

S posledními jarními mrazíky a odkvétajícími šeríky se rychle a jistě chýlí ke konci i letošní 38. ročník PraSátka – zbývá proto pogratulovat vítězům i poraženým. Kulatou hranici 200 bodů se v celkovém pořadí povedlo překonat právě šesti řešitelům. S bezpečným náskokem deseti bodů zvítězil *Michal Beránek*, zatímco na druhém a třetím místě skončili velmi těsně po řadě *Vašek Janáček* a *Klára Churá*. O čtvrtém, pátém a šestém místě pak na pomyslném výsledkovém pravitku rozhodovaly doslova milimetry.

Každopádně věříme, že se letošní ročník povedl, a doufáme, že Ti přinesl dostatek zábavy i znalostí. Pokud se stejně jako organizátoři cítíš mírně melancholicky, nezoufej – 39. ročník je na dosah! Skutečně, už v této obálce můžeš najít zadání prvních dvou podzimních sérií a užít si s nimi během léta patřičnou dávku legrace.

Teď už tedy nezbývá nic jiného, než Ti za všechny organizátory popřát pěkné léto. Tak na viděnou, slyšenou či dopisovanou! Hodně pěkných zážitků s Prasátkem i jinde přeje

Kuba Löwit

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 39. ročníku

Závěrečná anketa

Na stránce mks.mff.cuni.cz/anketa jsme si pro Tebe připravili anketu o tom, co se Ti v PraSeti líbí a nebo co bys naopak udělal(a) jinak. Můžeš se nám pochlubit, proč seminář řešíš nebo jaká témata série by sis do budoucna přál(a). Zpětná vazba je pro nás důležitá, a proto budeme moc rádi, když nám anketu vyplníš.

Jarní soustředění

V termínu 20. – 28. 4. proběhlo PraSečí soustředění ve městě Branná.

Naše kosmická loď Pr4S3 havarovala na cizí planetě. Nejdříve to vypadalo bledě – posádka ztratila paměť a málem jsme byli nuceni strávit první noc v nekomfortních podmínkách pod vesmírným nebem. Naštěstí se nám brzy podařilo vybudovat solidní základnu – oltář zvyšoval morálku posádky, děla tvořila účinnou obranu proti tajemným mimozemšťanům a díky ananasové plantáži nebyla o jídlo nouze.

Fakta

Soustředění se zúčastnilo 24 účastníků, z nichž nikdo nebyl vážně zraněn, přestože se hrálo noční lighstickové frisbee. Hrály se také deskovky, ping-pong, fotbálek, Stepmania i Counter-Strike a ku podivu všech přítomných zdravotníků se i tyto hrátky obešly bez zranění. Vyrobili jsme si originální vesmírná trička (viz obrázek). Z přednášek

Kontakt:

<http://prase.cz>

info@prase.cz

Korespondenční seminář

KAM MFF UK

Malostranské náměstí 25

118 00 Praha 1



matfyz

jsme si jako vždy odnesli znalosti, ze zážitkového programu zážitky, ale občas i naopak.

Na soustředění bylo rekordní množství různých hudebních nástrojů, řazeno vzestupně podle nečekanosti: kytara, zobcová flétna, housle, příčná flétna, keyboard, trumpet, hoboj.

Během pobytu se snědlo 30 kg ananasového kompotu. A téměř tisíc kremrolí.



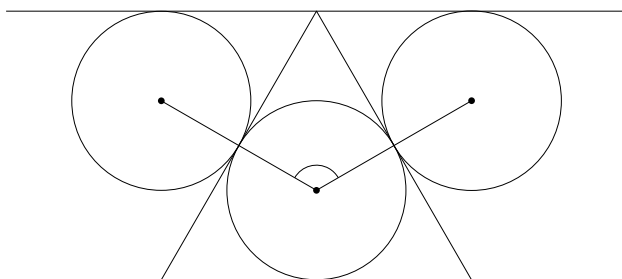
Tečny

2. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

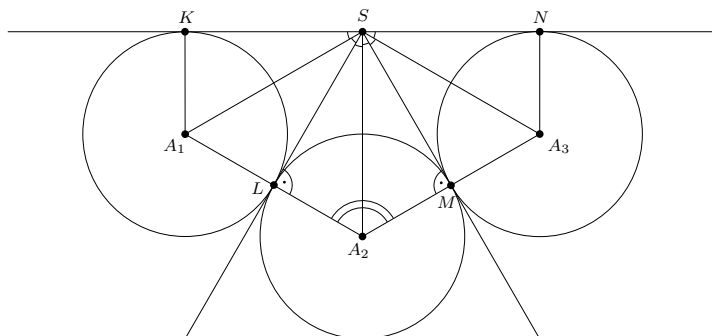
Petr si do sešitu namaloval takovýto obrázek tvořený třemi jednotkovými kružnicemi a jejich společnými tečnami, které procházejí jedním bodem. Všiml si, že krajní kružnice se dotýkají prostřední kružnice. Jakou velikost má vyznačený úhel?



(Petr Gebauer)

ŘEŠENÍ:

Označme si body jako na obrázku: S průsečík tečen, A_1, A_2, A_3 středy kružnic a K, L, M, N body dotyku.



Nejprve ukážeme, že délky úseček SK , SL , SM a SN jsou stejně velké. To platí, neboť každá ze tří dvojic po sobě jdoucích úseček tvoří dvojici tečen z bodu S k jedné ze tří kružnic. Proto jsou tyto dvojice úseček – a tím pádem i všechny čtyři úsečky – stejně dlouhé. Pak trojúhelníky SKA_1 ,

SLA_1 , SLA_2 , SMA_2 , SMA_2 a SNA_2 jsou shodné podle věty *sus*: strany od středu kružnice k bodu dotyku mají délku 1 a úhly mezi poloměry a tečnami jsou vždy 90° .

Pak jsou úhly u vrcholu S shodné, a tedy $|\angle LSM| = |\angle LSA_2| + |\angle A_2SM| = 2 \cdot \frac{180^\circ}{6} = 60^\circ$. Protože máme $|\angle SLA_2| = |\angle SMA_2| = 90^\circ$, umíme ze součtu úhlů ve čtyřúhelníku dopočítat hledaný úhel $|\angle LA_2M| = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

POZNÁMKY:

Většina řešitelů použila postup podobný vzorovému řešení. Úloha se dala ale nahlédnout i třeba pomocí překlopení obrázku podle horní tečny a využití vzniklého pravidelného šestiúhelníku.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 2.

E.T. nakreslil do roviny tři jednotkové kružnice a tři přímky tak, aby žádné dvě kružnice ani žádné dvě přímky nesplyvaly a každá přímka se dotýkala všech tří kružnic. Nalezněte nějaký možný obsah trojúhelníku vytvořeného ze středů těchto kružnic.

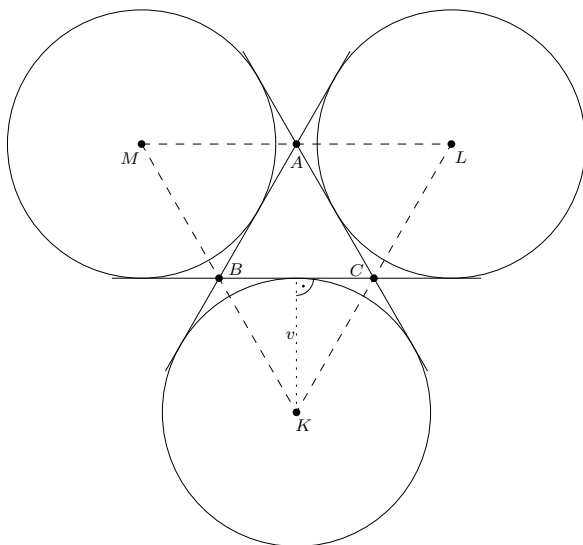
(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Vezměme si rovnostranný trojúhelník ABC a přiřepíme mu kružnice se středy K , L , M . Ty jsou zřejmě všechny stejně velké. Najdeme tedy takovou délku strany trojúhelníku ABC , aby připsané kružnice byly jednotkové. Zadání je splněno, neboť připsané kružnice se dotýkají všech tří přímek vytvořených prodloužením stran trojúhelníku.

Úsečka spojující K a B je osou vnějšího úhlu $\triangle ABC$, velikost úhlu $\angle CBK$ je tedy 60° . Aplikováním podobného pozorování na další vrcholy trojúhelníku a středy kružnic dostaneme další tři rovnostranné trojúhelníky, které jsou díky společným stranám stejně velké jako $\triangle ABC$. Dohromady tyto čtyři trojúhelníky tvoří rovnostranný trojúhelník KLM (body K , B , a M leží na jedné přímce, protože u vrcholu B se sečtou tři úhly velikosti 60° ; obdobně pro zbylé strany).

Výška trojúhelníku CKB je rovna poloměru kružnic, je to tedy 1 jednotka. Snadno spočteme délku strany tohoto trojúhelníku: $|CB| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot v = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Jeho obsah je pak $S_{CKB} = \frac{|CB|v}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Díky shodnosti malých trojúhelníků už snadno dostaneme obsah trojúhelníku tvořeného středy kružnic: $S_{KLM} = 4 \cdot S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



POZNÁMKY:

Téměř všechna řešení postupovala velmi podobně jako vzorové. Jen doplním, že vzhledem k formulaci zadání úlohy skutečně nebylo potřeba zjišťovat, jestli toto rozložení je jediné možné.

(Michal Töpfer)

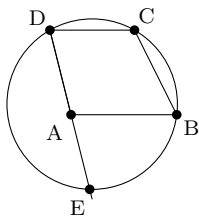
Úloha 3.

Nechť $ABCD$ je lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice opsaná trojúhelníku BCD protne přímku DA v bodě E různém od D . Ukažte, že CB je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABE .

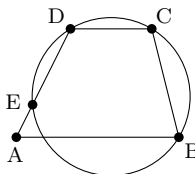
(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

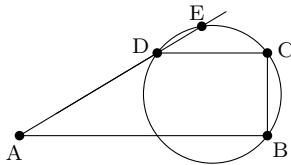
Nejprve si všimněme, že body B, C, D a E leží (v nějakém pořadí) na společné kružnici. K důkazu využijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu. Rozebereme tři případy podle polohy bodu E , viz obrázek.



Případ 1



Případ 2a



Případ 2b

- (1) $E \notin \overrightarrow{AD}$: Potřebujeme ukázat $|\angle AEB| = |\angle ABC|$. Z rovnoběžnosti přímek AB a CD dostáváme $|\angle ABC| + |\angle BCD| = 180^\circ$. Body C a E leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce BD , platí tedy

$$|\angle ABC| = 180^\circ - |\angle BCD| = |\angle DEB|.$$

Jelikož však $E \notin \overrightarrow{AD}$, jsou úhly $\angle DEB$ a $\angle AEB$ totožné.

- (2) $E \in \overrightarrow{AD}$: Potřebujeme ukázat $|\angle EAB| = |\angle ECB|$. Obdobně jako v předchozím případě $|\angle ADC| + |\angle DAB| = 180^\circ$. Mohou nastat dvě možnosti, kde může ležet bod E :

- (a) $E \in AD$. V tomto případě leží body B a D v opačných polorovinách vzhledem k přímce EC , tudíž

$$|\angle ECB| = 180^\circ - |\angle EDC| = 180^\circ - |\angle ADC| = |\angle DAB| = |\angle EAB|.$$

- (b) $E \notin AD$. body B a D nyní leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce EC a tedy

$$|\angle ECB| = |\angle EDC| = 180^\circ - |\angle ADC| = |\angle DAB| = |\angle EAB|,$$

čímž jsme ověřili poslední možný případ.

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ (PODLE MATĚJE DOLEŽÁLKA):

Označme (p, q) orientovaný úhel mezi přímkami p a q , tj. úhel, o který musíme otočit přímkou p proti směru hodinových ručiček, abychom dostali přímkou q . Pro čtyři body K, L, M, N ležící na společné kružnici pak platí

$$(KM, ML) = (KN, NL)$$

nezávisle na jejich pořadí.

