Váhy

1. jarní série — Termín odeslání: 4. února 2019

Vážením na rovnoramenných vahách zjistíme, která strana je těžší, resp. že jsou obě stejně těžké. Na misky vah můžeme dávat i více než jeden předmět.

Úloha 1. (3 body)

Předměty stejných tvarů váží stejně. Seřaďte je podle váhy.

Úloha 2. (3 body)

Fíla do vrcholů pravidelného šestiúhelníka umístil závažíčka s vahami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 gramů (v tomto pořadí vedle sebe). Zlotřilá Hedvika ale v nestřeženém okamžiku dvě závažíčka prohodila a přiznala mu jen, že vyměnila nějaká v protilehlých vrcholech. Fíla by rád pomocí svých rovnoramenných vah zjistil která, ale zároveň je velmi líný, a tak chce vážit pouze jednou. Jak to má udělat?

Úloha 3. (3 body)

Rado má 2^n medailí zabalených ve stejných neprůhledných obalech. Polovina medailí je stříbrných a polovina je zlatých. Všechny medaile stejného typu váží stejně, přičemž zlaté jsou těžší. Michal by rád viděl nějakou zlatou medaili, ale Rado nechce otevřít víc než jeden obal. Jak ji může s jistotou najít na n vážení na rovnoramenných vahách?

Úloha 4. (5 bodů)

Martin má $N > 1$ sušenek. Všechny sušenky jsou stejně těžké až na jednu, která je otrávená a váží jinak, není ale známo, zdali více, nebo méně. Martin ji hledá pomocí rovnoramenných vah. Verča ho ovšem pozoruje a kdykoliv si je z dosavadního měření jistá, že nějaká sušenka není otrávená, okamžitě ji sní a Martin ji pak už nemůže používat k vážení. Martin chce najít otrávenou sušenku a zjistit, zdali je lehčí, nebo těžší než běžné sušenky. Pro která N umí postupovat tak, že se mu to i přes Verčino obžerství a libovolnou dávku smůly vždy podaří?

Úloha 5. (5 bodů)

Tonda má rovnoramenné váhy a 100 stejně vypadajících hůlek, z nichž přesně 30 je kouzelných. Každá kouzelná hůlka je lehčí než každá nekouzelná, ale hůlky stejného typu nemusí vážit stejně. Určete nejmenší N takové, že Tonda umí najít alespoň jednu zaručeně kouzelnou hůlku pomocí nanejvýš N vážení.

Úloha 6. (5 bodů)

Áďa našla 2000 plechovek, z nichž 1000 je plných a 1000 prázdných. Všechny plné váží 500 g a všechny prázdné 100 g. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách lze vždy vytvořit dvě stejně početné hromady plechovek (není potřeba použít všechny plechovky), aby každá hromada měla jinou váhu?

Úloha 7. (5 bodů)

Pavel má pět mincí, každou jinak těžkou, a kouzelné váhy se třemi miskami. Ty pro každou uspořádanou trojici mincí řeknou, jestli jsou uspořádané podle hmotnosti od nejlehčí po nejtěžší, nebo ne. Ukažte, že když bude mít Pavel smůlu, nebude schopen na devět vážení seřadit mince podle hmotnosti.

Úloha 8. (5 bodů)

Kuba má 3^{2n} mincí, mezi nimiž je jedna falešná – lehčí než ostatní, které všechny váží stejně. Dále má troje rovnoramenné váhy, z nichž dvoje fungují normálně a jedny ukazují náhodné výsledky. Ukažte, že Kuba umí na $3n + 1$ vážení najít falešnou minci.

Váhy

1. jarní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Předměty stejných tvarů váží stejně. Seřaďte je podle váhy.

(Marian Poljak)

Řešení:
Označme si váhu čtverečku $č$, kolečka k a trojúhelníčku t. Velké váhy nám říkají $2č+k+t < 2k+č+t$, tedy $č < k$ a slovy, že čtvereček je lehčí než kolečko. Z malých pravých vah vidíme, že $t > č + k$. Takže $t > k$ a $t > č$. Tedy trojúhelníček je nejtěžší. Dohromady dostáváme, že trojúhelníček je nejtěžší, druhé je kolečko a nejlehčí je čtvereček.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a podobala se vzorovému. Řešitelé, kterým jsem strhla body, měli v řešení nějakou specifickou chybu, která se jinde neobjevila, případně v jejich řešení chybělo odůvodnění výsledku. *(Anna Mlezivová)*

Úloha 2.

