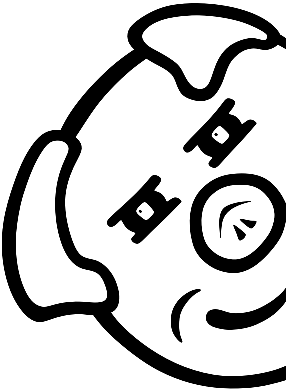
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !



Možná, že ani pro Tebe zimní radovánky ještě neskončily a užíváš si posledních nádechů zimy. I podle kalendáře si ještě na jaro nějaký ten den počkáme. Náš seminář je ale i teď o krok napřed a naše jarní část už je v plném proudu!

Druhá polovina 38. ročníku odstartovala s úlohami týkajícími se vážení. Snad jsi i Ty vše dobře zvážil(a) a s dostatečným bodovým ziskem se tak můžeš vrhnout do dalších sérií. Po druhém dílu seriálu nazvaném **Žádné věže** přichází třetí, neméně zajímavý. Možná už se nemůžeš dočkat, co se v závěru celé naučné trilogie dozvíš, a proto si poslední díl s názvem **Návrat velkých čísel** rozhodně nenechej ujít. Kromě seriálu přinášíme i poslední dvě série, na kterých můžeš dohánět body nejen pro celkové pořadí, ale i pro účast na podzimním soustředění. První z nich nese název **Doprava** a otestuje Tvé schopnosti v hledání různých způsobů, jak se dá cestovat a propojovat jednotlivá místa (a třeba přijdeš i na to, jak urychlit stavbu našich dálnic a komunikací). Ta druhá z nich není jen tak ledajaká série, ale **Finální myš-maš**, ve kterém si můžeš připomenout témata z celého ročníku a získat až 35 bodů, neboť se do výsledku počítají všechny úlohy. Tak hurá do řešení!

Hodně dobrých nápadů, ale i trpělivosti a vytrvalosti při řešení, Ti za všechny organizátory přeje

Anička Mlezivová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 4. podzimní a 1. jarní série
- Vzorové řešení 2. seriálové série
- Pravděpodobnost III. – Návrat velkých čísel
- Výsledkové listiny podzimní části a 1. jarní série

- Příloha: Zadání 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série
- Příloha: Pozvánka na Náboj
- Příloha: Pozvánka na jarní výlet

Náboj

Bude! A to již brzy. Přijď se nabít Nábojem, mezinárodní týmovou matematickou soutěží, která se letos uskuteční v pátek 22. března, a to hned v osmi různých zemích a dohromady 16 evropských městech. Podrobnosti najdeš na stránkách Náboje[1]. A nezapomeň – co Tě neNabije, to Tě rozhodně pobaví (a nebo taky potrápí).

Jarní výlet

Tradiční jarní výlet po krásách naší lepé vlasti se letos uskuteční v sobotu 23. března, tedy hned následující den po Náboji. Podrobnosti nalezneš v přiložené pozvánce. Těšíme se na Tebe!

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

[1] https://math.naboj.org/

Equations

Problem 1.

Anička wrote $1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 = 5$ *on a blackboard. Then E.T. came along and wrote either a plus sign or a minus sign (of his choice) into one of the squares on the left side of the equation. Could E.T., being a pest, make it so that Anička cannot make the equation hold by filling the remaining three gaps with plus or minus signs?*

(Anička Doležalová)

SOLUTION:

Since 1 is always positive (there is no box in front of it), we can subtract it from both sides. Suppose now that E.T. writes a minus sign in front of the number 4. Then we are left with $\square 2 \square 3 \square 5 = 8$. If we try to fill all the remaining boxes with pluses, we get 10, which is too much. However, if we put a minus in front of even the smallest of these numbers (which is 2), we can only get up to 6, which is too low. Therefore, if E.T. writes a minus sign in front of 4, Anička is at loss and cannot correct the equation.

POZNÁMKY:

Úloha se dala řešit mnoha způsoby, nejjednodušším z nich bylo vypsat všech šestnáct možností (resp. osm při správném tipu, že před čtyřkou musí být mínus). Složitější způsoby pak obsahovaly modulení. Ráda bych připomněla, že čím lehčí úloha, tím víc je potřeba vysvětlit i ty jednoduché věci, které v řešení osmičky rozebírat nemusíte. *(Anička Doležalová)*

Problem 2.

Solve for $x \in \mathbb{R}$*:*

$$|x| + |x+1| + \cdots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

(Rado van Švarc)

SOLUTION:

The left hand side of the equation is a sum of absolute values, therefore it is positive for every x. The right hand side is equal to $(x-1)\cdot(x+2019)$, which is positive only for $x \in (-\infty, -2019) \cup (1, \infty)$.

If $x > 1$ then all the sums inside absolute values are positive, therefore we can simplify the equation to

$$\begin{aligned} x + (x+1) + \cdots + (x+2018) &= x^2 + 2018x - 2019, \\ 2019x + 1 + \cdots + 2018 &= x^2 + 2018x - 2019. \end{aligned}$$

Because $1, 2, \ldots, 2018$ is an aritmetic sequence, we can easily get the sum of this sequence which then leads to:

$$\begin{aligned} 2019x + 1009 \cdot 2019 &= x^2 + 2018x - 2019, \\ 0 &= x^2 - x - 2019 \cdot 1010, \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{8156761}}{2}. \end{aligned}$$

One root, $x = \frac{1-\sqrt{8156761}}{2}$, is less than 1 which contradicts our initial assumption $x > 1$, so we are left with only one solution

$$x = \frac{1 + \sqrt{8156761}}{2}.$$

For $x = \frac{1+\sqrt{8156761}}{2}$ all the operations above are equivalent, therefore this x is a solution of the problem.

If $x < -2019$, then all the sums inside absolute values are negative, therefore we can simplify the equation to:

$$\begin{aligned} -x - (x+1) - \cdots - (x+2018) &= x^2 + 2018x - 2019, \\ -2019x - 1009 \cdot 2019 &= x^2 + 2018x - 2019, \\ 0 &= x^2 + 4037x + 2019 \cdot 1008, \\ x &= \frac{-4037 \pm \sqrt{8156761}}{2}. \end{aligned}$$

But $\frac{-4037+\sqrt{8156761}}{2} > -2019$, hence for $x < -2019$ there is again only one solution

$$x = \frac{-4037 - \sqrt{8156761}}{2}.$$

For $x = \frac{-4037-\sqrt{8156761}}{2}$ all the operations above are equivalent, therefore this x is a solution of the problem.

Poznámky:
Většina odevzdaných řešení byla správná. Nejčastější chybou byla snaha sečíst levou stranu pomocí vzorečku $\frac{|2x+2018| \cdot 2019}{2}$ nebo jiným způsobem sečíst řadu absolutních hodnot, a to nezávisle na velikosti x. Bohužel, takhle jednoduše to nelze. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Problem 3.

Pavel and Hedvika went for a walk by the seashore and found five cute baby seals. Because Pavel is a proper mathematician, he assigned a positive real number to each seal in order to quantify their cuteness. Then Hedvika noticed, that the product of cutenesses of any pair of baby seals is equal to the sum of cutenesses of the other three seals. What are the possible values of cutenesses of the five baby seals?

(Rado van Švarc)

Solution:
Let $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ be the cutenesses of the seals. Using this notation, Hedvika gave us the following system of equations:

$$x_i x_j = x_k + x_\ell + x_m,$$

where (i, j, k, l, m) ranges over all permutations of $(1, 2, 3, 4, 5)$. We will show that the only solution to this system with positive numbers is $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 3$. The following are three possible ways of proving that this is the only solution (in the end one must always check whether the obtained numbers really solve the original problem, i.e. in our case one must simply check that $3 \cdot 3 = 9 = 3 + 3 + 3$).