Obdobnou vlastnost má orientovaná verze věty o obvodovém a úsekovém úhlu. Pro kružnici k a libovolné na ní ležící body P, Q, R tvrdí, že přímka t procházející bodem R je tečnou k právě tehdy, když

$$(PQ, QR) = (PR, t).$$

Nyní nám stačí tato pozorování spojit:

$$(AE, EB) = (DE, EB) = (DC, CB) = (AB, CB),$$

přičemž rovnost prvního a posledního členu jsme chtěli ukázat.

POZNÁMKY:

Úloha byla trochu nepříjemná kvůli více možným případům polohy bodu E , které bylo třeba alespoň částečně řešit zvlášť. Mnoho řešitelů vyřešilo pouze jednu variantu a na zbylé konfigurace zcela zapomnělo, za což jsem strhával jeden bod. Pokud naopak bylo řešení zcela kompletní, uděloval jsem bonusové $+i$.

V geometrických úlohách občas nastává problém s řešením několika dost podobných, nicméně přece jen různých, konfigurací. Dokud jsou tyto konfigurace tři jako v tomto případě, je to ještě celkem v pohodě, ale když je jich ještě o dost víc, tak se opravdu hodí používat při sepisování orientované úhly jako zde v alternativním řešení. Přitom klasicky stačí úlohu vyřešit v jedné konfiguraci a posléze jen ověřit, zda řešení po přepsání do orientovaných úhlů nevyřeší všechny.

(Tomáš Novotný)

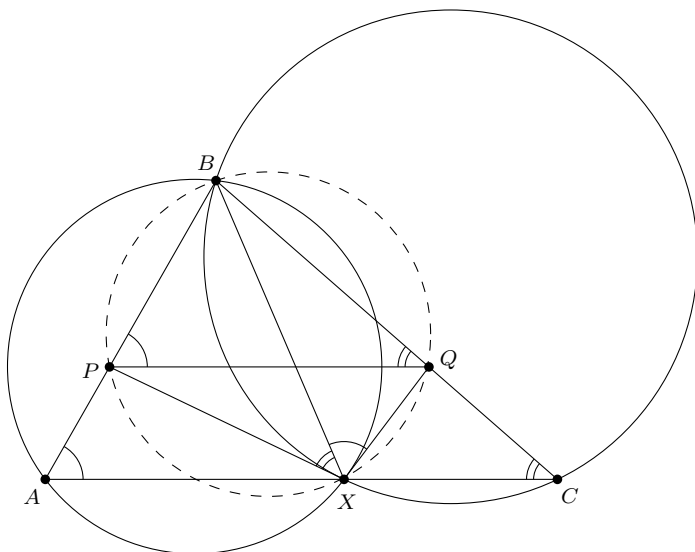
Úloha 4.

Na straně AC trojúhelníku ABC leží bod X . Na stranách AB a BC nalezneme takové body P a Q , aby PX byla tečna ke kružnici opsané ABC a QX byla tečna ke kružnici opsané XBA . Ukažte, že přímka PQ je rovnoběžná s AC .

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Označme si úhly v trojúhelníku ABC postupně α, β, γ . Úhel $\sphericalangle BXP$ je úsekový úhel příslušný k obloukovému úhlu $\sphericalangle BCX$, z toho plyne $|\sphericalangle BXP| = |\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle ACB| = \gamma$. Analogicky dostaneme $|\sphericalangle BXQ| = |\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$. Ve čtyřúhelníku $BPXQ$ je součet úhlu $\sphericalangle PXQ$ a $\sphericalangle PBQ$ roven 180° , neboť platí $|\sphericalangle PXQ| + |\sphericalangle PBQ| = |\sphericalangle PXB| + |\sphericalangle PXQ| + |\sphericalangle ABC| = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Čtyřúhelník $BPXQ$ je proto tětiový. Úhly nad obloukem BP tedy mají stejnou velikost, $|\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle BXP| = \gamma$, dále $|\sphericalangle BQP| = \gamma = |\sphericalangle BCA|$ a příslušné úhly, které svírají přímky PQ s BC a AC s BC , jsou souhlasné. Z toho plyne, že PQ je rovnoběžná s AC .



POZNÁMKY:

Většina řešení postupovala velmi podobně jako vzorové řešení, a tím si vysloužila plný počet bodů. V geometrických úlohách je ale třeba dbát na správnost a konzistenci značení (např. úhlů), jinak některé rovnosti nemusí obecně platit. Podobné drobné chyby se u několika řešitelů objevily, body jsem za ně nestrhávala. (Hedvika Ranošová)

Úloha 5.

Kružnice k a l se protínají ve dvou bodech, jeden z nich označme B . Tečna ke kružnici l procházející bodem B protíná kružnici k podruhé v bodě A . Analogicky tečna ke kružnici k procházející bodem B protíná kružnici l podruhé v bodě C . Označme M druhý průsečík kružnice k a přímky AC a N druhý průsečík kružnice l a přímky AC . Ukažte, že pokud body leží na přímce AC v pořadí A, N, M, C , pak platí $2|MN| < |AC|$.

(Jakub Löwit)

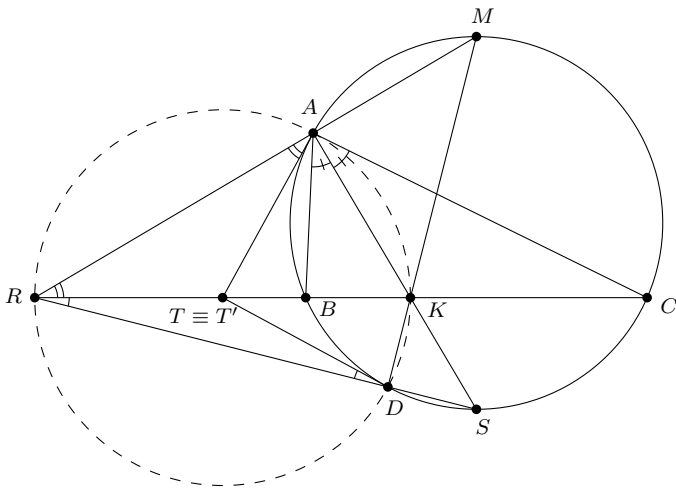
ŘEŠENÍ (VOLNĚ PODLE MICHALA BERÁNKA):

Úhel $\sphericalangle MBC$ je úsekový k $\sphericalangle BAM$ a úhel $\sphericalangle NBA$ je úsekový k $\sphericalangle BCN$, tedy $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle BAC|$ a $|\sphericalangle NBA| = |\sphericalangle BCA|$. Z věty *uu* plyne, že trojúhelníky BCM a ABN jsou podobné.

Díky této podobnosti víme, že $|\sphericalangle BNM| = 180^\circ - |\sphericalangle BNA| = 180^\circ - |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BMN|$, a tedy trojúhelník NBM je rovnoramenný, takže platí $|BN| = |BM|$. BÚNO předpokládáme $|BM| = 1$, dále označme $|CM| = y$. Z podobnosti trojúhelníků BCM a ABN máme $\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|BM|}{|CM|}$, což můžeme přepsat jako $|AN| = \frac{1}{y}$. Z trojúhelníkové nerovnosti v NBM víme, že $|MN| < 2$. Použitím AG nerovnosti dostaneme

$$|MN| < 2 \leq y + \frac{1}{y} = |CM| + |AN|,$$

$$2|MN| < |CM| + |AN| + |MN| = |AC|.$$



POZNÁMKY:

Většina s malými odchylkami postupovala jako vzorové řešení, ale sešlo se i několik velmi zajímavých postupů, některé využívaly i Feuerbachovu kružnici, Pascalovu větu nebo harmonické čtyřpoměry. Všechna taková řešení si vysloužila plný počet bodů.

(Hedvika Ranošová)

Úloha 7.

Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k . Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k , body dotyku pojmenovala A a B . Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ . Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L . Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protla k podruhé v bodě T . Ukažte, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\angle PBT| = |\angle QLA|$.

(Rado van Švarc)

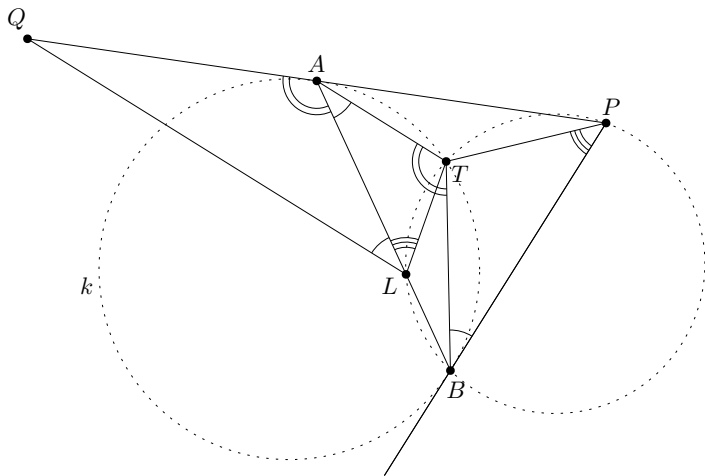
ŘEŠENÍ:

Prímky PA a PB jsou tečnami ke kružnici k a bod A je středem úsečky PQ . Musí tedy platit, že $|PB| = |PA| = |AQ|$. Z věty o obvodovém a úsekovém úhlu pak dostaneme, že $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle PBT|$ a $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle QAL|$. Dále využijeme, že čtyřúhelník $BPTL$ je tětíkový, a tak $|\sphericalangle TPB| + |\sphericalangle BLT| = 180^\circ$. Tudíž $|\sphericalangle TPL| = |\sphericalangle TLA|$.

Trojúhelníky *ALT* a *BPT* jsou si podobné, jelikož mají stejně velké vnitřní úhly. Musí tedy platit

$$\frac{|AL|}{|AT|} = \frac{|BP|}{|BT|} = \frac{|AQ|}{|BT|}.$$

Z tohoto poměru však také plyne, že jsou si podle věty *sus* podobné i trojúhelníky ALQ a TAB . To již nutně znamená, že $|\angle QLA| = |\angle BAT| = |\angle PBT|$.



POZNÁMKY:

K úloze šlo přistupovat různými způsoby, což také dokládá fakt, že každý z osmi úspěšných řešitelů zvolil jiný postup. Vzorové řešení využívající podobnost trojúhelníků bylo inspirováno Adamem Křivkou. Mezi další oblíbené techniky patřilo dokreslování bodů či počítání mocnosti bodu ke kružnici. Narazil jsem však i na aplikaci Cevovy věty. (Martin Hora)

(Martin Hora)

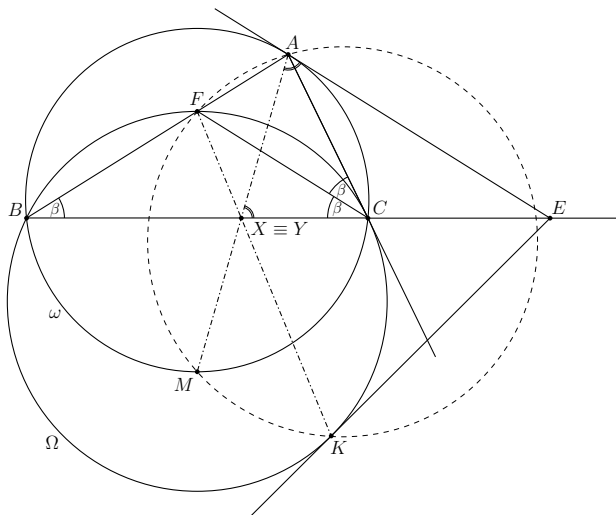
Úloha 8.

