zadání trojice $(d, k, p) = (3, 2, 7)$.
- (ii) V druhém případě uvažujeme $d - k = 2$ a tedy $p + 1 = 2k$. Rozebereme případy podle zbytků k po dělení třemi.

Pokud k je násobkem tří, pak už se nutně rovná třem. Zbylá prvočísla dopočítáme: $(d, k, p) = (5, 3, 5)$.

Pokud k dává po dělení třemi zbytek 1, prvočíslo $d = k + 2$ by nutně bylo dělitelné třemi, v tom případě platí $d = 3$ a zároveň $k = 1$, což je ve sporu s podmínkou, že d , k , p jsou prvočísla.

U poslední možnosti, kdy k dává zbytek dva po dělení třemi, si k napíšeme jako $k = 3a + 2$, $a \in \mathbb{N}$ a dopočítáme p . Platí tedy $p = 2k - 1$ a po dosazení $p = 2(3a + 2) - 1 = 6a + 4 - 1 = 3(2a + 1)$. Pro každé přirozené a je prvočíslo p dělitelné třemi a zároveň větší než 3. Pro $a = 0$ a tedy $p = 3$ by se $k = 2$ a $d = 4$, pak ale d není prvočíslo.

Pro $d - k = 2$ tedy vyhovuje zadání jediná trojice prvočísel, a to $(d, k, p) = (5, 3, 5)$.

- (iii) Pro $d - k = 4$ odvodíme $p + 1 = k$. Z druhé rovnice plyne, že jedno z prvočísel p a k je sudé a druhé liché. Jediné sudé prvočíslo je 2, proto $p = 2$ a $k = 3$. Posledním řešením je tedy trojice $(d, k, p) = (7, 3, 2)$.

Řešením jsou tři trojice prvočísel: $(d, k, p) \in \{(3, 2, 7), (5, 3, 5), (7, 3, 2)\}$.

POZNÁMKY:

Většina řešení, která přišla, byla správná a postupovala buď podle vzorového řešení, nebo využívala největšího společného dělitele $p + 5$ a $p + 1$. Taková řešení si vysloužila plný počet bodů. Řešitelé, kteří některé řešení vynechali nebo jejichž důkaz nebyl formálně správný (zejména nedokázali, že žádná další řešení v druhé možnosti nevyhovují zadání), si vysloužili nejvýše tři body.

(Hedvika Ranošová)

Úloha 7.

V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termít. Tito termíti byli v nějakém pořadí označeni čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Večer se každý termít nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Jediné, co termíti umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termíti se součtem čísel 2019.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že termíty dokážeme přemístit tak, abychom nikdy neprohodili dvojici se součtem 2019.

Všimneme si, že takových dvojic existuje 1009 a každý termít je právě v jedné z nich.

U termíta s číslem x si budeme pamatovat hodnotu $f(x)$, která bude značit, o kolik vrcholů po směru hodinových ručiček se příslušný termít od rána posunul. Ráno zřejmě platilo $f(x) = 0$ pro každého termíta. Současně každým prohozením snížíme hodnotu $f(x)$ u jednoho termíta o jedna a u druhého ji zvýšíme o jedna. Proto se součet $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2018)$ nemění, tj. zůstává konstantně nulový.

Protože všichni termíti skončili na protějším políčku, večer se $f(x)$ muselo rovnat $2018k + 1009$ pro nějaké celé k .

Nyní si uvědomíme, že kdyby pro některou dvojici se součtem 2019 večer neplatilo $f(x) = f(2019 - x)$, tak už by to znamenalo, že jeden z termítů musel uběhnout jistým směrem minimálně o jedno kolo více. Během dne tedy nutně předběhl druhého z dvojice, což by byl spor.

Tedy využijeme vztah $f(x) = f(2019 - x)$ z předchozího odstavce:

$$0 = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2018) = 2 \cdot (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(1009)).$$

Pro všechna x od jedné do 2018 platí, že $f(x)$ je liché číslo. Napravo máme součet lichého počtu takových $f(x)$. To znamená, že hodnota celé sumy je liché číslo. Z toho dostáváme spor, neboť nulu nelze zapsat jako součin dvojky a lichého čísla.

POZNÁMKY:

Úloha byla velmi zrádná a mnoho (i zkušenějších) řešitelů doplatilo na to, že uvážili pouze možnost, kdy termíti musí svou pouť skončit s celkovým posunutím přesně o polovinu obvodu na jednu stranu od své startovní pozice. Takoví řešitelé si neuvážením možnosti několikrát obkroužit obvod úlohu zjednodušili, proto jsem jim uděloval pouze čtyři body.