First solution (adding equations):
Take the following four of the equations:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_3 + x_4 + x_5, \\ x_1 x_3 &= x_2 + x_4 + x_5, \\ x_1 x_4 &= x_2 + x_3 + x_5, \\ x_1 x_5 &= x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Adding all of them together yields $x_1(x_2+x_3+x_4+x_5) = 3(x_2+x_3+x_4+x_5)$. Since $x_2+x_3+x_4+$ $+x_5 > 0$, we can divide by it and get $x_1 = 3$. Similarly, we can deduce $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 3$.

Second solution (subtracting equations):
By subtracting the following two equations

$$x_1x_2 = x_3 + x_4 + x_5,$$
$$x_1x_3 = x_2 + x_4 + x_5,$$

we get $x_1(x_2 - x_3) = x_3 - x_2$, thus $(x_1 + 1)(x_2 - x_3) = 0$. Since we know $x_1 + 1 > 0$, necessarily $x_2 = x_3$. Similarly, we obtain $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Let us denote this common value x. Now the problem reduces to finding the roots of one equation $x^2 = 3x$, or $x(x - 3) = 0$ which has only one positive solution $x = 3$.

Third solution (ordering of the variables):
Assume WLOG[2] that $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$ (otherwise we can relabel the variables so that the inequality holds). Then we get

$$x_5x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \le x_4 + x_4 + x_4 = 3x_4, \text{ so } x_5 \le 3 \text{ (thanks to } x_4 > 0).$$

Similarly,

$$x_1x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \ge x_2 + x_2 + x_2 = 3x_2, \text{ so } x_1 \ge 3.$$

Hence $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 3$.

Poznámky:
Sešla se spousta správných řešení, víceméně všechna se držela jednoho ze tří zmíněných způsobů. Pár řešitelů si však zřejmě v zadání nevšimlo slovíčka „positive“ a řešilo tak soustavu rovnic v reálných číslech, kde existují ještě další řešení: $(0, 0, 0, 0, 0)$ a $(3, -1, -1, -1, -1)$ a jejich permutace. Jelikož se jedná o těžší úlohu (a její řešení obsahuje řešení úlohy původní), body jsem za toto opomenutí nestrhával. *(Tonda Češík)*

Problem 4.

Mišánek has two cubic polynomials, F and G, which are monic[3]. He discovered that the following three equations have in total exactly 8 distinct solutions:

$$F(x) = 0,$$
$$G(x) = 0,$$
$$F(x) = G(x).$$

He wanted to see if the smallest and the largest of the numbers could both be a solution to the first equation. Prove that they can't.

(Rado van Švarc)

Solution:
Define $H(x) = F(x) - G(x)$ so that the solutions of the third equation $F(x) = G(x)$ are exactly the roots of the polynomial $H(x)$. As both F and G are monic, the cubic term x^3 cancels out and H is at most quadratic, hence it has at most two roots. We know that the equations have eight solutions altogether, so F and G both have three distinct roots and H has two.

Now let s be the smallest and t the largest of these eight roots. We will prove the claim by contradiction, so assume $F(s) = F(t) = 0$.

A monic cubic polynomial $(x - a)(x - b)(x - c)$ with three distinct roots $a < b < c$ is negative for all $x < a$ because all three brackets are negative for such x. Similarly, it is positive for all $x > c$.

[2] Without loss of generality (české BÚNO).

[3] A polynomial $a_nx^n + \ldots a_1x + a_0$ is called monic if $a_n = 1$.

Therefore $F(s) = 0 > G(s)$ and $F(t) = 0 < G(t)$ and as H does not have any roots outside $[s,t]$[4], $F(x) > G(x)$ for $x < s$ and $F(x) < G(x)$ for $x > t$.

A quadratic polynomial with two distinct roots $d < e$ is either positive or negative for all $x \notin [d,e]$. Roots of H are inside $[s,t]$ so we have either $F(x) - G(x) > 0$ for $x \notin [s,t]$, or $F(x) - G(x) < 0$ for $x \notin [s,t]$, both of which contradict our previous statement that $F(x) > G(s)$ for $x < s$ and $F(x) < G(x)$ for $x > t$. Therefore, at least one of s, t is not a root of F, as we wanted to prove.

Poznámky:
Správná byla většina řešení, zhruba polovina řešitelů úlohu velmi elegantně sepsala, za což bych je chtěla pochválit. Některým řešením naopak chyběla pořádná struktura důkazu. Možná to bylo jen kvůli angličtině, ale rozhodně pro příště všem doporučuji zkontrolovat, jestli u důkazu sporem na začátku jasně napsali, co předpokládají, a jestli je u jednotlivých kroků zřejmé, z čeho plynou.

(Bára Kociánová)

Problem 5.

For his birthday last year, Danil received a $(2n+1)$-tuple of non-zero integers $(k_0, \dots, k_{2n})$ with non-zero sum. However, as everyone knows, Danil hates polynomials that have integer roots. So he rearranged the $(2n+1)$-tuple to create its permutation $(a_0, \dots, a_{2n})$, such that the polynomial $a_{2n}x^{2n} + ... + a_0 = 0$ didn't have any integer roots. Prove that no matter what tuple Danil got, he was always able to find such a permutation.

(Rado van Švarc)

Solution:
Let $(k_0, \dots, k_{2n})$ be the $(2n+1)$-tuple Danil got for his birthday.

First we can set $(a_0, \dots, a_{2n})$ as a permutation of $(k_0, \dots, k_{2n})$ such that $|a_{2n}| \geq |a_i|$ for all i with $0 \leq i \leq 2n$. Now we will show that if $|x| \geq 2$, x cannot be a root of the polynomial $a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0 = 0$. If it was, then the equality $a_{2n}x^{2n} = -(a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0)$ would be true. But since $|x| - 1 \geq 1$, we have (by the triangle inequality)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{2n-1} a_i x^i \right| &\leq \sum_{i=0}^{2n-1} |a_i x^i|, \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} |a_i||x|^i, \\ &\leq |a_{2n}| \sum_{i=0}^{2n-1} |x|^i, \\ &\leq |a_{2n}| \frac{|x^{2n}| - 1}{|x| - 1}, \\ &< |a_{2n}x^{2n}|, \end{aligned}$$

which is a contradiction, hence $|x| \geq 2$ cannot be a root.

Therefore, if x is an integer root, it must equal -1, 0, or 1. Moreover, since each coefficient is non-zero, 0 is not a root, and since the sum of all a is non-zero, 1 is not a root either. Hence the only possible root is -1.

If -1 is not a root, we have found Danil his beloved polynomial without any integer roots and we are done. So now suppose -1 is a root. Then $a_0 + a_2 + \dots + a_{2n} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}$. If the polynomial is constant (i.e. $n = 0$), or if $a_0 = \dots = a_{2n-1}$, we get $a_{2n} = 0$ which is a contradiction with every coefficient being non-zero. Hence we can find i with $0 < i < 2n$ such that $a_i \neq a_{i-1}$.

[4] English literature writes a closed interval between a and b using square brackets $[a,b]$ instead of the angle brackets $\langle a,b \rangle$ you are used to.

Then $a_0 + \cdots + a_i x^{i-1} + a_{i-1} x^i + \cdots + a_{2n} x^{2n}$ gives a polynomial such that -1 is not its root. And since we still have $|a_{2n}| \geq |a_i|$ for all i with $0 \leq i \leq 2n$, this polynomial does not have any integer roots.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správně, občas někdo zapomněl na pár detailů jako zkontrolovat, že polynom není konstantní (pak hapruje logika, že můžeme najít $a_i \neq a_{i-1}$), nebo že neměníme a_{2n}, takže první část řešení stále platí. Obecně jsem za ně body nestrhával, ale když jich bylo víc, tak jsem body ubral.