Buď ABC trojúhelník splňující $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA|$. Označme ω kružnici jemu opsanou. Necht' tečna k ω z bodu A protíná přímku BC v bodě E . Buď Ω kružnice procházející bodem B , které se přímka AC dotýká v bodě C . Necht' přímka AB podruhé protíná Ω v bodě F . Z bodu E vedeme tečnu k Ω s bodem dotyku K tak, aby body A a K byly na různých stranách od přímky BC . Označme M střed oblouku BC na ω neobsahujícího A . Ukažte, že $AFMK$ je tětíkový čtyřúhelník.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Označme $|\angle ABC| = \beta$. Nejprve ukážeme, že bod F je středem oblouku BC kružnice Ω neobsahujícího K . Ze shodnosti obvodového a úsekového úhlu tětiny FC máme $|\angle FCA| = |\angle CBF| = \beta$, a tedy také $|\angle FCB| = |\angle BCA| - |\angle FCA| = 2\beta - \beta = \beta = |\angle FBC|$. Trojúhelník FBC je díky tomu rovnoramenný a F už tedy musí být středem oblouku.



Protože F i M jsou středy oblouků, jsou přímky KF a AM po řadě osami úhlů $\sphericalangle BKC$ a $\sphericalangle BAC$. Dále jelikož bod E leží na chordále kružnic ω a Ω , má k nim stejnou mocnost, z čehož dostáváme $|EA| = |EK|$. Označme průsečík přímek AM a BC jako X . S využitím věty o úsekovém úhlu tětiny AM dostaneme

$$|\sphericalangle EAX| = |\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle AXC|,$$

kde v poslední rovnosti jsme využili součet úhlů v trojúhelníku ABX . To znamená, že trojúhelník AXE je rovnoramenný se základnou AX , tedy $|EA| = |EX|$.

Analogicky se dá ukázat, že přímky FK a BC se protnou v bodě Y takovém, že $|EY| = |EK|$. To už ale znamená, že $|EY| = |EK| = |EA| = |EX|$, a jelikož X i Y jsou vnitřní body úsečky BC , musí už X a Y splývat. Nyní už stačí použít mocnost tohoto bodu k ω a Ω :

$$|AX| \cdot |MX| = |BX| \cdot |CX| = |BY| \cdot |CY| = |FY| \cdot |KY|.$$

Díky platnosti rovnosti výše je pak $AFMK$ tětíkový.

POZNÁMKY:

Došlo celkem osm řešení a všechna byla správná. Největší část řešitelů místo použití $|EA| = |EX|$ a $|EK| = |EY|$ dokazovala rovnost poměrů $\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BY|}{|CY|}$. Takové řešení bylo náročnější na výpočty, řešitelé si s tím však bez problémů poradili, za což je tímto chválím. (Pavel Hudec)

Doprava

3. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Michal byl na dovolené v Indii a jednoho dne si vyrazil na procházku se slonem Bimbem. Když šel ve stejném směru, jako kráčel Bimbo, došel od jeho paty k chobotu na 30 kroků. Pak šel stejně rychle v opačném směru a udělal během cesty od Bimbova chobotu k patě 15 kroků. Jak dlouhý je Bimbo?

(Viki Němeček)

ŘEŠENÍ:

Označme b délku slona Bimba měřenou v Michalových krocích.

Z prvního případu vyjádříme úsek, který Bimbo ušel, vztahem $s_1 = 30 - b$, neboť Michal musel ujít nejen celou délku od paty k chobotu, ale i úsek s_1 . Z druhé procházky dostaneme vzdálenost, kterou slon urazil, než se Michal dostal k ocasu, výrazem $s_2 = b - 15$. Dále si uvědomme, že se rychlosti slona a Michala nezměnily. Pokud tedy Michal v druhém případě ušel pouze poloviční trasu, muselo se stát to samé i Bimbovi. Z toho plyne $s_1 = 2s_2$.

Vyřešíme soustavu rovnic dosazením

$$\begin{aligned}s_1 &= 30 - b, \\ 2s_2 &= 30 - b, \\ 2 \cdot (b - 15) &= 30 - b, \\ 3b &= 60, \\ b &= 20.\end{aligned}$$

Bimbo je tedy dlouhý 20 Michalových kroků.

POZNÁMKY:

Z došlých řešení byla většina správná a od vzorového řešení se lišila vyjádřeními různých vztahů mezi délkami, rychlostmi a časy. Pouze několik řešitelů si neuvědomilo, že se Bimbova trasa musela zmenšit stejně jako Michalova, ti proto došli k nesprávnému výsledku. (Hedvika Ranošová)

Úloha 2.

Rado se prochází po Manhattanu, kde ulice tvoří čtverečkovou síť. Vždy, když dojde na křižovatku, si hodí mincí a podle toho, co padne, zahne buď doleva, nebo doprava. Mohl mít takové štěstí, že po 2019 ušlých úsecích skončil tam, kde začínal?

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ PŘES STEJNÝ POČET ÚSEKŮ PROTILEHLÝMI SMĚRY:

Nechť jsou ulice na Manhattanu orientované severojižně a východozápadně. Předpokládejme, že Rado skončil na stejné křižovatce, kde začínal. Pak počet úseků, které Rado ušel směrem na sever, musí být stejný jako počet úseků, které Rado ušel směrem na jih. Obdobně počet úseků ušlých směrem na západ musí být stejný jako počet úseků ušlých směrem na východ. Proto musel projít sudý počet severojižních a sudý počet západovýchodních úseků. Celkem tedy Rado ušel sudý počet úseků, což je ale spor, protože podle zadání ušel 2019 úseků. Rado tedy nemohl skončit tam, kde začínal.

ŘEŠENÍ ŠACHOVNICOVÝM OBARVENÍM:

Obarvíme si křižovatky Manhattanu na černé a bílé jako na nekonečné šachovnici. Pak z černé křižovatky dojdeme kterýmkoliv jedním ušlým úsekem na bílou křižovatku a z bílé křižovatky dojdeme kterýmkoliv jedním ušlým úsekem na černou křižovatku. Nyní BÚNO předpokládejme, že křižovatka, na které Rado začínal, je černá. Pak tedy po lichém počtu ušlých úseků musel Rado skončit na bílé křižovatce, a tudíž i po 2019 ušlých úsecích musel skončit na bílé, což znamená, že nemohl skončit tam, kde začínal.

POZNÁMKY:

Celkově se sešlo velké množství řešení, přičemž většina z nich kopírovala jeden z postupů nastíněných výše. Úloha byla velmi jednoduchá, a proto jsem se rozhodl být trochu přísnější vůči zápisu řešení. Dával jsem se hlavně na to, jestli bylo řešení kompletní, nebyly v něm myšlenkové skoky a jestli byl sled myšlenek dostatečně vysvětlený. Pokud jste náhodou ztratili bod nebo dva, neberte to tedy jako špatně vyřešenou úlohu, ale jako prostor pro zlepšení svých zápisů řešení!

(Jáchym Solecký)

Úloha 3.

Pan a paní Novákovi šli se 4 dalšími manželskými páry na autodrom. Každý člověk si půjčil vlastní autíčko a během ježdění do sebe některá autíčka vrazela. Manželé do sebe ovšem nikdy nevrazili. Po skončení jízdy se pan Novák zeptal všech 9 ostatních zúčastněných, s kolika různými lidmi se srazili. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika různými lidmi se srazila paní Nováková?

(Viki Němeček, Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Celkem bylo na autodromu 10 lidí. Víme, že nikdo se nesrazil sám se sebou ani se svým manželem nebo manželkou. Každý tedy mohl narazit do nejvýše osmi lidí. Aby pan Novák dostal devět různých výsledků, počty srážek nutně musely být 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Označme si zúčastněné kromě pana Nováka podle počtu srážek: $X_0, X_1, \dots, X_8$.

Víme, že X_8 se srazil se všemi kromě jednoho člověka, to musel(a) být nutně jeho manžel(ka). Jediný, kdo se nesrazil s nikým, je X_0 , všichni ostatní mají alespoň jednu srážku, a to s X_8 . Z toho plyne, že X_8 a X_0 musí být manželé. Pro ostatní páry postupujeme podobně. X_7 se srazil se všemi kromě dvou lidí, jedním z nich je X_0 a partner X_1 . Všichni kromě X_0 a X_1 mají alespoň dvě srážky (s X_8 a X_7), tedy X_7 a X_1 tvoří manželský pár. Stejnou úvahou spárujeme X_6 a X_2 , X_5 a X_3 .

Zbývá nám pouze osoba X_4 , která v označené skupině nemá protějšek, takže to musí být paní Nováková. Paní Nováková se tedy srazila se čtyřmi lidmi.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správná a postupovala velmi podobně jako vzorové řešení.

(Michal Töpfer)

Úloha 4.

V Tramvării se nachází p tramvajových zastávek, kde p je prvočíslo. Mezi každými dvěma zastávkami vede právě jedna přímá kolej, z nichž žádné dvě se nesetkávají jinde než na zastávce. Kolik nejvíce může v Tramvării jezdit okružních tramvajových linek přes všechny zastávky, pokud žádné dvě linky nesmějí jet po stejné koleji? (Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Pro $p = 2$ vede v Tramvării právě jedna kolej a tedy zde neexistuje okružní linka.

Pro $p > 2$ vede z každého města $p - 1$ kolejí a protože máme p měst a každá kolej vede mezi dvěma městy, existuje v Tramvării právě $\frac{p(p-1)}{2}$ kolejí. Každá okružní jízda přes všechna města projede právě p kolejí, a proto může v Tramvării existovat maximálně $\frac{p-1}{2}$ okružních linek. Protože p je liché, je toto číslo celé.

Nyní ještě potřebujeme najít takovou konstrukci okružních linek v Tramvării, aby linek bylo $\frac{p-1}{2}$. Očísľujeme si tedy zastávky v Tramvării postupně od 0 do $p - 1$. Poté můžeme v Tramvării zvolit následující okružní linky:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0, 1, 2, \dots, p \pmod{p}, \\ (2) \quad & 0, 2, 4, \dots, 2p \pmod{p}, \\ & \vdots \\ (i) \quad & 0, i \pmod{p}, 2i \pmod{p}, \dots, pi \pmod{p}, \\ & \vdots \\ \left(\frac{p-1}{2}\right) \quad & 0, \frac{p-1}{2} \pmod{p}, 2 \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{p}, \dots, p \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Jinými slovy to jsou linky, které začínají na nule, tvoří je p úseků a v každém úseku se posunou o i měst jedním směrem, kde i jde od 1 do $\frac{p-1}{2}$. Snadno vidíme, že všechny takové linky opět končí v nule.

Nyní stačí ukázat, že tyto linky jsou disjunktní a každá z nich prochází všemi zastávkami. Pro to si stačí uvědomit, že na jedné lince mají všechny úseky stejný rozdíl čísel zastávek modulo p , který je navíc pro každou okružní linku jiný. Díky tomu jsou všechny linky disjunktní.

Zbývá ukázat, že námi nalezené linky jsou skutečně okružní, tj. že každé dvě zastávky s výjimkou posledních jsou různé, čímž budeme mít p různých zastávek na každé lince. Pro spor nechť se tramvaj na i -té lince po projetí $k < p$ a $\ell < p$ cest nachází ve stejném městě. Pak $ik \equiv i\ell \pmod{p}$ a protože i není dělitelné p , platí $k \equiv \ell \pmod{p}$. Ale protože k i ℓ jsou menší než p , tak $k = \ell$.

Zkonstruovali jsme tak $\frac{p-1}{2}$ vyhovujících okružních linek a správná odpověď je tedy $\frac{p-1}{2}$.

POZNÁMKY:

Mnoho řešitelů pouze našlo, že okružních linek může být maximálně $\frac{p-1}{2}$, ale již se tento případ nepokusilo zkonstruovat. Tím si vysloužili pouze 2 body. („madam Verča“ Hladíková)

Úloha 5.

Anička jela na hory. Sjezdovky v lyžařském středisku se potkávají v nanejvýš 99 křižovatkách, přičemž mezi dvěma křižovatkami vede vždy maximálně jedna sjezdovka. Žádné dvě křižovatky nejsou ve stejné výšce a na lyžích se dá sjíždět jen dolů. Ukažte, že úseky mezi křižovatkami lze rozdělit na modré a červené takovým způsobem, že Anička není schopná sjet přímo za sebou deset úseků stejné obtížnosti (barvy).