Fíla do vrcholů pravidelného šestiúhelníka umístil závažíčka s vahami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 gramů (v tomto pořadí vedle sebe). Zlotřilá Hedvika ale v nestřeženém okamžiku dvě závažíčka prohodila a přiznala mu jen, že vyměnila nějaká v protilehlých vrcholech. Fíla by rád pomocí svých rovnoramenných vah zjistil která, ale zároveň je velmi líný, a tak chce vážit pouze jednou. Jak to má udělat?
(Jakub Löwit)

Řešení:
Možných postupů Fíly je několik, uvedeme jeden z nich. Fíla na levou stranu váhy umístí závaží z vrcholů, kde původně byla závaží 1 a 6, a na pravou stranu závaží z vrcholů, kde byla závaží 2 a 5. Pokud Hedvika prohodila závaží 1 a 4, pak je levá strana váhy těžší ($4+6>2+5$). Pokud prohodila závaží 2 a 5, je váha v rovnováze ($1+6=2+5$). V posledním případě je levá strana váhy lehčí ($1+3<2+5$). Jelikož pro každý případ vyjde stav váhy jiný než v ostatních situacích, může Fíla jednoznačně určit, která dvě závaží zlotřilá Hedvika prohodila.

Poznámky:
S úlohou si většina řešitelů poradila bez problému, tak jsem až na výjimky uděloval plný počet bodů. Hlavní myšlenkou úlohy bylo zvážit taková závaží, aby pro každou ze tří možností prohození závaží byla váha v jiném stavu. *(Lucien Šíma)*

Úloha 3.

Rado má 2^n medailí zabalených ve stejných neprůhledných obalech. Polovina medailí je stříbrných a polovina je zlatých. Všechny medaile stejného typu váží stejně, přičemž zlaté jsou těžší. Michal by rád viděl nějakou zlatou medaili, ale Rado nechce otevřít víc než jeden obal. Jak ji může s jistotou najít na n vážení na rovnoramenných vahách?

(Rado van Švarc)

Řešení:
Všimněme si, že pokud v každém kroku vyřadíme vždy polovinu zbývajících medailí, po n krocích nám z 2^n zbyde právě jedna. Přitom všechny počty medailí, které takto projdeme, jsou sudé, neboť jsou to mocniny dvojky.

Dále dokažme, že pokud máme sudý počet medailí, mezi kterými je alespoň jedna zlatá, pak dokážeme vybrat přesně polovinu z nich tak, že ve výběru bude alespoň jedna zlatá. Medaile libovolně rozdělíme na dvě poloviny a ty zvážíme proti sobě. Pokud je jedna strana těžší, tak v ní musí být ostře více zlatých medailí než na druhé straně, tedy alespoň jedna. V případě, že jsou obě strany stejně těžké, tak je v nich nutně stejný počet zlatých medailí, tedy je alepoň jedna zlatá v každé z nich a můžeme si vybrat libovolnou.

Při hledání tedy postupujeme takto: zbývající medaile vždy rozdělíme na dvě poloviny a ty zvážíme. Pak si ponecháme jen těžší polovinu (libovolnou v případě rovnosti) a s tou postup opakujeme. Když nám po n krocích zbyde už jen jedna medaile, víme, že je zlatá, neboť máme vždy zaručeno, že v polovině, kterou si necháváme, je alespoň jedna zlatá medaile.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a postupovala stejně jako vzorové řešení. Jedna z věcí, na které se ovšem řešitelé neshodli, byla, jestli medaile váží Michal nebo Rado. *(Michal Töpfer)*

Úloha 4.

Martin má $N>1$ sušenek. Všechny sušenky jsou stejně těžké až na jednu, která je otrávená a váží jinak, není ale známo, zdali více, nebo méně. Martin ji hledá pomocí rovnoramenných vah. Verča ho ovšem pozoruje a kdykoliv si je z dosavadního měření jistá, že nějaká sušenka není otrávená, okamžitě ji sní a Martin ji pak už nemůže používat k vážení. Martin chce najít otrávenou sušenku a zjistit, zdali je lehčí, nebo těžší než běžné sušenky. Pro která N umí postupovat tak, že se mu to i přes Verčino obžerství a libovolnou dávku smůly vždy podaří?