U opravování této úlohy jsem si taky dost všímal angličtiny – ne gramatiky jako takové, ale matematického vyjadřování se. Takže když jsem našel nějaký termín, který se používá jinak, nebo formulaci, která jde říct hezčejc, navrhl jsem vám je. Za angličtinu jsem ale nikde body nestrhával, to není principem našeho semináře. *(Jáchym Solecký)*

Problem 6.

Solve the following cyclic system of equations in variables x, y, z:

$$y = \frac{3x^3 + 4x}{x^2 + 12}, \qquad z = \frac{3y^3 + 4y}{y^2 + 12}, \qquad x = \frac{3z^3 + 4z}{z^2 + 12}.$$

(Jakub Löwit)

Solution:
We can rewrite the system as follows:

$$y = x\frac{3x^2 + 4}{x^2 + 12}, \qquad z = y\frac{3y^2 + 4}{y^2 + 12}, \qquad x = z\frac{3z^2 + 4}{z^2 + 12}.$$

Notice that the function $f(u) = \frac{3u^2+4u}{u^2+12}$ is positive for all real u. Hence either $x = y = z = 0$ or $x, y, z > 0$ or $x, y, z < 0$.

Triplet x, y, z is a solution if and only if $-x, -y, -z$ is also a solution because the function $f(u) \cdot u$ is odd. Therefore we can assume x, y, z are all positive. Then

$$f(u) \begin{cases} > 1 & \text{for } u > 2, \\ = 1 & \text{for } u = 2, \\ < 1 & \text{for } 0 < u < 2. \end{cases}$$

Let us solve the three cases:

(1) Suppose $x > 2$. This implies $y = x \cdot f(x) > x \cdot 1 = x$, so $y > x$. In particular we have $y > 2$. Then also $z = y \cdot f(y) > y$, so in turn $x = z \cdot f(z) > z$. But this yields a contradiction $x > z > y > x$.

(2) Let $x < 2$. Then we get $y = x \cdot f(x) < x \cdot 1 = x$, so $y < x$. But then $y < 2$, which yields $z = y \cdot f(y) < y$, so $x = z \cdot f(z) < z$, giving a contradiction $x < z < y < x$.

(3) Finally, if $x = 2$, then $y = x \cdot f(x) = x \cdot 1 = x$ and $z = y \cdot f(y) = y$. Plainly $x = y = z = 2$ is indeed a solution.

As we have already shown, a triplet (x, y, z) is a solution if and only if $(-x, -y, -z)$ is also a solution, so $(-2, -2, -2)$ is the only negative solution to the system.

The system has 3 solutions in total: $(x, y, z) = (0, 0, 0), (2, 2, 2), (-2, -2, -2)$.

Poznámky:
Většina řešení byla povedená. Mnoho myšlenek bylo shodných, to jest nějakým způsobem ukázat, že $f(u) = \frac{3u^3+4u}{u^2+12}$ je rostoucí. Občas přes rozebírání intervalů, občas přes derivace. Podle toho je provedené i vzorové řešení. *(Filip Čermák)*

Problem 7.

Rado has four distinct non-zero numbers a, b, c, d. He found out that these numbers satisfy the following two equations:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4,$$
$$ac=bd.$$

Now he got curious what the largest value of the following expression could be:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}.$$

Help him find it. *(Rado van Švarc)*

Solution:

First of all, since $ac=bd$, we have $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$ and $\frac{b}{c}=\frac{a}{d}$. This means that if $x=\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$ and $y=\frac{b}{c}=\frac{a}{d}$, we can rewrite the given condition as $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$.

If x and y were both positive, we would have

$$0=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2.$$

This would imply $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ and $\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$, hence $x=1$ and $y=1$. That means $a=b$ and $b=c$, from which we also get $a=d$, from $ac=bd$. But this is a contradiction, since the numbers are not distinct. Therefore, x and y cannot both be positive.

Since $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4>0$, they cannot be both negative either. This means that one of them is positive and the other is negative. WLOG let $x<0<y$.

Since x is negative, $\sqrt{-x}$ exists, and we have $-x-2-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)^2\geq 0$, or $x+\frac{1}{x}\leq -2$. This also implies $y+\frac{1}{y}=4-x-\frac{1}{x}\geq 6$.

By combining the above equations, we get:

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}&=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}+\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{b},\\&=xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y},\\&=(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}),\\&\leq(-2)\cdot 6,\\&=-12.\end{aligned}$$

That means, that our maximum can be at most -12. On the other hand, if $a=-3-\sqrt{8}$, $b=3+\sqrt{8}$, $c=1$, $d=-1$, then obviously $ac=bd$ and a, b, c and d are distinct non-zero numbers. Also,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}&=\frac{-3-\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}+\frac{3+\sqrt{8}}{1}+\frac{1}{-1}+\frac{-1}{-3-\sqrt{8}},\\&=(-1)+(3+\sqrt{8})+(-1)+(3-\sqrt{8}),\\&=4,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}&=\frac{-3-\sqrt{8}}{1}+\frac{3+\sqrt{8}}{-1}+\frac{1}{-3-\sqrt{8}}+\frac{-1}{3+\sqrt{8}},\\&=(-3-\sqrt{8})+(-3-\sqrt{8})+(-3+\sqrt{8})+(-3+\sqrt{8}),\\&=-12.\end{aligned}$$

So the value of -12 can be attained and therefore it is the maximum we were looking for.

Poznámky:
Mnoho řešitelů si nevšimlo slovíčka „distinct“ v zadání, díky čemuž řešili velice odlišnou úlohu.

Mezi 23 výsledky, které nám dorazily, se sedmkrát objevil správný výsledek -12, jedenáctkrát hodnota 4, třikrát -4, jednou 5 a jednou nic. *(Rado van Švarc)*

Problem 8.

Find all funtions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that all $x, y \in \mathbb{R}$ satisfy the following equation:

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

(Pavel Hudec)

Solution:
First note that the constant function $f(x) \equiv 1$ is clearly not a solution. Therefore there exists x_0 such that $f(x_0) \neq 1$. The equation has to hold for all x including x_0. Plugging in x_0 for x and rearranging yields:

$$f(x_0 f(y) + f(x_0 + y)) = y(1 - f(x_0)) - f(x_0).$$

We can see that the right hand side is a linear function in y and its range is $\mathbb{R}$. Therefore, the range of the left hand side has to be $\mathbb{R}$ as well. So we can conclude that f is surjective[5], hence there exists $a \in \mathbb{R}$ such that $f(a) = 0$.

If we set $x = 0$ in the original equation, we get:

$$\begin{aligned}(y+1)f(0) + f(f(y)) &= y,\\ f(f(y)) &= y(1 - f(0)) - f(0).\end{aligned}$$

We can show that $f(0) \neq 1$. If it was so, then we would have $f(f(y)) = -1$. But since f is surjective, $f \circ f$ is surjective as well. This is a contradiction with the fact that $f(f(y)) = -1$ for all real y.

Now we will prove that f is injective. Consider u and v such that $f(u) = f(v)$. Then we have the following chain of equalities:

$$u(1 - f(0)) - f(0) = f(f(u)) = f(f(v)) = v(1 - f(0)) - f(0).$$

Because of the earlier claim that $f(0) \neq 1$, we can conclude that $u = v$.