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Křižovatky si seřadíme podle nadmořské výšky a očísľujeme je číslý 1, 2, $\dots$, n , přičemž křižovatce na nejvyšším místě přiřadíme jedničku, nejnižší číslo n . Speciálně budou všechna čísla vždy nejvýše

dvouciferná. Každý úsek sjezdovky, který spojuje dvě křižovatky mající stejnou číslici na místě desítek², obarvíme modře. Zbylé úseky obarvíme červeně.

Předpokládejme, že Anička sjíždí za sebou úseky modré barvy. Jelikož stejnou číslici na místě desítek má maximálně deset křižovatek, znamená to, že Anička může projet maximálně devět úseků modré barvy.

Pokud Anička sjíždí pouze úseky červené barvy, musí cestou navštívit pouze křižovatky s po dvou různými číslicemi na místě desítek (po každém úseku se musí číslo na místě desítek změnit, a může se pouze zvýšit). Existuje nejvýše deset různých číslic, proto může Anička projet maximálně devět úseků červené barvy.

POZNÁMKY:

Řešení se sešlo (na to, že jde o pátku úlohu) relativně málo. Velká část ze správných řešení se držela výše uvedeného argumentu, někteří zvolili jinou konstrukci indukci. (Tonda Češík)

Úloha 6.

Na souostroví Prasopágy mají velmi zvláštní systém podzemní dopravy – každý ostrov je spojen přímou linkou metra právě se třemi jinými ostrovy. Bylo rozhodnuto, že je pro větší přehlednost třeba jednotlivé úseky metra označit zelenou, žlutou a červenou barvou. Aby bylo byrokracii učiněno zadost, bude úseky střídavě obarvovat ministr dopravy a ministr kultury, přičemž ministr dopravy začíná. V každém kroku si tedy příslušný ministr vybere jeden úsek metra a obarví ho libovolnou barvou. Ministr dopravy by chtěl metro obarvit tak, aby se na žádném ostrově nepotkávaly úseky všech tří barev. Ministr kultury si naopak přeje, aby se na nějakém ostrově linky všech tří barev setkaly. Který z nich umí své přání prosadit? (Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Své přání si vždy umí prosadit ministr kultury. Ministr kultury bude hrát tak, aby vždy před jeho tahem byly z každého ostrova obarveny buď tři linky z něj vedoucí, nebo nejvýše jedna. Zároveň vždy zajistí, aby existoval alespoň jeden ostrov, ze kterého povede právě jeden obarvený tunel. To je vždy a triviálně po prvním tahu ministra dopravy splněno.

Pokud ministr kultury nemůže svým tahem uzavřít cyklus, pak si vybere ostrov s jednou obarvenou linkou a obarví druhou z něj vedoucí linku jinou barvou. Aby ministr dopravy v následujícím tahu neprohrál, musí obarvit třetí linku. Tím se nemůže uzavřít cyklus, protože jinak by tuto linku mohl už dříve obarvit ministr kultury. Z toho také plyne, že oba tyto úseky vedou na ostrov, ze kterého předtím nevedla žádná obarvená linka. Po těchto tazích tedy vzniknou nové ostrovy s jednou obarvenou linkou a současně nevzniknou žádné se dvěma.

Pokud naopak ministr kultury může uzavřít cyklus, může to udělat spojením dvou ostrovů, ze kterých vedla právě jedna obarvená linka. To znamená, že může vybrat barvu nepoužitou na těchto sousedních linkách a obarvit s ní linku kompletující cyklus. Takto ministr kultury hrozí obarvením třetí linky u obou ostrovů třetí barvou. Ministr dopravy může zabránit pouze jedné z těchto hrozeb, čímž však nezabrání ministru kultury ve výhře.

Zároveň stále existuje v průběhu hry ostrov, který má obarvenou jen jednu linku. A protože je souostroví konečné, musí někdy nastat druhý případ a ministr kultury tak skutečně vyhraje.

POZNÁMKY:

Úloha byla náročná obzvláště na přesnou argumentaci – velká většina řešitelů měla hlavní myšlenku strategie ministra kultury, ale úspěšně se vypořádát se všemi problémy, které mohly při jejich postupu potenciálně nastat, se povedlo jen části z nich. (Pavel Hudec)

²U čísel 1, 2, ..., 9 uvažujeme číslici 0.

Úloha 7.

V Americe se nachází n měst, z nichž některá jsou spojena jednosměrnými leteckými linkami. V každém z těchto měst se nachází význačná pamětihodnost. Cestovní kancelář chce zřídit v některých amerických městech pobočky, aby ke každé pamětihodnosti mohla uspořádat zájezd začínající v některé ze svých poboček za pomoci nejvýše dvou leteckých linek. Zároveň si chce počínat ekonomicky – nechce, aby měla pobočky ve dvou městech spojených leteckou linkou. Dokažte, že to vždy může zařídit.

(Pavel Hudec)

ŘEŠENÍ:

Budeme postupovat indukcí podle n , předpokládejme, že pro libovolné rozmístění linek na méně než n vrcholech tvrzení platí. Pro $n = 0$ zvolíme prázdnou množinu měst, pro $n = 1$ je tvrzení triviální.

Zvolíme si město x a označme X množinu měst, do kterých vede z x přímé letecké spojení. Pro naši množinu měst bez x a X tvrzení platí, můžeme tedy podle indukčního předpokladu rozmístit pobočky tak, aby splňovaly podmínky v zadání. Pokud nyní vede z města s pobočkou linka do x , pak se dá dostat do x i X za pomoci nejvýše dvou leteckých linek, tedy pobočky takto rozmístit umíme. Pokud žádná taková linka nevede, pak už město x není spojeno s žádným městem s pobočkou. Proto můžeme do x přidat pobočku a máme vyhovující rozmístění poboček i pro n měst.

POZNÁMKY:

Úloha byla trikovaná a došla pouze dvě správná řešení. Jedním z přístupů, který mohl v této úloze vést k cíli, bylo zjistit, že přímočará indukce nefunguje a pokusit se ji nějak opravit.

(Pavel Hudec)

Úloha 8.

V Chrochrostánu je m měst, přičemž některé dvojice měst jsou spojeny železnicí. Je známo, že z každého města vede přesně $2nk$ železničních tratí. V Chrochrostánu dále sídlí mn přepravních společností a každá by ráda provozovala právě k tratí. Každá společnost přitom chce, aby všechny její tratě začínaly ve stejném městě. Dokažte, že si tak společnosti tratě skutečně umí rozdělit.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Tratí v grafu si zorientujeme tak, aby do každého města vjíždělo nk tratí a dalších nk vyjíždělo. Potom jednoduše do každého města umístíme n společností a libovolně jim rozdělíme po k tratích vyjíždějících z města ven.

Zbývá ukázat, že tratě skutečně umíme zorientovat tak, že jich do města vchází tolik, kolik jich vychází ven. To ve skutečnosti umíme kdykoliv každým městem prochází sudý počet tratí. Toto tvrzení ukážeme indukcí podle celkového počtu tratí.

Pokud nejsou tratě žádné – je jich nula, je tvrzení zjevné.

Nyní, nechť je tratí $k > 0$ a my už umíme tvrzení ukázat pro všechny počty tratí menší než k . Podívejme se do libovolného města A , kterým nějaká trať prochází. Následně se vydáme po libovolné tratí do vedlejšího města a v každém dalším městě nasedneme na zatím neprojetou trať. Toto opakuje tak dlouho, dokud se nevrátíme do A . Proč tento postup funguje? Kdyby nefungoval, museli bychom někdy přijet do nějakého města B tak, že už bychom nemohli přeskočit na žádnou trať, kterou jsme zatím neprojeli. Ale tratí skrz B vede sudý počet, při každém předchozím průchodu jsme počet použitelných tratí snížili o dva a nyní jsme příjezdem ještě počet použitelných tratí snížili o jedna. To ale znamená, že jsme zatím v B použili lichý počet tratí, což je spor s tím, že jsme je použili všechny.

Časem se tedy vrátíme zpátky do A . Nyní všechny tratí na uvedené cestě zorientujeme podle toho, jakým směrem jsme se po nich pohybovali. Následně si představíme, že všechny tyto projeté tratě dočasně zmizely. Z indukčního předpokladu pak zbylé tratě umíme zorientovat požadovaným

způsobem, takže po zpětném přidání dočasně zapomenutých tratí máme hotovo (protože jsme do každého města přijeli tolikrát, kolikrát jsme z něj odjeli).

POZNÁMKY:

Velká část řešení spočívala pouze v tom, že řešitelé prohlásili, že do každého města dají n společností a potom to početně vyjde. Nijak ovšem neřekli, jak to udělají. Protože to, jak se to udělá, je ta těžší část úlohy, nedával jsem za toto prohlášení žádné body.

Někteří řešitelé, znalejší v teorii grafů, se odvolávali na znalost eulerovského tahu. Tam je třeba nezapomenout, že v grafu existuje eulerovský tah právě tehdy, když každý vrchol má sudý stupeň a *graf je souvislý*. Proto nejde eulerovský tah použít přímo, ale je třeba ho vyrobit na každé komponentě souvislosti zvlášť. (Rado van Švarc)

Pravděpodobnost III

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Každá z náhodných veličin X, Y může nabývat pouze hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Víme, že existuje konstanta c taková, že pro libovolná i, j z této množiny platí

$$P(X = i \cap Y = j) = c \cdot (i + j).$$

Jsou dané veličiny nezávislé?

(Danil Koževnikov)

ŘEŠENÍ:

Pro spor předpokládejme, že jsou náhodné veličiny nezávislé. Pak pro libovolná i, j ze zadané množiny platí $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$.

Pokud by jeden z deseti možných jevů nemohl nastat, BÚNO $P(X = 1) = 0$, tak by platilo $0 = P(X = 1 \cap Y = 1) = 2c$, což implikuje $c = 0$. Nicméně pro každou náhodnou veličinu musí existovat jev, který nastane s nenulovou pravděpodobností, neboli existují taková $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, že $0 < P(X = i) \cdot P(Y = j) = P(X = i \cap Y = j) = c(i + j) = 0$, což by byl spor. Tedy pro všechna $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ platí $P(X = i) > 0$, $P(Y = j) > 0$, $P(X = i \cap Y = j) > 0$ a rovněž $c \neq 0$.

Nyní již můžeme upravovat:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{2c}{3c} = \frac{P(X = 1 \cap Y = 1)}{P(X = 1 \cap Y = 2)} = \frac{P(X = 1) \cdot P(Y = 1)}{P(X = 1) \cdot P(Y = 2)} = \frac{P(Y = 1)}{P(Y = 2)} = \\ &= \frac{P(X = 2) \cdot P(Y = 1)}{P(X = 2) \cdot P(Y = 2)} = \frac{P(X = 2 \cap Y = 1)}{P(X = 2 \cap Y = 2)} = \frac{3c}{4c} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

což je hledaný spor. Zadané náhodné veličiny tedy nejsou nezávislé.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů správně předpokládala nezávislost daných veličin a získala spor postupným dosazováním konkrétních hodnot. Část z nich bohužel zapomněla rozlišit případ, kdy $c = 0$ nebo kdy je některá z pravděpodobností rovna nule, čímž v průběhu řešení neošetřila dělení nulou.

(Martin Raška)

Úloha 2.

Kuba se živí psaním scénářů romantických seriálů. Právě píše scénář, ve kterém je deset postav, přičemž pro každou dvojici z nich si Kuba hodil férovou mincí, aby se rozhodnul, zda se do sebe daní dva lidé zamilují. Jeden člověk tak může být zamilován do libovolného počtu jiných lidí. Každí tři různí lidé, kteří se do sebe navzájem zamilují, tvoří milostný trojúhelník. Dokažte, že počet milostných trojúhelníků je alespoň 30 s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

(Danil Koževnikov)

ŘEŠENÍ:

Počet různých trojic postav je $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$. Aby daná trojice tvořila milostný trojúhelník, musí se zamilovat každá ze tří dvojic, tedy musí nastat tři nezávislé jevy, z nichž každý nastává s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Daní tři lidé proto tvoří milostný trojúhelník s pravděpodobností $\frac{1}{8}$.