(Rado van Švarc)

Řešení:
Ukážeme, že Martin takto umí postupovat pouze pro sudá n větší nebo rovna čtyřem. To uděláme tak, že nejdříve vyřešíme několik samostatných případů a ostatní případy poté složíme za pomoci těchto malých.

Pro $\mathbf{n = 2}$ jsou sušenky jinak těžké, ale i když Martin zjistí, která je těžší, nedokáže rozhodnout, která je otrávená.

Pro $\mathbf{n = 4}$ si Martin označí sušenky a, b, c, d. Nejprve zváží $\{a, b\}$ proti $\{c, d\}$. Protože mezi nimi je otrávená sušenka, musí se váha vychýlit. Současně z tohoto vážení Verča neumí o žádné sušence říci, že není otrávená, takže žádnou nesní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že součet hmotností sušenek a, b je menší než součet hmotností sušenek c, d. Nato může Martin zvážit $\{a\}$ s $\{b\}$ a rozlišit následující dvě možnosti:

(1) Váha se vychýlí – pak díky prvnímu vážení Martin ví, že lehčí z těchto sušenek je otrávená a otrávená sušenka je tudíž lehčí než všechny ostatní.
(2) Váha se nevychýlí – potom je otrávená sušenka ta těžší z c a d a je těžší než zbylé sušenky. Tu otrávenou pak může najít zvážením $\{c\}$ a $\{d\}$.

Pro $\mathbf{n = 6}$ Martin nejprve zváží tři a tři sušenky a protože dal na váhu všechny sušenky, tak se váha musí vychýlit. Poté z těžší skupiny zváží dvě proti sobě – pokud se váha vychýlí, pak ví, že težší ze sušenek je otrávená. Pokud jsou stejně těžké, pak je Verča sní a Martinovi zbudou čtyři sušenky. Označme si je a, b, c, d, přičemž a, b a c jsou sušenky z lehčí strany z prvního vážení a sušenka d byla na těžší straně. Martin zváží $\{a, b\}$ proti $\{c, d\}$. Mohou nastat následující případy:

(1) Pokud jsou $\{a, b\}$ těžší než $\{c, d\}$, pak Martin ví, že c je lehčí než ostatní sušenky, a je tedy otrávená.
(2) Pokud jsou $\{a, b\}$ lehčí než $\{c, d\}$, pak Verča sní c (z následujícího rozboru totiž plyne, že c již nemůže být otrávená) a Martin pokračuje zvážením $\{a\}$ s $\{b\}$:
    (1) Váha se nevychýlí – pak d je otrávená a je těžší než ostatní.
    (2) Váhy se vychýlí – pak lehčí z a nebo b je otrávená a je lehčí než neotrávené.

Ukázali jsme, že pro $n = 4$ a 6 může Martin postupovat tak, aby otrávenou sušenku i přes Verčino obžerství a s kbelíkem smůly našel, a z toho již jednoduše dokážeme, že tak může postupovat i pro všechna větší sudá čísla.

Pro $n = 4k$ si Martin rozdělí sušenky do skupin po 4 a bude postupně vážit jednotlivé skupiny podle již popsaného postupu pro $n = 4$. Pokud se váhy v prvním kroku nevychýlí, pak Verča danou čtveřici sní a Martin pokračuje s další dokud nenajde tu čtveřici, ve které se otrávená sušenka nachází.

Pro $n = 4k + 2$ si Martin rozdělí sušenky na jednu skupinu po 6 a zbylé sušenky do skupin po 4 a opět použije postup popsaný výše.

Pro lichá n ukážeme, že buď o sušenkách nezjistíme vůbec nic, nebo dostaneme spor s minimalitou. Nejprve si Martin rozmyslí, že nemá smysl vážit různě početné skupiny. Nechť všechny neotrávené sušenky váží 1 a otrávená váží m. Budeme-li předpokládat, že $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$, pak při vážení různě početných skupin sušenek bude ta početnější vždy těžší, ale Martin tím nic nezjistí. Tedy jediná užitečná vážení jsou v tom případě taková, kdy Martin váží dvě stejně početné skupiny sušenek.