Having established surjectivity and injectivity, we can plug in $x = a$ and $y = 0$, where $f(a) = 0$:

$$\begin{aligned}(0+1)f(a) + f(af(0) + f(a)) &= 0,\\ f(af(0)) &= 0 = f(a).\end{aligned}$$

Because of injectivity, we can compare the inside parts and get equality of the arguments: $af(0) = a$. Using $f(0) \neq 1$, this is equivalent to $a = 0$. Hence $f(0) = 0$.

We will finish the solution by substituting $y = 0$ into the original equation:

$$f(x) + f(f(x)) = 0.$$

Combining this with $f(f(y)) = y(1 - f(0)) - f(0) = y$, we get $f(x) = -x$. It is easy to check that the function $f(x) = -x$ satisfies the equation.

Poznámky:
Úloha potrápila svou záludností i několik zkušených řešitelů. Zejména u funkcionálních rovnic doporučuji pečlivě si rozmyslet, jestli všechny kroky, které děláte, opravdu můžete udělat. Speciálně velkou část této úlohy tvořil důkaz vlastností funkce f, ty však někteří řešitelé používali bez důkazu. *(Pavel Hudec)*

[5] A function $g : A \to B$ is surjective if its range is equal to its codomain B.

Váhy

1. jarní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Předměty stejných tvarů váží stejně. Seřaďte je podle váhy.

(Marian Poljak)

Řešení:

Označme si váhu čtverečku $\check{c}$, kolečka k a trojúhelníčku t. Velké váhy nám říkají $2\check{c}+k+t < 2k+\check{c}+t$, tedy $\check{c} < k$ a slovy, že čtvereček je lehčí než kolečko. Z malých pravých vah vidíme, že $t > \check{c} + k$. Takže $t > k$ a $t > \check{c}$. Tedy trojúhelníček je nejtěžší. Dohromady dostáváme, že trojúhelníček je nejtěžší, druhé je kolečko a nejlehčí je čtvereček.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správná a podobala se vzorovému. Řešitelé, kterým jsem strhla body, měli v řešení nějakou specifickou chybu, která se jinde neobjevila, případně v jejich řešení chybělo odůvodnění výsledku. *(Anna Mlezivová)*

Úloha 2.

Fíla do vrcholů pravidelného šestiúhelníka umístil závažíčka s vahami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 *gramů (v tomto pořadí vedle sebe). Zlotřilá Hedvika ale v nestřeženém okamžiku dvě závažíčka prohodila a přiznala mu jen, že vyměnila nějaká v protilehlých vrcholech. Fíla by rád pomocí svých rovnoramenných vah zjistil která, ale zároveň je velmi líný, a tak chce vážit pouze jednou. Jak to má udělat?*

(Jakub Löwit)

Řešení:
Možných postupů Fíly je několik, uvedeme jeden z nich. Fíla na levou stranu váhy umístí závaží z vrcholů, kde původně byla závaží 1 a 6, a na pravou stranu závaží z vrcholů, kde byla závaží 2 a 5. Pokud Hedvika prohodila závaží 1 a 4, pak je levá strana váhy těžší $(4 + 6 > 2 + 5)$. Pokud prohodila závaží 2 a 5, je váha v rovnováze $(1 + 6 = 2 + 5)$. V posledním případě je levá strana váhy lehčí $(1 + 3 < 2 + 5)$. Jelikož pro každý případ vyjde stav váhy jiný než v ostatních situacích, může Fíla jednoznačně určit, která dvě závaží zlotřilá Hedvika prohodila.

Poznámky:
S úlohou si většina řešitelů poradila bez problému, tak jsem až na výjimky uděloval plný počet bodů. Hlavní myšlenkou úlohy bylo zvážit taková závaží, aby pro každou ze tří možností prohození závaží byla váha v jiném stavu. *(Lucien Šíma)*

Úloha 3.

Rado má 2^n medailí zabalených ve stejných neprůhledných obalech. Polovina medailí je stříbrných a polovina je zlatých. Všechny medaile stejného typu váží stejně, přičemž zlaté jsou těžší. Michal by rád viděl nějakou zlatou medaili, ale Rado nechce otevřít víc než jeden obal. Jak ji může s jistotou najít na n vážení na rovnoramenných vahách?

(Rado van Švarc)

Řešení:
Všimněme si, že pokud v každém kroku vyřadíme vždy polovinu zbývajících medailí, po n krocích nám z 2^n zbyde právě jedna. Přitom všechny počty medailí, které takto projdeme, jsou sudé, neboť jsou to mocniny dvojky.

Dále dokažme, že pokud máme sudý počet medailí, mezi kterými je alespoň jedna zlatá, pak dokážeme vybrat přesně polovinu z nich tak, že ve výběru bude alespoň jedna zlatá. Medaile libovolně rozdělíme na dvě poloviny a ty zvážíme proti sobě. Pokud je jedna strana těžší, tak v ní musí být ostře více zlatých medailí než na druhé straně, tedy alespoň jedna. V případě, že jsou obě strany stejně těžké, tak je v nich nutně stejný počet zlatých medailí, tedy je alepoň jedna zlatá v každé z nich a můžeme si vybrat libovolnou.

Při hledání tedy postupujeme takto: zbývající medaile vždy rozdělíme na dvě poloviny a ty zvážíme. Pak si ponecháme jen těžší polovinu (libovolnou v případě rovnosti) a s tou postup opakujeme. Když nám po n krocích zbyde už jen jedna medaile, víme, že je zlatá, neboť máme vždy zaručeno, že v polovině, kterou si necháváme, je alespoň jedna zlatá medaile.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a postupovala stejně jako vzorové řešení. Jedna z věcí, na které se ovšem řešitelé neshodli, byla, jestli medaile váží Michal nebo Rado. *(Michal Töpfer)*

Úloha 4.

Martin má $N > 1$ sušenek. Všechny sušenky jsou stejně těžké až na jednu, která je otrávená a váží jinak, není ale známo, zdali více, nebo méně. Martin ji hledá pomocí rovnoramenných vah. Verča ho ovšem pozoruje a kdykoliv si je z dosavadního měření jistá, že nějaká sušenka není otrávená, okamžitě ji sní a Martin ji pak už nemůže používat k vážení. Martin chce najít otrávenou sušenku a zjistit, zdali je lehčí, nebo těžší než běžné sušenky. Pro která N umí postupovat tak, že se mu to i přes Verčino obžerství a libovolnou dávku smůly vždy podaří?

(Rado van Švarc)

Řešení:
Ukážeme, že Martin takto umí postupovat pouze pro sudá n větší nebo rovna čtyřem. To uděláme tak, že nejdříve vyřešíme několik samostatných případů a ostatní případy poté složíme za pomoci těchto malých.

Pro $\mathbf{n = 2}$ jsou sušenky jinak těžké, ale i když Martin zjistí, která je těžší, nedokáže rozhodnout, která je otrávená.

Pro $\mathbf{n = 4}$ si Martin označí sušenky a, b, c, d. Nejprve zváží $\{a, b\}$ proti $\{c, d\}$. Protože mezi nimi je otrávená sušenka, musí se váha vychýlit. Současně z tohoto vážení Verča neumí o žádné sušence říci, že není otrávená, takže žádnou nesní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že součet hmotností sušenek a, b je menší než součet hmotností sušenek c, d. Nato může Martin zvážit $\{a\}$ s $\{b\}$ a rozlišit následující dvě možnosti:

(1) Váha se vychýlí – pak díky prvnímu vážení Martin ví, že lehčí z těchto sušenek je otrávená a otrávená sušenka je tudíž lehčí než všechny ostatní.
(2) Váha se nevychýlí – potom je otrávená sušenka ta těžší z c a d a je těžší než zbylé sušenky. Tu otrávenou pak může najít zvážením $\{c\}$ a $\{d\}$.