Zavedeme-li si pro i -tou trojici indikátorovou veličinu X_i , která nabývá hodnoty jedna, tvoří-li daná trojice milostný trojúhelník, a jinak je rovna nule, bude pro střední hodnotu této veličiny platit $E(X_i) = \frac{7}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$. Počet milostných trojic X pak můžeme vyjádřit jako součet $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{120}$. Z linearity střední hodnoty plyne

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_{120}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{120}) = 120 \cdot \frac{1}{8} = 15.$$

Nakonec už jen stačí použít Markovovu nerovnost podobně jako v seriálovém textu. Dostáváme

$$P(X \geq 30) = P(X \geq 2 \cdot E(X)) \leq \frac{1}{2},$$

neboli počet milostných trojúhelníků je alespoň třicet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

POZNÁMKY:

Většina řešení postupovala přesně podle toho vzorového. Pozor, pokud je střední hodnota náhodné veličiny 30, neznamená to, že tato veličina nabývá hodnoty větší (či menší) než 30 s poloviční pravděpodobností! Abychom mohli přejít od střední hodnoty k pravděpodobnosti, musíme použít (třeba) Markovovu nerovnost. (Vašek Rozhoň)

Úloha 3.

Do ZOO přišlo n různých vysokých orgů a $n + 1$ různých vysokých účastníků. Orgové si v náhodném pořadí stoupli do fronty, aby se mohli pokochat pohledem na roztomilé tuleně. Účastníci si mezitím v náhodném pořadí stoupli do jiné fronty, aby se mohli kochat pohledem na rozkošné lachtany. Každý vidí na dané zvíře právě tehdy, když je vyšší než všichni, kteří stojí ve frontě před ním. O kolik se liší rozptyl náhodné veličiny O , která značí počet orgů vidících na tuleně, od rozptylu náhodné veličiny U , která značí počet účastníků vidících na lachtany?

(Danil Koževnikov)

KOMBINATORICKÉ ŘEŠENÍ:

Představme si obecněji řadu m lidí, kteří se koukají na libovolné ploutvonožce. Pro i -tého člověka si zavedme indikátorovou veličinu X_i , která je rovna jedné právě tehdy, když dotyčný vidí na zvířátka. Ze zadání víme, že indikují jevy „ i -tý člověk je vyšší než všichni před ním“.

Ze symetrie platí $E(X_i) = \frac{1}{i}$, neboť každá poloha nejvyššího člověka z prvních i je stejně pravděpodobná. Zároveň jelikož X_i jsou indikátory, tak pro ně platí $X_i^2 = X_i$, takže $\text{Var}(X_i) = E(X_i) - E(X_i)^2 = \frac{i-1}{i^2}$.

Pro spočtení rozptylu součtu $\sum_{i=1}^m X_i$ ještě ukážeme, že tyto náhodné veličiny jsou po dvou nezávislé. K tomu si stačí pouze rozmyslet, že jevy, jež dané veličiny indikují, jsou nezávislé, neboli $E(X_i X_j) = \frac{1}{ij}$ pro $i > j$ ($X_i X_j$ je totiž indikátorem jejich průniku).

Spočítejme si, kolik existuje možností pro rozestavení prvních i lidí do řady. Zafixujme si jejich výšky a zkoumejme pouze to, jak je musíme rozestavit, budeme-li je do fronty umisťovat odzadu. Poslední člověk v řadě musí být nejvyšší, takže pro něj máme přesně jednu možnost, analogicky j -tý člověk musí být nejvyšší ze zatím nezvolených, takže i jeho volba je pevně určena těmi předchozími. Naopak ať už zvolíme rozestavení ostatních $i-2$ lidí jakkoliv, tak ti dva stejně uvidí na ploutvonožce, pro k -tého člověka tedy máme k možností a dohromady dostáváme $(i-1) \cdot \dots \cdot (j+1) \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot 1 = \frac{i!}{ij}$ vyhovujících možností. To znamená, že pravděpodobnost, že oba tito lidé uvidí, je $\frac{1}{ij}$, takže zkoumané jevy jsou vskutku nezávislé.

Proto platí $\text{Var}(\sum_{i=1}^m X_i) = \sum_{i=1}^m \frac{i-1}{i^2}$, takže $\text{Var}(U) - \text{Var}(O) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i-1}{i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$.

TRIKOVÉ ŘEŠENÍ:

Rozptyl náhodných veličin O, U můžeme vyjádřit i zavedením jiných indikátorů (výpočet předvedeme pouze pro O , pro U je postup analogický, až na změnu počtu lidí a zvířete). Nechť Y_i tedy indikuje jev „ i -tý nejvyšší org vidí na tuleně“. Potom zjevně $O = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Tyto jevy jsou nezávislé, neboť to, kde stojí nižší orgové, jistě neovlivní to, zda na tuleně uvidí org vyšší. Zároveň jsou ze symetrie všechna pořadí nejvyšších i lidí stejně pravděpodobná a $Y_i = 1$ právě tehdy, když bude ten nejnižší z nich před všemi ostatními, tudíž platí $E(Y_i) = \frac{1}{i}$ a řešení můžeme dokončit analogicky, jako to první.

POZNÁMKY:

Jediné řešení, které se vydalo trikovou cestou, jsem ocenil kladným imaginárním bodem. Všechna ostatní řešení se víceméně úspěšně vydala tou přímočařejší cestou, body jsem strhával jen, když jste nedokázali nezávislost náhodných veličin, která je pro zdůvodnění korektnosti výše uvedeného výpočtu nezbytná. Nejčastější chybou bylo zaměňování tuleňů za lachtany, nehledě na její závažnost jsem se za ni nakonec rozhodl body nestrhávat :).

(Danil Koževnikov)

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *Nadaní australští pavouci upletli přes noc pavučinu ve tvaru krychle. Do rána se na její stěny nachytaly mouchy, přičemž na každé stěně byla chycena alespoň jedna. Když druhý den přišel Martin k pavučině, představil si v každém vrcholu součin počtů much na jeho přilehlých stěnách. Všiml si, že součet těchto ohodnocení vrcholů je roven 2019. Fíla k němu ihned přiběhl, chvíli se na pavučinu koukal a pak prohlásil, že mu nevěří. Který z chlapců má pravdu?* (Marian Poljak)

(b) *Poté, co se chlapci dohádali, si pavouci uložili všechny mouchy do vrcholů takovým způsobem, že v každých dvou byl různý nenulový počet much. Přes noc se na hrany krychle nachytali mravenci. Madam Verča si všimla, že pro každou hranu je počet mravenců na ní roven největšímu společnému děliteli počtů much na příslušných koncových vrcholech. Mohlo se nachytat stejně much jako mravenců?* (Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

(a) Dokážeme, že pravdu má Fíla. Označme počty much na spodní a svrchní stěně jako a a f a počty much na bočních stěnách postupně b , c , d , e . Potom součet ohodnocení daných vrcholů je roven:

$$abc + fbc + acd + fcd + ade + fde + aeb + feb = (a + f)(bc + cd + de + eb) = (a + f)(b + d)(c + e).$$

Nicméně prvočíselný rozklad čísla 2019 je roven $3 \cdot 673$ a každá ze tří závorek výše je rovna alespoň 2, tedy není možné zapsat 2019 jako součin tří čísel větších než 1 (jinak by prvočíselný rozklad 2019 musel být součin alespoň tří ne nutně různých prvočísel).

(b) Ukážeme, že to není možné, protože počet mravenců musí být vždy menší než počet much. Mějme dvě různá přirozená čísla a , b a označme (a, b) jejich největšího společného dělitele. Pak existují přirozená k , l taková, že $a = k \cdot (a, b)$ a $b = l \cdot (a, b)$. Z různosti a , b plyne i různost k , l a tedy $k + l \geq 3$. Složením těchto poznatků získáme nerovnost $a + b = (a, b)(k + l) \geq 3(a, b)$. Rovnost nastane právě tehdy, když $k = 1$ a $l = 2$ (nebo $k = 2$ a $l = 1$) neboli jedno z čísel a , b je dvojnásobkem toho druhého.

Označme V počet much a E počet mravenců a sečtěme výše získanou nerovnost přes všechny hrany v krychli. Dostaneme nerovnost $3E \leq 3V$, protože z každého vrcholu vedou tři hrany, a tak se na pravé straně nerovnosti objeví právě třikrát. Po úpravě platí $E \leq V$ s tím, že rovnost nastává právě tehdy, když pro každé dva sousední vrcholy platí, že hodnota v jednom je dvojnásobkem hodnoty v druhém. Tím pádem máme pro sousedy nějakého konkrétního vrcholu jenom dvě možnosti přiřazení hodnot (dvojnásobek a polovinu hodnoty uvažovaného vrcholu), ale každý vrchol má tři sousedy a nějaká hodnota by se tak musela opakovat, což není možné. Tím pádem rovnost nemůže nastat a počet mravenců je vždy menší než počet much.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů si troufla pouze na první část úlohy a došlá řešení byla typicky správně a postupovala stejně jako to vzorové. Část řešitelů se lehce zamotala při práci s posledním argumentem v úloze (a), který je sice na první pohled jasný, ale je důležité ho umět říct správně. Bod jsem se za to rozhodl nestrhávat.

(Martin Raška)

Úloha 2.

(a) Necht' a a b jsou kladná reálná čísla. Rado si nakreslil pravidelný šestiúhelník se stranami délky a a zvenku na každou stranu nalepil obdélník o stranách a a b (k šestiúhelníku přilepený stranou délky a). Všiml si, že ty vrcholy obdélníků, které nejsou vrcholy původního šestiúhelníku, leží na jedné kružnici o poloměru r . Hedvika jeho postup zopakovala, ale s prohozenými hodnotami a a b . Tím dostala kružnici o poloměru h . Ukažte, že $r = h$.

(David Hruška)

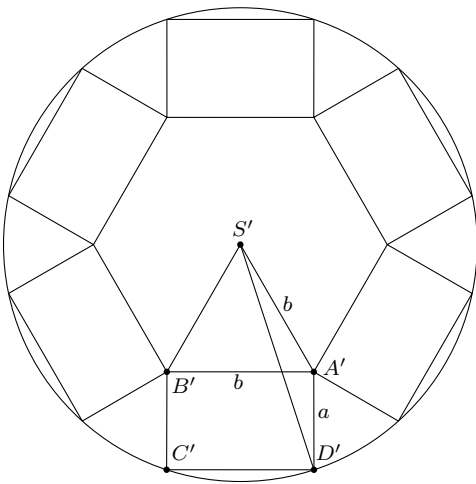
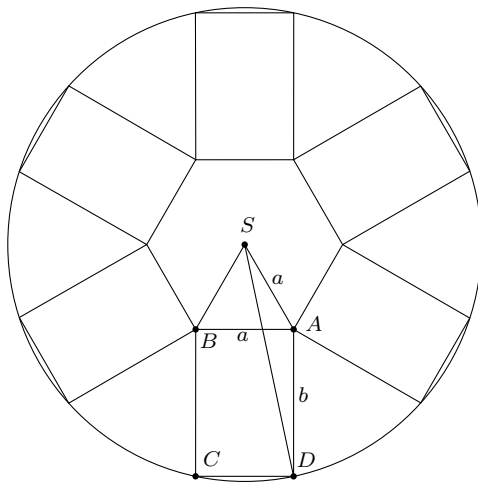
(b) V obdélníku $ABCD$ označme P a Q středy stran BC a CD . Úsečka BQ protíná úsečky AP a PD postupně v bodech K a L . Úsečky PD a AQ se protínají v bodě M . Středy úseček MA , AK a KL si označme postupně X , Y a Z . Ukažte, že kolmice z X na BQ , z Y na PD a ze Z na AQ se protínají v jednom bodě.