Předpokládejme pro spor, že existuje nějaký lichý počet sušenek takový, že Martin dokáže vždy najít otrávenou sušenku a zjistit, zda je lehčí nebo těžší. Vyberme potom nejmenší takový počet. Zaměřme se navíc nyní jen na sušenky s váhami z minulého odstavce. Aby vůbec něco o sušenkách Martin s jistotou zjistil, musí zvážit dvě stejně početné skupinky (potenciální vážení různě početných skupinek nedá podle minulého odstavce žádnou informaci Martinovi ani Verče). Sušenek máme licho, takže alespoň jednu vážit nebudeme. Jelikož může být ale otrávená libovolná ze sušenek, tak se může stát, že si ji Martin zrovna k vážení nevybral. V takovém případě budou sušenky na obou stranách váhy vážit stejně, což vyústí ve znalost, že otrávená sušenka je ve zbytku a Verča všechny vážené sušenky sní. O nevážených sušenkách jsme nezjistili vůbec nic, takže nám všechny zůstanou a ocitáme se ve stejné situaci jako na začátku, jen s menším lichým počtem sušenek. Z nich Martin musí umět určit, která je otrávená a jestli je lehčí, či těžší, což je ale ve sporu s minimalitou původního lichého počtu.

Celé ještě jednou shrnuto – Martin umí najít otrávenou sušenku a určit zda je lehčí nebo těžší než ostatní sušenky pouze pro sudá n větší než 2.

Poznámky:
V řešeních se objevovaly dvě časté chyby. První, kdy si řešitel nerozmyslel, jaké všechny sušenky Verča sní (a pak je používal ve vážení), a druhá častá chyba byla snaha použít indukci pro sudá n. Ale tato indukce byla zpravidla založena na předpokladu, že zvážení všech sušenek nedá Martinovi žádnou informaci, což není pravda.

Řešení úlohy pro lichá čísla formulovali snad všichni řešitelé pomocí indukce. Můžete si ale všimnout, že přístup popsaný ve vzorovém řešení je vlastně s indukcí ekvivalentní a v tomto případě lze pomocí něj důkaz dobře formulovat.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 5.

Tonda má rovnoramenné váhy a 100 stejně vypadajících hůlek, z nichž přesně 30 je kouzelných. Každá kouzelná hůlka je lehčí než každá nekouzelná, ale hůlky stejného typu nemusí vážit stejně. Určete nejmenší N takové, že Tonda umí najít alespoň jednu zaručeně kouzelnou hůlku pomocí nanejvýš N vážení.

(Jakub Löwit)

Řešení:
Ukážeme, že nejmenší počet vážení, pomocí nichž může Tonda zaručeně najít alespoň jednu kouzelnou hůlku, je 70. K tomu potřebujeme najít strategii 70 vážení, která Tondovi zajistí nalezení kouzelné hůlky, a pak potřebujeme ukázat, že existuje 100 hůlek takových, že po 69 váženích Tonda nemůže o žádné hůlce s jistotou říct, že je kouzelná.

Tonda může najít kouzelnou hůlku následovně: Vedle vah si vymezí místo, kde bude mít odloženou nejlehčí hůlku, kterou dosud viděl. Na začátku tam umístí náhodnou hůlku. Pak si postupně bude náhodně brát další hůlky, každou z nich vždy zváží oproti jeho dosud nejlehčí hůlce a tu lehčí z nich odloží zpět na místo pro dosud nejlehčí hůlku. Tato hůlka pak nutně musí být nejlehčí z těch, které dosud viděl. Po 70 takovýchto vážení bude mít Tonda vedle vah nejlehčí z 71 hůlek, se kterými se dosud setkal. To ale znamená, že je tato hůlka lehčí (nebo stejně těžká) jako 70 jiných hůlek, a tak musí být kouzelná. Tonda tedy potřebuje maximálně 70 vážení na to, aby s jistotou mohl říct, že je některá hůlka kouzelná.

Ke zjištění, že Tonda ani po 69 vážení není vždy schopný s jistotou najít alespoň jednu kouzelnou hůlku, si pomůžeme speciálními váhami. Pokud Tonda dostane váhy, které mu dají ostře víc informací než rovnoramenné váhy v zadání, a přitom stejně nemůže určit kouzelnou hůlku, pak Tonda nemůže určit kouzelnou hůlku ani s normálními rovnoramennými váhami. Váhy, které Tondovi dáme k dispozici, mu nejenom ukáží na těžší misku rovnoramenných vah, ale také přímo na nejtěžší hůlku z těch na obou miskách. Ukážeme, že pokud má Tonda zrovna před sebou sto hůlek $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, kde i-tá hůlka má hmotnost 2^i, pak ani s našimi speciálními váhami není schopný určit ani jednu kouzelnou hůlku. Díky tomu, jak jsme zvolili hmotnosti hůlek, bude každému vážení dominovat pouze nejtěžší hůlka. Takže když Tondovi naše speciální váhy ukáží na nejtěžší hůlku na váze, pak informace o tom, která miska je těžší, nepřinese žádnou novou informaci.