Pro $\mathbf{n = 6}$ Martin nejprve zváží tři a tři sušenky a protože dal na váhu všechny sušenky, tak se váha musí vychýlit. Poté z těžší skupiny zváží dvě proti sobě – pokud se váha vychýlí, pak ví, že tezší ze sušenek je otrávená. Pokud jsou stejně těžké, pak je Verča sní a Martinovi zbudou čtyři sušenky. Označme si je a, b, c, d, přičemž a, b a c jsou sušenky z lehčí strany z prvního vážení a sušenka d byla na těžší straně. Martin zváží $\{a, b\}$ proti $\{c, d\}$. Mohou nastat následující případy:

(1) Pokud jsou $\{a, b\}$ těžší než $\{c, d\}$, pak Martin ví, že c je lehčí než ostatní sušenky, a je tedy otrávená.
(2) Pokud jsou $\{a, b\}$ lehčí než $\{c, d\}$, pak Verča sní c (z následujícího rozboru totiž plyne, že c již nemůže být otrávená) a Martin pokračuje zvážením $\{a\}$ s $\{b\}$:
    (1) Váha se nevychýlí – pak d je otrávená a je těžší než ostatní.
    (2) Váhy se vychýlí – pak lehčí z a nebo b je otrávená a je lehčí než neotrávené.

Ukázali jsme, že pro $n = 4$ a 6 může Martin postupovat tak, aby otrávenou sušenku i přes Verčino obžerství a s kbelíkem smůly našel, a z toho již jednoduše dokážeme, že tak může postupovat i pro všechna větší sudá čísla.

Pro $n = 4k$ si Martin rozdělí sušenky do skupin po 4 a bude postupně vážit jednotlivé skupiny podle již popsaného postupu pro $n = 4$. Pokud se váhy v prvním kroku nevychýlí, pak Verča danou čtveřici sní a Martin pokračuje s další dokud nenajde tu čtveřici, ve které se otrávená sušenka nachází.

Pro $n = 4k + 2$ si Martin rozdělí sušenky na jednu skupinu po 6 a zbylé sušenky do skupin po 4 a opět použije postup popsaný výše.

Pro lichá n ukážeme, že buď o sušenkách nezjistíme vůbec nic, nebo dostaneme spor s minimalitou. Nejprve si Martin rozmyslí, že nemá smysl vážit různě početné skupiny. Nechť všechny neotrávené sušenky váží 1 a otrávená váží m. Budeme-li předpokládat, že $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$, pak při vážení různě početných skupin sušenek bude ta početnější vždy těžší, ale Martin tím nic nezjistí. Tedy jediná užitečná vážení jsou v tom případě taková, kdy Martin váží dvě stejně početné skupiny sušenek.

Předpokládejme pro spor, že existuje nějaký lichý počet sušenek takový, že Martin dokáže vždy najít otrávenou sušenku a zjistit, zda je lehčí nebo těžší. Vyberme potom nejmenší takový počet. Zaměřme se navíc nyní jen na sušenky s váhami z minulého odstavce. Aby vůbec něco o sušenkách Martin s jistotou zjistil, musí zvážit dvě stejně početné skupinky (potenciální vážení různě početných skupinek nedá podle minulého odstavce žádnou informaci Martinovi ani Verče). Sušenek máme licho, takže alespoň jednu vážit nebudeme. Jelikož může být ale otrávená libovolná ze sušenek, tak se může stát, že si ji Martin zrovna k vážení nevybral. V takovém případě budou sušenky na obou stranách váhy vážit stejně, což vyústí ve znalost, že otrávená sušenka je ve zbytku a Verča všechny vážené sušenky sní. O nevážených sušenkách jsme nezjistili vůbec nic, takže nám všechny zůstanou a ocitáme se ve stejné situaci jako na začátku, jen s menším lichým počtem sušenek. Z nich Martin musí umět určit, která je otrávená a jestli je lehčí, či těžší, což je ale ve sporu s minimalitou původního lichého počtu.

Celé ještě jednou shrnuto – Martin umí najít otrávenou sušenku a určit zda je lehčí nebo těžší než ostatní sušenky pouze pro sudá n větší než 2.

Poznámky:
V řešeních se objevovaly dvě časté chyby. První, kdy si řešitel nerozmyslel, jaké všechny sušenky Verča sní (a pak je používal ve vážení), a druhá častá chyba byla snaha použít indukci pro sudá n. Ale tato indukce byla zpravidla založena na předpokladu, že zvážení všech sušenek nedá Martinovi žádnou informaci, což není pravda.

Řešení úlohy pro lichá čísla formulovali snad všichni řešitelé pomocí indukce. Můžete si ale všimnout, že přístup popsaný ve vzorovém řešení je vlastně s indukcí ekvivalentní a v tomto případě lze pomocí něj důkaz dobře formulovat.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 5.

Tonda má rovnoramenné váhy a 100 *stejně vypadajících hůlek, z nichž přesně* 30 *je kouzelných. Každá kouzelná hůlka je lehčí než každá nekouzelná, ale hůlky stejného typu nemusí vážit stejně. Určete nejmenší N takové, že Tonda umí najít alespoň jednu zaručeně kouzelnou hůlku pomocí nanejvýš N vážení.*

(Jakub Löwit)

Řešení:
Ukážeme, že nejmenší počet vážení, pomocí nichž může Tonda zaručeně najít alespoň jednu kouzelnou hůlku, je 70. K tomu potřebujeme najít strategii 70 vážení, která Tondovi zajistí nalezení kouzelné hůlky, a pak potřebujeme ukázat, že existuje 100 hůlek takových, že po 69 váženích Tonda nemůže o žádné hůlce s jistotou říct, že je kouzelná.

Tonda může najít kouzelnou hůlku následovně: Vedle vah si vymezí místo, kde bude mít odloženou nejlehčí hůlku, kterou dosud viděl. Na začátku tam umístí náhodnou hůlku. Pak si postupně bude náhodně brát další hůlky, každou z nich vždy zváží oproti jeho dosud nejlehčí hůlce a tu lehčí z nich odloží zpět na místo pro dosud nejlehčí hůlku. Tato hůlka pak nutně musí být nejlehčí z těch, které dosud viděl. Po 70 takovýchto vážení bude mít Tonda vedle vah nejlehčí z 71 hůlek, se kterými se dosud setkal. To ale znamená, že je tato hůlka lehčí (nebo stejně těžká) jako 70 jiných hůlek, a tak musí být kouzelná. Tonda tedy potřebuje maximálně 70 vážení na to, aby s jistotou mohl říct, že je některá hůlka kouzelná.

Ke zjištění, že Tonda ani po 69 vážení není vždy schopný s jistotou najít alespoň jednu kouzelnou hůlku, si pomůžeme speciálními váhami. Pokud Tonda dostane váhy, které mu dají ostře víc informací než rovnoramenné váhy v zadání, a přitom stejně nemůže určit kouzelnou hůlku, pak Tonda nemůže určit kouzelnou hůlku ani s normálními rovnoramennými váhami. Váhy, které Tondovi dáme k dispozici, mu nejenom ukáží na těžší misku rovnoramenných vah, ale také přímo na nejtěžší hůlku z těch na obou miskách. Ukážeme, že pokud má Tonda zrovna před sebou sto hůlek $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, kde i-tá hůlka má hmotnost 2^i, pak ani s našimi speciálními váhami není schopný určit ani jednu kouzelnou hůlku. Díky tomu, jak jsme zvolili hmotnosti hůlek, bude každému vážení dominovat pouze nejtěžší hůlka. Takže když Tondovi naše speciální váhy ukáží na nejtěžší hůlku na váze, pak informace o tom, která miska je těžší, nepřinese žádnou novou informaci.