(Jakub Löwit, Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

(a) Střed Radova šestiúhelníku si označme S . Necht' AB je nějaká ze stran šestiúhelníku a $ABCD$ je obdélník k ní nalepený. Z pravidelnosti daného šestiúhelníku plyne, že ASB je rovnostranný trojúhelník, takže $|SA| = |AB| = a$. Dále platí, že $|\angle SAD| = |\angle SAB| + |\angle BAD| = 60^\circ + 90^\circ$. Tedy v trojúhelníku SAD je $|SA| = a$, $|AD| = b$ a $|\angle SAD| = 150^\circ$.

Pokud si střed Hedvičina šestiúhelníku označíme S' a stejným způsobem uvažujeme obdélník $A'B'C'D'$, dostaneme analogickým postupem, že $|S'A'| = b$, $|A'D'| = a$ a $|\angle S'A'D'| = 150^\circ$. Tedy z věty *sss* jsou trojúhelníky SAD a $S'A'D'$ shodné. Speciálně pak $|SD| = |D'S'|$. A protože $r = |SD|$ a $h = |D'S'|$, je $r = h$.



(b) Ze symetrie je $|\angle DAQ| = |\angle QBC|$ a z rovnoběžnosti a symetrie platí $|\angle ADP| = |\angle DPC| = |\angle APB|$. Potom jsou trojúhelníky DAM a PBK podle věty *uu* podobné. Tedy $|\angle AKL| = |\angle BKP| = |\angle AMD| = 180^\circ - |\angle AML|$, takže čtyřúhelník $AKLM$ je tětiový.

ŘEŠENÍ:

(a) Dle známého vzorce víme, že $a^n - b^n = (a - b)(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i)$.

Po dosazení $a = k$, $b = 1$, $n = k - 1$ dostáváme:

$$k^{k-1} - 1 = k^{k-1} - 1^{k-1} = (k - 1)(k^{k-2} + k^{k-3} + \dots + 1).$$

Ukážeme, že $k - 1$ dělí pravou závorku $(k^{k-2} + k^{k-3} + \dots + 1)$. Podívejme se na ni modulo $k - 1$ (budeme využívat toho, že $k \equiv 1 \pmod{k - 1}$):

$$(k^{k-2} + k^{k-3} + \dots + 1) \equiv (1^{k-2} + 1^{k-3} + \dots + 1) \equiv (k - 1) \cdot 1 \equiv 0 \pmod{k - 1}.$$

Dokázali jsme, že $k - 1$ dělí i pravou závorku, tudíž dohromady máme $(k - 1)^2 \mid k^{k-1} - 1$.

(b) Pokud číslo dělí nějaká dvě čísla, dělí i jejich rozdíl a součet. Proto platí $p \mid (n^2 + 1) - (m^2 + 1) = (n - m)(n + m)$. Protože $p > n - m > 0$ a zároveň p je prvočíslo, tak p nemůže dělit $n - m$, jelikož je tento výraz menší.

Takže máme $p \mid n + m$, z čehož dostáváme i $p \mid (n + m)^2$. Z toho odvodíme, že $p \mid (n + m)^2 - (n^2 + 1) - (m^2 + 1)$. Po zjednodušení dostáváme $p \mid 2(mn - 1)$. Víme však, že $p > n > m > 0$, tudíž $p \geq 3$. Proto je dvojka nesoudělná s p , takže máme, že $p \mid mn - 1$, což jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Přijatá řešení příkladu (a) byla velice podobná. Trochu se lišila ve využívání modulární aritmetiky či prostého dělení polynomů, ale v principu byla stejná. Až na pár drobností byla všechna správně.

Příklad (b) už poslalo méně lidí, ale i tak přišlo dost řešení. Všechna byla moc hezká a velmi podobná vzorovému, avšak našla se i taková, která využívala docela silných tvrzení. Za mě se úloha všem moc povedla.

(Filip Čermák)

Úloha 4.

(a) Řešte v $\mathbb{Z}$:

$$x^2 - 6x + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

(Rado van Švarc)

(b) Řešte v $\mathbb{N}_0$ pro $a \geq b \geq c \geq d$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n.$$

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

(a) Nejprve si všimněme, že nutně $y \geq 0$, neboť pro záporná y není pravá strana zadané rovnice celočíselná. Upravme si nyní levou stranu na čtverec:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 - 8 &= 7 \cdot 2^y, \\ (x - 3)^2 &= 7 \cdot 2^y + 8. \end{aligned}$$

Jelikož je levá strana druhou mocninou nenulového celého čísla, musí se každé prvočíslo v jeho prvočíselném rozkladu vyskytovat v sudé mocnině ($x \neq 3$, neboť pravá strana je kladná). Pokud by však $y \geq 4$, dává pravá strana zbytek 8 po dělení 16. Je tedy dělitelná 2^3 , ale ne 2^4 , což nelze.

Zbývá tedy vyřešit případy, kdy $y = 0, 1, 2$ a 3 . Pro tato y je po řadě pravá strana rovnice rovna 15, 22, 36 a 64. Pouze poslední dvě hodnoty jsou čtverce celých čísel, tudíž $(x, y) \in \{(3 \pm 6, 2), (3 \pm 8, 3)\} = \{(-3, 2), (9, 2), (-5, 3), (11, 3)\}$ jsou všechna řešení.

(b) Označme si $L = \{a, b, c, d\}$ množinu neznámých na levé straně zadané rovnice. Všimněme si, že jsou-li všechny neznámé z L sudé a $(a, b, c, d, n) = (2A, 2B, 2C, 2D, N)$ je řešením, pak i $(a, b, c, d, n) = (A, B, C, D, N - 1)$ je řešením. Platí to i naopak – zdvojnásobením neznámých v L libovolného řešení dostaneme nové řešení. Tedy každé řešení zadané rovnice vznikne z nějakého řešení, ve kterém je alespoň jedna z neznámých v L lichá, několikerým provedením této operace. Dále se tedy stačí zabývat pouze řešeními s alespoň jednou neznámou lichou.

Pro $n \geq 1$ je pravá strana dělitelná 4. Aby byl ale součet čtyř čtverců celých čísel dělitelný čtyřmi, musí být všechna tato čísla sudá nebo všechna lichá – sudá čísla totiž dávají v druhé mocnině zbytek 0 a lichá zbytek 1 po dělení čtyřmi. Jelikož předpokládáme, že je alespoň jedno z našich čísel liché, musejí být lichá všechna. Potom ale dávají po dělení osmi v druhé mocnině vždy zbytek 1, z čehož dostáváme, že v součtu dávají zbytek 4 po dělení osmi. Takže n musí být nutně 1.

Tudíž mohou nastat pouze dvě možnosti pro n a to případy, kdy $n = 0$ nebo $n = 1$ a zároveň jsou všechna čtyři čísla lichá.

Pro $n = 0$ je zjevně jediným řešením $(a, b, c, d) = (2, 1, 1, 1)$.

Pro $n = 1$ musí být

$$\frac{28}{4} \leq a^2 \leq 28,$$

čímž dostaneme následující řešení:

$$(a, b, c, d) \in \{(3, 3, 3, 1), (4, 2, 2, 2), (5, 1, 1, 1)\},$$

příčemž prostřední řešení rovněž dostaneme zdvojnásobením řešení $(2, 1, 1, 1)$.

Množina všech řešení tak je

$$(a, b, c, d, n) \in \left\{ \left(2 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, k \right), \left(3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, k + 1 \right), \right. \\ \left. \left(5 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, 1 \cdot 2^k, k + 1 \right) \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

POZNÁMKY:

Úlohy nebyly těžké, velká většina doručených řešení byla správně. Většina řešitelů se rozhodla řešit pouze první úlohu, kterou šlo řešit i jinými způsoby – velmi časté bylo použití diskriminantu či dělitelnosti sedmi. K řešení druhé úlohy dva řešitelé využili i Jacobiho větu, která přesně určuje počet řešení rovnice $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k$ s parametrem k . (Tomáš Novotný)

Úloha 5.

(a) Viki vyhrál v tombole N kapybar a vykrmil je tak, že žádné dvě z nich nevážily stejně a váha každé v kilogramech byla racionální číslo. Chtěl se před svými kamarády předvést, a tak prohlásil, že kdykoliv mu libovolnou jednu z nich vezmou, umí on zbylé kapybary rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) skupin, aby obě dvě skupiny měly stejný součet hmotností. Pro která sudá N mohl Vikimu trik fungovat? (Pavel Hudec)

(b) Filip našel 2019 bezedných pytlů s penězi – v prvním jsou jednokoruny, v druhém dvoukoruny, ve třetím trojekoruny atd. Mince různých hodnot vypadají stejně, ale jejich hodnota je přímo úměrná jejich váze. Jednoho dne foukal vítr a zpřeházel popisky u pytlů značící hodnoty mincí v nich. Filip pak popisky k pytlům rozděлил po paměti, ale není si jistý, jestli někde neudělal chybu. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách umí zjistit, jestli popisky rozděлил správně? (Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

(a) Ukážeme, že Vikimu nemůže trik fungovat pro žádné přirozené sudé číslo N . Poté ukážeme, že jedině pro poněkud podivný případ, kdy $N = 0$ a Viki tedy nemá kapybary žádné, mu trik funguje.

Uvědomíme si, že jelikož hmotnost každé z kapybar je racionální číslo, můžeme BÚNO vynásobit všechny kapybaří hmotnosti nejmenším společným násobkem jejich jmenovatelů a řešit úlohu jen pro celočíselné hmotnosti kapybar. Dále si všimneme, že parita všech hmotností musí být nutně stejná. V okamžiku, kdy by stejná nebyla (mezi kapybarami by se vyskytovala alespoň jedna se sudou hmotností a alespoň jedna s lichou), nutně neplatí, že kdykoli odebereme libovolnou kapybaru, tak součet zbývajících je sudý. Neboť v případě, že součet vah všech kapybar je sudý, můžeme odebrat kapybaru s lichou hmotností a vytvořit tím lichý součet hmotností. Na druhou stranu v případě, že součet vah všech kapybar je lichý, stačí odebrat kapybaru se sudou hmotností a opět nemůžeme rozdělit kapybary na dvě stejně hmotné skupiny. Hmotnosti kapybar jsou tudíž buď všechny liché, nebo všechny sudé. Z důvodu sudosti N je proto jejich součet rovněž sudý.

V případě že jsou všechny liché, tak po odebrání jedné kapybary je součet vah zbývajících kapybar lichý, a tedy kapybary nemůžeme rozdělit na dvě skupiny se stejnou hmotností.

Zbývá nám případ, kdy jsou hmotnosti všech kapybar sudé, tehdy je BÚNO můžeme vydělit jejich největším společným dělitelem a převést tím úlohu na jeden z předcházejících případů. Jediné sudé N , pro které bude Vikimu trik fungovat, je tedy $N = 0$.

(b) Ukážeme, že na určení toho, jestli Filip rozdělil popisky správně, nám bude stačit jedno vážení. Bez jakéhokoliv vážení zjevně správnost rozmístění nezjistíme.

Od této chvíle budeme přívlastkem *zdánlivé* označovat mince nacházející se v pytlích s příslušnými popisky (jestli jsou popisky u správných pytlů zatím nevíme). Na levou miskou vah dáme jednu zdánlivou jednorunu, dále dvě zdánlivé dvoukoruny, ..., až 2019 zdánlivých dvatisícedevatenáctikorun. Na pravou stranu vah pak umístíme $1^2 + 2^2 + \dots + 2019^2$ zdánlivých jednorun.

Pokud Filip rozdělil popisky správně, tak jsou misky rovnoramenných vah v rovnováze. Pokud ne, pak ukážeme, že v tom případě musí nutně levá miska vah být lehčí, než pravá. K tomu nám dopomůže permutační nerovnost³, ze které plyne, že pro jakékoli jiné než správné rozdělení cedulek k pytlům musí levá miska vážit méně, než když jsou cedulky přiděleny správně. Na druhou stranu váha pravé misky bude vždy větší nebo rovna váze, kterou by mělo $1^2 + 2^2 + \dots + 2019^2$ opravdových jednorun.