Nechť tedy Tonda provede 69 vážení. Nazvěme hůlku *těžkou*, pokud ji naše váhy označí jako nejtěžší v alespoň jednom vážení. Tonda tedy bude mít maximálně 69 těžkých hůlek. Ostatní hůlky označme za *lehké*. Řekněme, že $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ je uspořádání lehkých hůlek podle hmotnosti a $t_1 < t_2 < \cdots < t_{100-m}$ je uspořádání těžkých hůlek. Pak všem Tondovým vážením vyhovuje i uspořádání $l_{\pi(1)} < l_{\pi(2)} < \cdots < l_{\pi(m)} < t_1 < t_2 < \cdots < t_{100-m}$, kde π je libovolná permutace[1] lehkých hůlek. To proto, že každému vážení dominuje jen nejtěžší z hůlek, které jsme položili na váhu

[1] Permutace je definována jako bijektivní zobrazení množiny A na množinu A (sebe sama na sebe samou). Intuitivně je to jedno z možných uspořádání prvků množiny A.

(tj. nutně těžká). Ostatní hůlky jsou tedy buď lehké (které jsou v novém uspořádání ty nejlehčí), anebo lehčí těžké (které zůstávají lehčí). Z toho je vidět, že těžké hůlky nemůžeme jednoznačně označit jako kouzelné, protože jsou v novém uspořádání těžší než alespoň 31 hůlek, a lehké taky ne, protože vybíráme π libovolně, a tak pro každou lehkou hůlku l existuje permutace π, ve které je l nejtěžší lehká, tj. těžší než 30 hůlek, a nekouzelná.

Nejmenší počet vážení, pomocí nichž může Tonda najít alespoň jednu kouzelnou hůlku, je tedy 70.

Poznámky:

Výsledek a postup, jak na 70 vážení najít nejlehčí hůlku, měla většina řešitelů správně. Téměř všichni ale v druhé části argumentovali pouze větou, že nedává smysl vážit proti sobě víc než dvě hůlku najednou, protože hůlky můžou být různě těžké, a tak nám to nedá žádnou informaci. To bohužel jako vysvětlení, proč to nemůže být fungující strategie, nestačí. Obecně se snažte vyvarovat řešení, které neurčitě nebo vágně polemizuje o možnostech rozložení a uspořádání – smrdí to mlhou!

Perfektní a precizní vyřešení úlohy se ukázalo být pro řešitele velmi náročné a z toho důvodu jsem se rozhodl bodovat mírněji. Speciální pochvalu a imaginární bod si vysloužil *Jakub Parada*, který podobně jako vzorák precizně vyargumentoval, proč 69 vážení nefunguje. Těm, kteří se o zdůvodnění minimality vůbec nezmínili, jsem udělil tři body. *(Jáchym Solecký)*

Úloha 6.

Áďa našla 2000 *plechovek, z nichž* 1000 *je plných a* 1000 *prázdných. Všechny plné váží* 500 g *a všechny prázdné* 100 g. *Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách lze vždy vytvořit dvě stejně početné hromady plechovek (není potřeba použít všechny plechovky), aby každá hromada měla jinou váhu?*

(Rado van Švarc)

Řešení:

Áďa takové dvě hromádky neumí vytvořit bez vážení – když vytvoří dvě hromádky o velikosti n, může se v každé z nich buď objevit přesně n plných plechovek, pokud je $n < 500$, nebo 500 plných a $n - 500$ prázdných plechovek v opačném případě. Proto alespoň jedno vážení potřebuje.

Na druhou stranu na jedno vážení Áďa takové dvě hromádky vytvořit umí. Nechť rozdělí plechovky na tři hromádky (označme je A, B a C), z nichž A a B obsahují po 667 plechovkách a C obsahuje 666 plechovek.

Áďa porovná váhy A a B. Pokud váží různě, má hotovo. V opačném případě ví, že v A a B je stejný počet prázdných plechovek (označme ho x) a stejný počet plných (označme ho y).