Nechť tedy Tonda provede 69 vážení. Nazvěme hůlku *těžkou*, pokud ji naše váhy označí jako nejtěžší v alespoň jednom vážení. Tonda tedy bude mít maximálně 69 těžkých hůlek. Ostatní hůlky označme za *lehké*. Řekněme, že $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ je uspořádání lehkých hůlek podle hmotnosti a $t_1 < t_2 < \cdots < t_{100-m}$ je uspořádání těžkých hůlek. Pak všem Tondovým vážením vyhovuje i uspořádání $l_{\pi(1)} < l_{\pi(2)} < \cdots < l_{\pi(m)} < t_1 < t_2 < \cdots < t_{100-m}$, kde π je libovolná permutace[6] lehkých hůlek. To proto, že každému vážení dominuje jen nejtěžší z hůlek, které jsme položili na váhu

[6]Permutace je definována jako bijektivní zobrazení množiny A na množinu A (sebe sama na sebe samou). Intuitivně je to jedno z možných uspořádání prvků množiny A.

(tj. nutně těžká). Ostatní hůlky jsou tedy buď lehké (které jsou v novém uspořádání ty nejlehčí), anebo lehčí těžké (které zůstávají lehčí). Z toho je vidět, že těžké hůlky nemůžeme jednoznačně označit jako kouzelné, protože jsou v novém uspořádání těžší než alespoň 31 hůlek, a lehké taky ne, protože vybíráme π libovolně, a tak pro každou lehkou hůlku l existuje permutace π, ve které je l nejtěžší lehká, tj. těžší než 30 hůlek, a nekouzelná.

Nejmenší počet vážení, pomocí nichž může Tonda najít alespoň jednu kouzelnou hůlku, je tedy 70.

Poznámky:

Výsledek a postup, jak na 70 vážení najít nejlehčí hůlku, měla většina řešitelů správně. Téměř všichni ale v druhé části argumentovali pouze větou, že nedává smysl vážit proti sobě víc než dvě hůlku najednou, protože hůlky můžou být různě těžké, a tak nám to nedá žádnou informaci. To bohužel jako vysvětlení, proč to nemůže být fungující strategie, nestačí. Obecně se snažte vyvarovat řešení, které neurčitě nebo vágně polemizuje o možnostech rozložení a uspořádání – smrdí to mlhou!

Perfektní a precizní vyřešení úlohy se ukázalo být pro řešitele velmi náročné a z toho důvodu jsem se rozhodl bodovat mírněji. Speciální pochvalu a imaginární bod si vysloužil *Jakub Parada*, který podobně jako vzorák precizně vyargumentoval, proč 69 vážení nefunguje. Těm, kteří se o zdůvodnění minimality vůbec nezmínili, jsem udělil tři body. *(Jáchym Solecký)*

Úloha 6.

Áďa našla 2000 *plechovek, z nichž* 1000 *je plných a* 1000 *prázdných. Všechny plné váží* 500 g *a všechny prázdné* 100 g*. Na kolik nejméně vážení na rovnoramenných vahách lze vždy vytvořit dvě stejně početné hromady plechovek (není potřeba použít všechny plechovky), aby každá hromada měla jinou váhu?*

(Rado van Švarc)

Řešení:

Áďa takové dvě hromádky neumí vytvořit bez vážení – když vytvoří dvě hromádky o velikosti n, může se v každé z nich buď objevit přesně n plných plechovek, pokud je $n < 500$, nebo 500 plných a $n - 500$ prázdných plechovek v opačném případě. Proto alespoň jedno vážení potřebuje.

Na druhou stranu na jedno vážení Áďa takové dvě hromádky vytvořit umí. Nechť rozdělí plechovky na tři hromádky (označme je A, B a C), z nichž A a B obsahují po 667 plechovkách a C obsahuje 666 plechovek.

Áďa porovná váhy A a B. Pokud váží různě, má hotovo. V opačném případě ví, že v A a B je stejný počet prázdných plechovek (označme ho x) a stejný počet plných (označme ho y).

Nyní Áďa z A náhodně odebere libovolnou plechovku, BÚNO předpokládejme, že je prázdná, pro plnou bychom postupovali obdobně. Označme takto zmenšenou hromádku A'. Potom A' a C mají stejný počet plechovek. Kdyby vážily stejně, pak v A' i C je y plných plechovek. To by ale znamenalo, že celkem máme $3y$ plných plechovek, což je spor, protože plných plechovek je 1000 a to není dělitelné třemi. Víme tedy jistě, že jako dvojici hromad ze zadání můžeme zvolit C a A zmenšenou o libovolnou plechovku.

Poznámky:

Řešení se sešlo mnoho, s mnoha „řešeními“. Většina jich byla špatně. Většina správných řešení neodůvodnila, proč je alespoň jedno vážení potřeba, ale to jsem se rozhodl považovat za tak jasné, že jsem za to body nestrhával. *(Rado van Švarc)*

Úloha 7.

Pavel má pět mincí, každou jinak těžkou, a kouzelné váhy se třemi miskami. Ty pro každou uspořádanou trojici mincí řeknou, jestli jsou uspořádané podle hmotnosti od nejlehčí po nejtěžší, nebo ne. Ukažte, že když bude mít Pavel smůlu, nebude schopen na devět vážení seřadit mince podle hmotnosti.

(Pavel Hudec)

Řešení:

Hmotnost mince x budeme v řešení značit $m(x)$. Označme $f(n)$ počet uspořádání mincí takových, že odpovědi na prvních n vážení jsou stejné jako u skutečného uspořádání mincí podle hmotnosti. Snadno nahlédneme, že po n-tém vážení Pavel taková uspořádání nerozezná od skutečného.

Pokud váhy odpoví na nějakou trojici mincí (a, b, c) *ano*, znamená to, že zúžily možná uspořádání na taková, pro která platí $m(a) < m(b) < m(c)$. Všech uspořádání mincí je $5! = 120$, uspořádání s podmínkou $m(a) < m(b) < m(c)$ je $4 \cdot 5 = 20$, protože zbylé dvě mince můžeme umístit postupně na čtyři a na pět pozic.

Indukcí podle n dokážeme, že pokud bude mít Pavel smůlu, nemůže zabránit tomu, aby váhy odpověděly v prvních pěti váženích *ne* a aby platilo $f(n) \geq 120 - 20n$ pro $n \leq 5$. Pro $n = 0$ je zřejmě $f(0) = 120$. Nyní předpokládejme, že váhy v dosavadních $i \leq 4$ váženích odpověděly *ne* a $f(i) \geq 120 - 20i \geq 40$. Na $(i+1)$-ní vážení řeknou váhy *ano* pro 20 různých uspořádání mincí. Ovšem nerozlišitelných uspořádání je po i-tém vážení alespoň 40, takže při Pavlově smůle mu mohou opět říct *ne*.

Předpokládejme, že mu tedy váhy v $(i+1)$-ním vážení řekly *ne*. Označme $S(k)$ množinu uspořádání mincí, pro která by váhy v k-tém vážení odpověděly *ano*. Víme, že $|S(k)| = 20$. Potom dostáváme:

$$120 - f(i+1) = \left| \bigcup_{k=1}^{i+1} S(k) \right| \leq \sum_{k=1}^{i+1} |S(k)| = 20(i+1),$$

$$f(i+1) \geq 120 - 20(i+1).$$

První rovnost plyne z toho, že na obou stranách jsou právě ta uspořádání, u kterých váhy alespoň jednou odpověděly *ano* . Tímto je indukce hotova.