Rovnost vah může proto nastat pouze v případě, kdy jsou všechny popisky správně umístěny.

POZNÁMKY:

Všechna došlá řešení úlohy (a) byla správná a postupovala obdobně jako vzorové řešení.

Druhá úloha byla náročnější, pár řešení opomenulo řádně zdůvodnit proč Filipovi stačí právě jedno vážení.
(Terka Poláková)

Úloha 6.

(a) Kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se protínají v bodech X a Y . Označme P průsečík k_2 a tečny ke k_1 v bodě X a Q průsečík přímky S_1Y a kružnice k_2 . Ukažte, že $PQ \parallel S_1S_2$.

(Pavel Hudec)

(b) Necht' $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y . Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z . Ukažte, že X , Y a Z leží na jedné přímce.

(Pavel Hudec)

³Více informací na 26. stránce seriálu o nerovnostech <https://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf>.

ŘEŠENÍ:

(a) Pro část (a) ukážeme dvě řešení:

ŘEŠENÍ POČÍTÁNÍM ÚHLŮ:

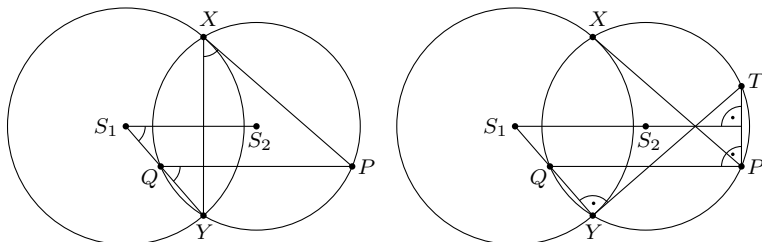
Předpokládejme, že konfigurace vypadá tak, jako na obrázku vlevo – ostatní případy se dělají podobně. Jelikož je XP tečnou k_1 , je úhel $\angle YXP$ úsekovým k tětivě XY . Úhel $\angle XS_1Y$ je středovým ke stejné tětivě, proto $|\angle XS_1Y| = 2|\angle YXP|$. Zároveň jelikož jsou trojúhelníky S_1S_2X a S_1S_2Y shodné podle věty sss, platí i $|\angle XS_1Y| = 2|\angle YS_1S_2|$. Konečně ze shodnosti obvodových úhlů dostaneme $|\angle YXP| = |\angle YQP|$. Celkově dostaneme

$$|\angle YS_1S_2| = \frac{1}{2}|\angle XS_1Y| = |\angle YXP| = |\angle YQP|.$$

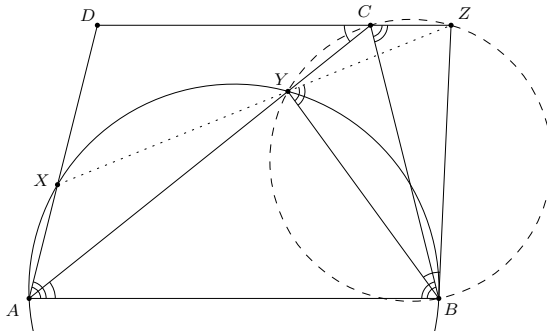
Úhly $\angle XS_1S_2$ a $\angle YQP$ jsou souhlasné a mají stejnou velikost, proto jsou přímky S_1S_2 a PQ rovnoběžné.

TRIKOVÉ ŘEŠENÍ:

Nechť T je průsečík tečny t ke k_1 v bodě Y a kružnice k_2 . Jelikož je t tečna, dostáváme $|\angle S_1YT| = |\angle TYQ| = 90^\circ$. Tedy TQ je průměr k_2 . Tečny z X a Y jsou sobě obrazem v osové souměrnosti podle přímky S_1S_2 , proto jsou sobě obrazem podle S_1S_2 i jejich druhé průsečíky s k_2 – body P a T . To znamená, že $PT \perp S_1S_2$. Zároveň ale TQ je průměr, tedy $PQ \perp TQ$. To už znamená, že přímky S_1S_2 a PQ jsou rovnoběžné.



(b) Z věty o úsekovém úhlu dostáváme rovnost $|\angle YBZ| = |\angle BAY|$. Dále pak $|\angle BAY| = |\angle BAC| = |\angle ACD| = 180^\circ - |\angle YCZ|$ díky rovnoběžnosti AB a CD . To znamená, že $|\angle YBZ| = |\angle YCZ|$, z čehož dostáváme, že čtyřúhelník $YBZC$ je tětivový. Proto ze shodnosti obvodových úhlů platí $|\angle BYZ| = |\angle BCZ|$. Díky tomu, že $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, platí $|\angle BCZ| = |\angle CBA| = |\angle DAB| = |\angle XAB|$. Konečně v tětivovém čtyřúhelníku $AXYB$ platí $|\angle XAB| = 180^\circ - |\angle XYB|$. Celkově tak dostáváme $|\angle BYZ| + |\angle XYB| = 180^\circ$, což dokazuje, že body X, Y, Z leží na přímce.



POZNÁMKY:

V části (a) bylo v úhlicím řešení potřeba rozebrat množství konfigurací, což se nepovedlo ošetřit žádnému řešiteli. V takových situacích je obvykle vhodné použít orientované úhly, které různé konfigurace dokážou vyřešit „nejednou“. Správná řešení, která opomíjela nějaký případ, se do nich dala bez větší námahy přepsat, proto jsem za takové problémy nestrhával body. Zároveň chválím *Vojtěcha Gadurka*, který přišel na řešení podobné „trikového“ vzorovému.

Část (b) nebyla na běčko příliš těžká a řešitelé se s ní poprali dobře.

(Pavel Hudec)

Úloha 7.

Na ministerstvu dopravy je k kanceláří. Ty jsou propojeny sofistikovanou potrubní poštou tak, že pro každých n kanceláří existuje další kancelář, která je s každou z nich přímo spojena. Nový ministr dopravy by si chtěl vybrat kancelář, ze které jde bez prostředníka komunikovat se všemi ostatními.

(a) Dokažte, že pro $k = 2n + 2$ může být ministerstvo postaveno natolik nefunkčně, že se mu to nepodaří.

(b) Dokažte, že pro $k = 2n + 1$ si vždy svou vysněnou kancelář vybrat umí.

(Rado van Švarc, Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

(a) Chceme najít příklad ministerstva, ve kterém není kancelář spojená se všemi ostatními. Uspořádejme všechny kanceláře do pravidelného $(2n + 2)$ -úhelníku. Nyní spojme každou kancelář se všemi ostatními kromě té, která je naproti ní. Je tedy jasné, že neexistuje kancelář, ze které lze komunikovat se všemi ostatními. Je splněna i podmínka ze zadání? Mějme zadanou nějakou n -tici kanceláří, označme ji N . Každá z kanceláří z N není spojena s jednou další (která nemusí ležet mimo N), takže ze zbývajících $n + 2$ kanceláří je nejvýše n takových, že nejsou spojené s nějakou kancelář z N . Z toho plyne, že pro každou n -tici kanceláří nalezneme ne jen jednu, ale dokonce dvě kanceláře, které jsou s nimi všemi spojené. A to se vyplatí!

(b) Pro druhou podúlohu předvedeme dvě řešení:

ŘEŠENÍ PŘES OBARVOVÁNÍ DVĚMA BARVAMI:

Úlohu dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že na ministerstvu neexistuje kancelář, která je spojená potrubní poštou se všemi ostatními. Mezi kanceláři přidáme ještě několik spojení a ukážeme, že existuje n -tice kanceláří, pro kterou neexistuje další kancelář, která by s každou z nich byla spojená (tím pádem ani před přidáním spojení nemohla být), což bude spor s podmínkou ze zadání.

Ministerstvo znázorníme jako graf. Ten bude mít k vrcholů, kde každý z nich reprezentuje jednu kancelář. Mezi dvěma vrcholy bude hrana, pokud odpovídající kanceláře mezi sebou **nemají** spojení potrubní poštou. Předpoklad, že neexistuje kancelář, která by byla spojená se všemi ostatními, znamená, že z každého vrcholu v námi uvažovaném grafu vede hrana.

Vezměme si dvě barvy – rybízovou a borůvkovou – a budeme postupně obarvovat vrcholy grafu. Podívejme se na libovolnou komponentu grafu (množinu vrcholů, ve které se lze dostat po hranách z jednoho vrcholu do libovolného jiného a k žádnému dalšímu se již dostat nelze). Mohou nastat dvě možnosti. První možnost je, že v komponentě není cyklus. Pak si vybereme jeden vrchol a ten obarvíme rybízovou, všechny vrcholy, které s ním jsou spojené hranou, obarvíme borůvkovou, a tak postupujeme dál – vrcholy, které jsou hranou spojeny s již obarveným vrcholem, obarvíme nepoužitou barvou. Tato konstrukce zajistí, že každý vrchol komponenty bude obarvený, protože z vybraného vrcholu se lze po hranách dostat do všech ostatních vrcholů komponenty. Zároveň každý vrchol má jednoznačně danou barvu, protože komponenta neobsahuje cyklus, a tedy mezi libovolnými dvěma body existuje právě jedna cesta (podél které se střídají barvy).

Obsahuje-li komponenta cykly, pak je postupně projdeme a budeme z nich odebírat hrany, dokud nedostaneme komponentu bez cyklů, a použijeme postup výše. Vzhledem k tomu, že jsme všechny hrany odebrali z cyklů, tak se nám komponenta nemohla rozpadnout.

Nyní máme všechny vrcholy obarvené. Počet vrcholů jedné barvy, nechť je to rybízová, musí být nutně nejvýše n . Víme, že do každého borůvkového vrcholu vede hrana z nějakého rybízového. To znamená, že vezmeme-li množinu n vrcholů, která obsahuje všechny rybízové, pak pro libovolný jiný vrchol bude existovat hrana, která vede do této vybrané n -tice. Převeďme do řeči kanceláří to znamená, že pro takovou n -tici kanceláří neexistuje další kancelář, která by s nimi všemi byla spojena, protože pro každou další kancelář existuje jedna z této n -tice, se kterou není spojena. A dostáváme kýžený spor.

ŘEŠENÍ PŘES BUDOVÁNÍ VELKÉ KLIKY⁴:

Uvažujme graf s k vrcholy, které reprezentují kanceláře. Mezi dvěma vrcholy bude tentokrát hrana, pokud **mají** spojení potrubní poštou.

Indukcí podle velikosti kliky dokážeme, že takový graf obsahuje kliku o $n + 1$ vrcholech. Klikou o jednom vrcholu je zřejmě libovolný vrchol. Mějme tedy kliku velikosti i , kde $i \leq n$. Použijeme podmínku ze zadání na i -tici vrcholů kliky libovolně doplněnou na n -tici. Ta nám říká, že existuje vrchol, který je spojený hranou se všemi vrcholy kliky. To znamená, že ho můžeme přidat do kliky a máme tak kliku velikosti $i + 1$.

Mějme tedy kliku o $n + 1$ vrcholech. Použijeme podmínku ze zadání na zbylou n -tici vrcholů, čímž dostaneme jeden vrchol kliky, který je spojený se všemi ostatními. Tam se tedy nachází jedna z vysněných kanceláří ministra dopravy.

POZNÁMKY:

Řešení se sešla různorodá. V první části jsem viděl dva různé příklady a dokonce jsem viděl i konstrukci, která využívala indukci. Řada lidí zapomněla zmínit, že zkonstruované ministerstvo neobsahuje kancelář, která je spojena se všemi ostatními. V tomto případě je to zjevné, ale stále by se to mělo říct. V druhé části využívala všechna zcela správná řešení základní myšlenku prvního vzorového řešení. Lišila se v tom, jakým způsobem se vypořádala s cykly. (Honza „Fanda“ Krejčí)

⁴Klika je podmnožina množiny vrcholů grafu, jejíž každé dva prvky jsou spojeny hranou.