Nyní Áďa z A náhodně odebere libovolnou plechovku, BÚNO předpokládejme, že je prázdná, pro plnou bychom postupovali obdobně. Označme takto zmenšenou hromádku A'. Potom A' a C mají stejný počet plechovek. Kdyby vážily stejně, pak v A' i C je y plných plechovek. To by ale znamenalo, že celkem máme $3y$ plných plechovek, což je spor, protože plných plechovek je 1000 a to není dělitelné třemi. Víme tedy jistě, že jako dvojici hromad ze zadání můžeme zvolit C a A zmenšenou o libovolnou plechovku.

Poznámky:

Řešení se sešlo mnoho, s mnoha „řešeními“. Většina jich byla špatně. Většina správných řešení neodůvodnila, proč je alespoň jedno vážení potřeba, ale to jsem se rozhodl považovat za tak jasné, že jsem za to body nestrhával. *(Rado van Švarc)*

Úloha 7.

Pavel má pět mincí, každou jinak těžkou, a kouzelné váhy se třemi miskami. Ty pro každou uspořádanou trojici mincí řeknou, jestli jsou uspořádané podle hmotnosti od nejlehčí po nejtěžší, nebo ne. Ukažte, že když bude mít Pavel smůlu, nebude schopen na devět vážení seřadit mince podle hmotnosti.

(Pavel Hudec)

Řešení:

Hmotnost mince x budeme v řešení značit $m(x)$. Označme $f(n)$ počet uspořádání mincí takových, že odpovědi na prvních n vážení jsou stejné jako u skutečného uspořádání mincí podle hmotnosti. Snadno nahlédneme, že po n-tém vážení Pavel taková uspořádání nerozezná od skutečného.

Pokud váhy odpoví na nějakou trojici mincí (a, b, c) *ano*, znamená to, že zúžily možná uspořádání na taková, pro která platí $m(a) < m(b) < m(c)$. Všech uspořádání mincí je $5! = 120$, uspořádání s podmínkou $m(a) < m(b) < m(c)$ je $4 \cdot 5 = 20$, protože zbylé dvě mince můžeme umístit postupně na čtyři a na pět pozic.

Indukcí podle n dokážeme, že pokud bude mít Pavel smůlu, nemůže zabránit tomu, aby váhy odpověděly v prvních pěti váženích *ne* a aby platilo $f(n) \geq 120 - 20n$ pro $n \leq 5$. Pro $n = 0$ je zřejmě $f(0) = 120$. Nyní předpokládejme, že váhy v dosavadních $i \leq 4$ váženích odpověděly *ne* a $f(i) \geq 120 - 20i \geq 40$. Na $(i + 1)$-ní vážení řeknou váhy *ano* pro 20 různých uspořádání mincí. Ovšem nerozlišitelných uspořádání je po i-tém vážení alespoň 40, takže při Pavlově smůle mu mohou opět říct *ne*.

Předpokládejme, že mu tedy váhy v $(i + 1)$-ním vážení řekly *ne*. Označme $S(k)$ množinu uspořádání mincí, pro která by váhy v k-tém vážení odpověděly *ano*. Víme, že $|S(k)| = 20$. Potom dostáváme:

$$120 - f(i+1) = \left| \bigcup_{k=1}^{i+1} S(k) \right| \leq \sum_{k=1}^{i+1} |S(k)| = 20(i+1),$$
$$f(i+1) \geq 120 - 20(i+1).$$

První rovnost plyne z toho, že na obou stranách jsou právě ta uspořádání, u kterých váhy alespoň jednou odpověděly *ano* . Tímto je indukce hotova.

Při Pavlově smůle se tedy může stát, že $f(5) \geq 20$. Při každém dalším vážení může nastat to, že váhy Pavlovi řeknou tu odpověď, se kterou je konzistentní více uspořádání. To znamená, že každým dalším vážením může Pavel, pokud bude mít smůlu, snížit $f(n)$ nejvýše o polovinu. Snadnou indukcí pak dostaneme $f(9) \geq \frac{20}{16} > 1$. V takovém případě Pavel skutečně nemůže seřadit mince podle hmotnosti.

Poznámky:

Ač se vzorové řešení zdá složité a ač nepřišlo jediné správné řešení, úloha nebyla neřešitelná. Základní myšlenkou bylo nějak přinutit váhy, aby odpovídaly *ne*, což dávalo Pavlovi menší množství informací. Pak už stačilo přijít jen na tu správnou myšlenku se zavedením $f(n)$ a odhadem pro prvních pět vážení.