Při Pavlově smůle se tedy může stát, že $f(5) \geq 20$. Při každém dalším vážení může nastat to, že váhy Pavlovi řeknou tu odpověď, se kterou je konzistentní více uspořádání. To znamená, že každým dalším vážením může Pavel, pokud bude mít smůlu, snížit $f(n)$ nejvýše o polovinu. Snadnou indukcí pak dostaneme $f(9) \geq \frac{20}{16} > 1$. V takovém případě Pavel skutečně nemůže seřadit mince podle hmotnosti.

Poznámky:

Ač se vzorové řešení zdá složité a ač nepřišlo jediné správné řešení, úloha nebyla neřešitelná. Základní myšlenkou bylo nějak přinutit váhy, aby odpovídaly *ne*, což dávalo Pavlovi menší množství informací. Pak už stačilo přijít jen na tu správnou myšlenku se zavedením $f(n)$ a odhadem pro prvních pět vážení.

Většina řešení k úloze přistoupila tak, že vymyslela strategii pro Pavla a o té dokázala, že při Pavlově smůle mu nemusí stačit devět vážení. Nikomu se však nepodařilo mě přesvědčit, že jejich strategie je skutečně optimální. Vzorové řešení naopak vůbec nerozebírá konkrétní Pavlovu strategii.

(Pavel Hudec)

Úloha 8.

Kuba má 3^{2^n} mincí, mezi nimiž je jedna falešná – lehčí než ostatní, které všechny váží stejně. Dále má troje rovnoramenné váhy, z nichž dvoje fungují normálně a jedny ukazují náhodné výsledky. Ukažte, že Kuba umí na $3n + 1$ vážení najít falešnou minci.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Při každém vážení rozdělíme mince na tři hromádky, z nichž první a druhou, které uděláme stejné velké, položíme na ramena vah. Váhy vždy rozhodnou, ve které ze tří hromádek se nachází lehčí mince (buď na lehčí straně vah, nebo v případě rovnováhy ve zbývající hromádce). Samozřejmě si musíme dát pozor na falešné váhy.

Pokračujme snadným pozorováním. Mějme k dispozici správné váhy a 3^k mincí, z nichž jedna je lehčí. Pak jsme schopni na k vážení najít falešnou minci. Vždy rozdělíme mince na tři hromádky se stejným počtem mincí a váhy určí, ve které třetině se nachází lehčí mince. Dále pokračujeme s touto hromádkou. Po k váženích nám opravdu zbyde jen jedna mince.

Nyní budeme postupovat indukcí podle n. Pro $n = 1$ bychom rádi na čtyři vážení našli falešnou minci mezi devíti. V prvním vážení rozdělíme mince na tři trojice a použijeme váhy číslo 1. Označme si A, B, C mince v lehčí hromádce (podle našeho vážení). Ve druhém vážení budeme vážit na vahách 2 a rozdělíme mince po třech tak, aby každá ze tří hromádek obsahovala právě jednu z mincí A, B, C. Bez újmy na obecnosti lehčí hromádka obsahuje minci A. Označme si D, E zbývající dvě mince v této hromádce. Pro třetí vážení použijeme váhy 3 a rozdělíme mince takto: na jednu hromádku umístíme mince B, C, na druhou hromádku mince D, E a na třetí hromádku zbývající mince.

Provedli jsme tři vážení na třech různých vahách, z nichž jen jedny můžou být falešné. Proto se lehčí mince musí nacházet alespoň ve dvou lehčích hromádkách z našich tří vážení.

Nyní rozlišíme tři případy podle toho, ve které hromádce je ve třetím vážení lehčí mince. Pokud je lehčí mince v první hromádce, máme dvě možnosti. Buď je lehčí mince A a třetí váhy lžou, nebo je lehčí jedna z mincí B, C a druhé váhy lžou. V každém případě nám zbývají tři podezřelé mince a víme, že první váhy jsou správné, tudíž podle úvodního pozorování nám stačí jedno vážení k určení falešné mince.

Případ, kdy je lehčí mince v druhé hromádce, vyřešíme analogicky.

Pokud je lehčí mince ve třetí hromádce, tak s jistotou víme, že je lehčí mince A, protože žádná jiná mince se nenachází ve dvou lehčích hromádkách.

V obecném případě máme 3^{2n} mincí. Budeme postupovat podobně jako výše, akorát místo devíti mincí uvažujme devět hromádek o 3^{2n-2} mincích. Po třech váženích může opět nastat několik případů. Buď o jedné váze zjistíme, že je správná a zbyde nám 3^{2n-1} mincí (tři hromádky o 3^{2n-2} mincích), nebo nám zbyde jedna hromádka o 3^{2n-2} mincích. V prvním případě nám podle úvodního pozorování stačí dalších $2n - 1$ vážení na správné váze, celkem tedy $2n + 2$, což je pro přirozená n menší nebo rovno kýženému $3n + 1$. V druhém případě jsme hotovi z indukčního předpokladu.

Poznámky:

Přestože byla úloha celkem hravá, došlo jen několik řešení a pouze jedno kompletní. Většina řešitelů buď zapomněla na nějaký případ, nebo se jim nepodařilo úlohu rozlousknout pro $n = 1$. Jelikož myšlenka řešení byla správná, uděloval jsem 3-4 body. *(Lucien Šíma)*

Pravděpodobnost II

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Stádečko 250 PraSátek se rozhodlo uspořádat filmovou noc. Začala tím, že vyrobila seznam 100 filmů a z nich nyní chtějí vybrat nějaké, které pak budou promítat. Každé PraSátko má přitom seznam deseti filmů, které se mu líbí, a seznam deseti filmů, které se mu nelíbí (jednotlivé seznamy se mohou libovolně překrývat).

(a) *Dokažte, že můžeme vybrat nějaké filmy tak, že každé PraSátko uvidí alespoň jeden film ze seznamu těch, které se mu líbí, ale nejvýše devět filmů ze seznamu těch, které se mu nelíbí.* *(3 BODY)*

(b) *Dokažte, že je to možné, i pokud přidáme podmínku, že vybraných filmů musí být nejvýše 50.* *(2 BODY)*

(Vašek Rozhoň)

ŘEŠENÍ:

Budeme postupovat pravděpodobnostní metodou jako v řešení první úlohy druhého dílu seriálu. Zvolíme každý film nezávisle na těch ostatních s pravděpodobností jedna polovina. Pro i-té PraSátko si zavedeme jev A_i, který nastane, pokud žádný film z jeho seznamu oblíbených filmů nebyl vybrán. Dále jev B_i nastane, pokud všech deset filmů ze seznamu jeho neoblíbených filmů bylo vybráno. Díky nezávislosti jednotlivých výběrů je $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(B_i) = 2^{-10}$. Máme tedy dohromady $250 \cdot 2 = 500$ jevů, kterým se chceme vyhnout. Použitím faktu, že pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, dostáváme

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{250} \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{250}) \leq 500 \cdot 2^{-10} = \frac{500}{1024} < 1.$$

S nenulovou pravděpodobností se proto stane, že žádný z těchto jevů nenastane. To nutně znamená, že musí existovat seznam filmů, který splňuje dané podmínky. Tím jsme dokázali první část úlohy. Pro vyřešení druhé části si stačí uvědomit, že při naší náhodné volbě vybereme nejvýše 50 filmů s pravděpodobností vyšší než jedna polovina. To proto, že každému výběru více než 50 filmů odpovídá výběr méně než 50 filmů, které jsme v prvním výběru nevybrali. Označíme-li C jev, že vybereme více než 50 filmů, opět dostáváme

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{250} \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{250} \cup C) \leq \frac{500}{1024} + \frac{1}{2} < 1.$$