Několik řešitelů se snažilo tvrdit, že když se jim nepovede termíty přemístit jedním způsobem, tak už mají hotovo. V takovém případě ale není jasné, jestli nemůže existovat šikovnější způsob, kterým se termíty přesunout podaří.

Na závěr bych chtěl pochválit Radka Olšáka za nápad s počítáním průchodů jednotlivých termítů dvěma protějšími stranami a za brilantně sepsané řešení, čímž si vysloužil $+i$.

(Pavel Hudec)

Úloha 8.

Chrabrý Hedvules se vydal na dovolenou do Austrálie. Uprostřed buše potkal hydry sestávající ze spousty hlav, z nichž některé byly spojené krky². Poté, co na něj hydra zaútočila, praštil Hedvules hydry do jedné z jejích hlav. I stala se zvláštní věc: zmizely všechny krky vyrůstající z této hlavy, ale naopak z ní vyrostly krky do všech hlav, s nimiž tato hlava předtím nebyla spojena. Kolik takových ran mu určitě stačí na to, aby se hydra rozpadla na alespoň dvě části, když víme jen to, že hydra měla na začátku právě 100 krků?

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že 10 takových ran mu určitě stačí.

Nejdříve ukážeme, že pomocí 10 ran umí Hedvules vždy vyhrát. Pokud narazí na hydry, z jejích některé hlavy vede nejvýše 10 krků, stačí Hedvulovi postupně bouchat do hlav s touto hlavou spojených. Hydry se mu podaří rozdělit nejpozději ve chvíli, kdy udeří do všech sousedících hlav, neboť poté již nebude uvažovaná hlava se zbytkem hydry spojena. (A jelikož v původní hydrě existovaly krky, není hydra tvořena pouze touto hlavou.)

Naopak pokud vede z každé hlavy alespoň 11 krků, může mít hydra maximálně 18 hlav. Kdyby jich totiž měla 19 nebo více, musela by mít alespoň $\frac{19 \cdot 11}{2} > 100$ krků (z každé hlavy vyrůstá alespoň 11 krků a každý krk spojuje právě dvě hlavy). Označme počet hydriných hlav jako n . Udeřením do libovolné hlavy mající $k \geq 11$ krků se počet krků z ní vyrůstajících změní na $n - 1 - k$, což je jistě nejvýše 6, neboť $n \leq 18$. Následujícími nanejvýš šesti úderů do sousedících hlav již tuto hlavu jistě oddělíme. V tomto případě stačilo Hedvulovi dokonce jen 7 úderů.

Stačí již jen dokázat, že existuje hydra, na jejíž přemožení devět úderů nestačí. Uvažme proto hydry s 20 hlavami rozdělenými do dvou skupin po deseti hlavách tak, že krky spojují právě dvojice hlav z různých skupin (těchto dvojic je $10 \cdot 10 = 100$). Všimneme si, že kdykoliv jdou hlavy hydry rozdělit do dvou skupin takových, že krky vedou právě mezi hlavami z různých skupin, tak po praštění do libovolné hlavy se tato hlava pouze přesune do opačné skupiny. Dokud mají obě skupinky alespoň jednu hlavu, je zřejmě celá hydra propojená. Po devíti ranách ale v obou skupinkách, které původně obsahovaly deset hlav, jistě alespoň jedna hlava zbyde.

Tímto jsme úlohu dokončili a dokázali, že 10 je opravdu nejmenší počet ran, který Hedvulovi na poražení hydry vždy stačí.

POZNÁMKY:

Spousta řešení dokázala pouze, že deset ran vždy stačí, ale již nezdůvodnila, že méně ne. Takové zdůvodnění je ale v podobných úlohách nutné, protože jinak si nemůžeme být jisti, že by nemohl Hedvules volit nějaký chytřejší algoritmus, díky kterému by dokázal hydry vždy překonat na ještě méně ran než jsme dokázali.

Navíc toto zdůvodnění se ukázalo jako těžší část úlohy, kterou spousta lidí řešila velmi dlouze. Řešitelům, kteří přišli s elegantním vysvětlením použitým ve vzorovém řešení jsem dával $+i$. Těm, kteří tuto část nezvládli vyřešit nebo zcela opomenuli, jsem dával tři body. (Filip Bialas)

²Každý krk vždy spojuje právě dvě hlavy.