Většina řešení k úloze přistoupila tak, že vymyslela strategii pro Pavla a o té dokázala, že při Pavlově smůle mu nemusí stačit devět vážení. Nikomu se však nepodařilo mě přesvědčit, že jejich strategie je skutečně optimální. Vzorové řešení naopak vůbec nerozebírá konkrétní Pavlovu strategii.

(Pavel Hudec)

Úloha 8.

Kuba má 3^{2^n} mincí, mezi nimiž je jedna falešná – lehčí než ostatní, které všechny váží stejně. Dále má troje rovnoramenné váhy, z nichž dvoje fungují normálně a jedny ukazují náhodné výsledky. Ukažte, že Kuba umí na $3n + 1$ vážení najít falešnou minci.

(Jakub Löwit)

Řešení:
Při každém vážení rozdělíme mince na tři hromádky, z nichž první a druhou, které uděláme stejné velké, položíme na ramena vah. Váhy vždy rozhodnou, ve které ze tří hromádek se nachází lehčí mince (buď na lehčí straně vah, nebo v případě rovnováhy ve zbývající hromádce). Samozřejmě si musíme dát pozor na falešné váhy.

Pokračujme snadným pozorováním. Mějme k dispozici správné váhy a 3^k mincí, z nichž jedna je lehčí. Pak jsme schopni na k vážení najít falešnou minci. Vždy rozdělíme mince na tři hromádky se stejným počtem mincí a váhy určí, ve které třetině se nachází lehčí mince. Dále pokračujeme s touto hromádkou. Po k váženích nám opravdu zbyde jen jedna mince.

Nyní budeme postupovat indukcí podle n. Pro $n = 1$ bychom rádi na čtyři vážení našli falešnou minci mezi devíti. V prvním vážení rozdělíme mince na tři trojice a použijeme váhy číslo 1. Označme si A, B, C mince v lehčí hromádce (podle našeho vážení). Ve druhém vážení budeme vážit na vahách 2 a rozdělíme mince po třech tak, aby každá ze tří hromádek obsahovala právě jednu z mincí A, B, C. Bez újmy na obecnosti lehčí hromádka obsahuje minci A. Označme si D, E zbývající dvě mince v této hromádce. Pro třetí vážení použijeme váhy 3 a rozdělíme mince takto: na jednu hromádku umístíme mince B, C, na druhou hromádku mince D, E a na třetí hromádku zbývající mince.

Provedli jsme tři vážení na třech různých vahách, z nichž jen jedny můžou být falešné. Proto se lehčí mince musí nacházet alespoň ve dvou lehčích hromádkách z našich tří vážení.

Nyní rozlišíme tři případy podle toho, ve které hromádce je ve třetím vážení lehčí mince. Pokud je lehčí mince v první hromádce, máme dvě možnosti. Buď je lehčí mince A a třetí váhy lžou, nebo je lehčí jedna z mincí B, C a druhé váhy lžou. V každém případě nám zbývají tři podezřelé mince a víme, že první váhy jsou správné, tudíž podle úvodního pozorování nám stačí jedno vážení k určení falešné mince.

Případ, kdy je lehčí mince v druhé hromádce, vyřešíme analogicky.

Pokud je lehčí mince ve třetí hromádce, tak s jistotou víme, že je lehčí mince A, protože žádná jiná mince se nenachází ve dvou lehčích hromádkách.

V obecném případě máme 3^{2n} mincí. Budeme postupovat podobně jako výše, akorát místo devíti mincí uvažujme devět hromádek o 3^{2n-2} mincích. Po třech váženích může opět nastat několik případů. Buď o jedné váze zjistíme, že je správná a zbyde nám 3^{2n-1} mincí (tři hromádky o 3^{2n-2} mincích), nebo nám zbyde jedna hromádka o 3^{2n-2} mincích. V prvním případě nám podle úvodního pozorování stačí dalších $2n - 1$ vážení na správné váze, celkem tedy $2n + 2$, což je pro přirozená n menší nebo rovno kýženému $3n + 1$. V druhém případě jsme hotovi z indukčního předpokladu.

Poznámky:
Přestože byla úloha celkem hravá, došlo jen několik řešení a pouze jedno kompletní. Většina řešitelů buď zapomněla na nějaký případ, nebo se jim nepodařilo úlohu rozlousknout pro $n = 1$. Jelikož myšlenka řešení byla správná, uděloval jsem 3-4 body. *(Lucien Šíma)*