Výsledky po 38. ročníku

jméno	příjmení	r. škola	1p	2p	3p	4p	1j	2j	3j	4j	1s	2s	3s	celkem	hist.
1. Michal	Beránek	1 GVoďeraPH	23	22	24	21	24	21	24	31	15	15	12	232,28	685
2. Vašek	Janáček	2 GJarošeBO	23	16	22	21	23	23	23	32	15	12	14	223,04	223
3. Klára	Churá	2 GNerudCheb	23	22	21	20	22	21	18	30	15	15	14	221,70	405
4. Tomáš	Flidr	1 G Kojetín	22	15	24	18	21	21	22	26	15	15	15	213,48	338
5. Eva	Feldbabelová	1 KGTřebíč	22	25	24	23	19	23	20	20	13	10	13	213,04	213
6. Magdaléna	Mišinová	2 GKepleraPH	24	25	24	23	24	15	21	29	11	12	6	213,03	420
7. Zdeněk	Pezlar	1 GJarošeBO	24	21	23	19	25	15	19	29	10	–	13	197,91	198
8. Adéla Karolína	Žáčková	2 GZborovPH	21	24	21	21	25	17	17	30	11	–	3	190,41	396
9. Jakub	Parada	3 G Gröss BA	22	24	15	23	23	16	23	24	3	7	8	187,14	526
10. Lucia	Kvasničková	0 GFGLorBA	22	24	23	15	14	23	22	19	13	–	9	184,52	185
11. Matej	Hanus	3 GPošKošice	25	22	22	16	20	–	21	33	11	–	14	183,74	184
12. Klára	Pernicová	2 GJarošeBO	19	19	21	19	21	21	19	22	9	7	6	181,91	340
13. Jonáš	Havelka	3 G Jírov ČB	22	19	21	24	10	19	15	24	9	9	–	173,13	371
14. Kateřina	Panešová	3 G Teplice	22	17	22	19	20	15	10	12	11	9	11	166,97	305
15. Dominik	Stejskal	4 G Krnov	25	22	20	20	19	12	17	–	9	9	9	161,41	337
16. Petr	Hladík	1 GMikul23PL	22	23	19	21	19	22	18	13	–	0	4	161,38	161
17. Lucia	Krajčoviechová	3 GJHroncaBA	25	22	19	16	25	10	3	23	8	5	3	159,03	765
18. Markéta	Hanušková	1 G VelMeziř	21	19	18	13	22	18	19	24	–	–	–	153,12	153
19. Denisa	Hanušková	1 G VelMeziř	22	19	18	14	22	18	17	24	–	–	–	152,42	152
20. Tomáš	Sourada	4 G Žamberk	21	23	23	19	25	12	14	–	10	5	–	152,00	152
21. Jan	Kaifer	3 GKepleraPH	19	14	19	19	8	12	20	5	13	7	6	145,48	341
22. Adam	Křivka	3 CMGPGBrno	22	25	23	20	20	16	–	–	10	7	–	144,32	331
23. Jan	Vavřín	2 PORG PH	10	9	19	11	12	18	21	17	11	–	15	144,09	367
24. Matěj	Doležálek	4 G Humpolec	25	25	25	14	25	0	–	–	15	15	–	144,08	775
25. Mikuláš	Brož	2 GNadŠtolPH	21	19	21	16	8	16	20	9	7	7	–	143,61	318
26. Petr	Khartskhaev	2 PORG PH	22	21	20	13	21	12	15	14	7	–	–	142,62	341
27. Vojtěch	Gadurek	2 PORG PH	14	14	17	8	18	11	22	20	4	–	9	137,52	293
28. Tomáš	Hulla	2 GTajBanBys	21	21	19	13	21	16	–	26	–	–	–	136,41	194
29. Daniel	Perout	2 GJarošeBO	15	13	19	18	22	14	14	13	7	–	–	135,28	135
30. Martin Albert	Gbúr	3 GPošKošice	18	18	18	8	4	19	10	17	11	–	6	131,04	131
31. Marek	Pišťák	1 GHeyrovPH	18	18	17	18	10	14	16	13	–	–	–	122,13	122
32. Kryštof	Pravda	1 GMensaPH	23	25	23	18	–	22	–	–	9	–	–	119,00	119
33. Alan	Hübsch	1 GKepleraPH	19	22	16	15	17	15	15	–	–	–	–	118,82	119
34. Darian	Poljak	2 GJŠkodyPŘ	22	11	18	12	–	17	15	–	7	–	–	100,98	101
35. Michal	Kupec	3 G Písek	20	13	14	11	8	12	8	6	6	–	–	99,67	100
36. Radek	Olšák	4 GMensaPH	21	25	20	17	–	–	–	–	15	–	–	97,61	761
37. Josef	Minařík	4 GJarošeBO	25	25	13	19	–	–	–	–	15	–	–	96,94	500
38. Karolína	Šedová	0 GJNerudyPH	17	10	14	6	13	17	16	0	–	–	–	94,80	95
39. Michal	Vosyka	2 GUKlafárŽR	22	15	15	13	9	9	–	–	7	–	–	90,94	91
40. Viktor	Materna	3 GJarošeBO	19	14	17	4	–	8	14	–	14	–	1	90,65	148
41. Ondřej	Mišina	4 SGFryčovPH	22	23	23	10	–	–	–	–	10	–	–	88,54	89
42. Lenka	Kopfová	4 MendelG OP	20	21	17	14	–	–	–	–	15	–	–	86,48	746
43. Ondřej	Krabec	4 G KomHavír	23	19	19	11	–	–	–	–	15	–	–	86,47	438
44. Jan	Nekarda	3 GUHradiště	–	11	–	13	11	19	20	7	–	–	–	80,44	178
45. Vendula	Onderková	1 GJŠkodyPŘ	–	–	–	–	18	15	21	27	–	–	–	79,81	80
46. Ondřej	Machác	3 GStrážnice	18	10	15	3	8	11	8	8	–	–	–	79,43	131

47. Diana	Procházková	2	PORG PH	19	14	18	7	-	17	4	-	-	-	-	78,74	79
48. Robin	Palán	1	GJarkovPH	14	13	18	8	-	13	-	-	9	0	-	74,39	74
49. Matěj	Holubička	3	G Hořice	15	6	14	5	8	13	10	1	-	-	-	72,44	128
50. Klára	Hloušková	3	G Kolín	17	15	9	6	7	7	4	7	0	-	-	70,54	245
51. Dominik	Majkus	4	GNVPlániPH	23	13	11	5	-	8	-	-	4	-	-	64,72	116
52. Nikol	Krejčí	3	PORG PH	17	13	11	-	8	4	-	9	-	-	-	61,40	116
53. Radomír	Mielec	1	GVolgogrOS	11	19	7	11	-	11	-	-	-	-	-	60,21	60
54. Josef	Král	4	MendelG OP	20	13	18	-	-	8	-	-	-	-	-	59,54	191
55. David	Klement	3	GNadAlejPH	21	18	19	-	-	-	-	-	-	-	-	56,95	314
56. Daniel	Novotný	2	PORG PH	7	8	15	0	9	12	-	5	-	-	-	56,80	57
57. Jakub	Polák	1	GNPražacPH	20	18	19	-	-	-	-	-	-	-	-	56,22	56
58. Klára	Zemanová	2	PORG PH	9	9	18	-	-	9	-	7	-	-	-	52,20	111
59. Martin	Hubata	3	GMikul23PL	21	13	14	-	-	-	-	-	3	-	-	51,11	268
60. František	Knječ	3	G Brandýs	-	-	18	-	-	14	13	4	-	-	-	50,39	50
61. Peter	Školník	3	GLSaruBA	13	13	11	4	-	-	-	-	7	-	-	50,03	50
62. Václav	Verner	0	PORG PH	-	8	10	0	8	8	6	-	8	-	0	49,70	50
63. Kateřina	Pazderová	3	SŠMSLit	11	8	7	8	6	9	-	-	0	0	-	48,88	49
64. Veronika	Borýsková	4	GJarošeBO	19	7	3	5	3	10	-	-	-	-	-	47,00	47
65. Jan	Brada	2	CírkGPLzeň	-	-	-	-	9	18	16	4	-	-	-	46,99	47
66. Bartomiej	Lewandowski	4	LicOSSWa	24	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46,27	46
67. Ondřej	Dulanský	1	GJŠkodyPŘ	17	-	-	-	11	-	18	-	-	-	-	45,91	46
68. Lenka	Poljaková	0	GJŠkodyPŘ	22	10	13	-	-	-	-	-	-	-	-	44,78	45
69. Ludmila Hana	Houfková	2	GMHS	19	15	9	-	-	-	-	-	-	-	-	43,35	73
70. Petr	Sochor	4	GJarošeBO	19	6	-	3	3	10	-	-	-	-	-	41,00	41
71. Júlia	Sirotiaková	2	GRimSob	5	9	5	5	-	12	-	4	-	-	-	40,92	41
72. Peter	Kochelka	1	GTajBanBys	-	-	-	-	10	15	16	-	-	-	-	40,78	41
73. Anna	Musilová	3	PORG PH	3	6	12	8	3	-	-	-	8	-	-	40,45	225
74. Samuel	Krajčí	4	GAlejKošic	21	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40,25	299
75. Kateřina	Charvátová	4	GBNěmcovHK	13	8	13	-	6	-	-	-	-	-	-	40,08	330
76. Martin	Zímen	4	GJMasar JI	18	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	39,41	507
77. Timea	Szöllsová	3	G Gröss BA	18	13	7	-	-	-	-	-	-	-	-	37,95	111
78. Martin	Melišík	2	PORG PH	-	-	8	5	7	9	8	-	-	-	-	37,85	38
79. Alžběta	Manová	4	G UherBrod	13	12	4	5	-	-	-	-	3	-	-	37,09	191
80. Miroslav	Horský	4	GČeskoliPH	10	14	13	-	-	-	-	-	-	-	-	37,00	37
81. Jan	Šurán	1	GŠpitálsPH	19	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36,98	37
82. Matěj	Krátký	3	PORG PH	18	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	34,90	182
83. Filip	Sedláček	2	GSRandyJN	-	-	-	-	5	13	10	4	-	-	-	32,41	32
84. Jan Antonín	Musil	2	PORG PH	-	6	8	2	2	6	8	-	-	-	-	32,00	92
85. David	Beinhauer	4	MendelG OP	15	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30,50	189
86. Vojtěch	Šára	4	PORG PH	5	6	5	1	5	7	-	-	-	-	-	30,34	96
87. Kateřina	Vokálová	3	G Kolín	-	-	-	-	8	10	6	6	-	-	-	29,49	29
88. Tomáš	Cepko	4	GAnMeTr	8	10	3	2	3	2	-	-	-	-	-	28,00	28
89. Agáta	Žižková	2	PORG PH	-	-	16	-	-	8	-	4	-	-	-	27,91	28
90. Jan	Vondra	3	G TýnNVlt	3	8	6	3	4	4	-	0	-	-	-	27,15	89
91. Vojtěch	Lejsek	4	GČeskoliPH	15	-	12	-	-	-	-	-	-	-	-	27,00	27
92. Michal	Chudoba	4	GLitoměřPH	9	4	4	-	4	7	-	-	-	-	-	26,90	257
93. Erika	Kojdová	2	GNámostovo	12	7	8	-	-	-	-	-	0	-	-	26,82	27
94. Klára	Chobotová	0	GJNerudyPH	-	-	10	8	-	8	-	-	0	-	-	26,79	27
95. Johana	Dvořáková	4	G Trutnov	11	7	8	-	-	-	-	-	-	-	-	26,78	82
96. Matěj	Jerhot	3	GJirsíkaČB	-	-	15	-	-	-	-	-	10	-	-	25,79	26
97. Agáta	Štrosová	1	GZborovPH	14	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25,19	25