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Vyřešíme rovnou druhou podúlohu. Vybereme náhodnou podmnožinu právě 50 filmů; pracujeme tedy s pravděpodobnostním prostorem se $\binom{100}{50}$ prvky. Zavedeme stejné jevy A_i a B_i. Jev A_i nastane právě tehdy, když ze zbylých 90 filmů, jež nejsou na seznamu oblíbených filmů i-tého PraSátka, vybereme všech 50 filmů. To můžeme udělat $\binom{90}{50}$ možnostmi, takže $\mathrm{P}(A_i) = \binom{90}{50}/\binom{100}{50}$. Obdobně jev B_i nastane právě tehdy, když ze zbylých 90 filmů vybereme právě 40, a proto $\mathrm{P}(B_i) = \binom{90}{40}/\binom{100}{50}$. Nyní postupujeme stejně jako v předchozím řešení a spočítáme, že

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots A_{250} \cup B_1 \cup \ldots B_{250}) \leq 250 \cdot \frac{\frac{90!}{40!\cdot 50!} + \frac{90!}{50!\cdot 40!}}{\frac{100!}{50!\cdot 50!}} = 250 \cdot 2 \cdot \frac{90! \cdot 50! \cdot 50!}{100! \cdot 40! \cdot 50!} =$$
$$= 500 \cdot \frac{50 \cdot 49 \cdots 41}{100 \cdot 99 \cdots 91} = 500 \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdots \frac{41}{91} < 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{500}{1024} < 1.$$

Opět dostáváme vhodný seznam filmů s nenulovou pravděpodobností.

Poznámky:
Pěknou interpretaci prvního řešení měla *Magdaléna Mišinová*: rozdělíme filmy na dvě skupiny a stejně jako ve vzorovém řešení dokážeme, že s nenulovou pravděpodobností nebude žádná desetice celá v jedné skupině. Pak na filmové noci budeme pouštět tu menší skupinu filmů.

Většina řešitelů nicméně volila druhý postup (podobný poslední částí druhé úlohy ve studijním textu), který sice vede na složitější počítání, ale zato v něm není potřeba trik s interpretací podmínky na počet filmů jako dalšího jevu. *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 2.

Noe vzal na archu n dvojic zvířat. Když po několika dnech začal být hladový, rozhodl se, že vybere k náhodných zvířat a sní je. Jaká je střední hodnota počtu různých *druhů zvířat, která Noe vybral?*[7]

(Vašek Rozhoň)

Řešení (volně podle Dominika Stejskala):
Druhy zvířat si očíslujeme čísly od jedné do n. Pak A_i pro i od 1 do n bude jev „i-tý druh byl ochutnán“. Spočítejme jeho pravděpodobnost.

Všech možných výběrů zvířat k sežrání je $\binom{2n}{k}$, pokud se chceme vyhnout jednomu konkrétnímu druhu, máme na výběr pouze z $2n-2$ zvířat, tedy k z nich k sežrání můžeme vybrat $\binom{2n-2}{k}$ způsoby. Pravděpodobnost, že daný druh byl ochutnán je pravděpodobnost, že jsme se mu nevyhnuli, tedy:

$$\mathrm{P}(A_i) = 1 - \frac{\binom{2n-2}{k}}{\binom{2n}{k}} = 1 - \frac{\frac{(2n-2)!}{k!\cdot(2n-k-2)!}}{\frac{(2n)!}{k!\cdot(2n-k)!}} = 1 - \frac{(2n-2)!\cdot(2n-k)!}{(2n)!\cdot(2n-k-2)!} =$$
$$= 1 - \frac{(2n-k)\cdot(2n-k-1)}{2n\cdot(2n-1)} = \frac{4n^2 - 2n - (4n^2 - 2nk - 2n - 2nk + k^2 + k)}{n\cdot(4n-2)} =$$
$$= \frac{4nk - k^2 - k}{n\cdot(4n-2)},$$

což se současně rovná střední hodnotě příslušného indikátoru.

Nyní již stačí využít linearity střední hodnoty, protože hledaná náhodná veličina je součtem indikátorů přes všechny druhy, tedy její střední hodnota je součtem příslušných středních hodnot, a proto je rovna

$$n \cdot \frac{4nk - k^2 - k}{n\cdot(4n-2)} = \frac{4nk - k^2 - k}{4n-2}.$$

[7] Pokud například Noe vybral lva, lvici a jednorožce, jedná se o dva různé druhy.

Poznámky:
Řešitelé, kteří alespoň něco poslali, většinou úlohu vyřešili, avšak nepočítali $\mathrm{P}(A_i)$ pomocí pravděpodobnosti doplňku. Pak bylo potřeba zvlášť rozebrat situaci, kdy Noe snědl pouze jedno zvíře daného druhu, a kdy snědl obě, čímž přibylo trochu úprav navíc. *Dominik Stejskal* a *Kačka Panešová*, kteří postupovali podle vzoráku, si vysloužili jeden kladný imaginární bod.

Naproti tomu někteří řešitelé počítali střední hodnotu přímočaře bez použití linearity střední hodnoty. Těm pak vyšla střední hodnota jako

$$\frac{1}{\binom{2n}{k}} \sum_{i=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^{k} i \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{i}{k-i} \cdot 2^{2i-k}.$$

To je sice správná hodnota, ale výsledek vždy chceme dostat v co nejjednodušším možném tvaru – jistě uznáte, že podíl dvou polynomů stupně jedna a dva dá mnohem lepší představu o tom, kolik to tedy je pro konkrétní k a n, než takováhle suma. Taková řešení byla tedy hodnocena dvěma body.

(Viki Němeček)

Úloha 3.

Na Matfyzu se sešlo n informatiků a matematiků, přičemž každý matematik zná alespoň jednoho informatika. Ukažte, že můžeme vybrat takovou skupinu matfyzáků o velikosti alespoň $n/2$, aby uvnitř ní každý matematik znal lichý počet informatiků.

(Danil Koževnikov)

Řešení:
V řešení použijeme kombinaci pravděpodobnostní metody a linearity střední hodnoty. Budeme náhodně volit skupinu, kde každý matematik zná lichý počet informatiků, a ukážeme, že střední hodnota její velikosti je rovna $n/2$, což zaručí existenci alespoň jedné skupiny s alespoň polovičním počtem matfyzáků.

Označme si počty matematiků a informatiků na Matfyzu postupně m, i. Zavedeme si n náhodných veličin $X_1, \ldots, X_m$ a $Y_1, \ldots, Y_i$, které pro každého matematika, respektive informatika, indikují, zda je ve vybrané skupině. Celkový počet lidí ve skupině je potom náhodná veličina $S = \sum_{j=1}^{m} X_j + \sum_{j=1}^{i} Y_j$.

Abychom si co nejvíce usnadnili výpočet $\mathrm{E}(S)$, zvolíme naši skupinu specifickým způsobem: nejprve do ní přidámě každého informatika s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a poté tam doplníme všechny matematiky, kteří znají lichý počet zvolených informatiků. V tomto případě zjevně platí $\mathrm{E}(Y_j) = \frac{1}{2}$ pro j od 1 do i.

Řekněme, že daný matematik zná $k \geq 1$ informatiků, které jsou nějakým (jakýmkoliv) způsobem seřazeni. Označme si jako A jev to, že byl zvolen sudý počet z prvních $k-1$ známých informatiků, a jako B jev to, že byl zvolen k-tý z nich. Potom pravděpodobnost, že zná lichý počet informatiků ze zvolené skupiny, můžeme vyjádřit jako $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{2}(P(A) + P(\overline{A})) = \frac{1}{2}$. Využili jsme toho, že volba posledního známého je nezávislá na všech ostatních, a rovněž toho, že $k-1 \geq 0$, aby byly pravděpodobnosti z posledního kroku dobře definované. Takže každý matematik bude ve zvolené skupině rovněž s pravděpodobností jedna polovina, pročež $\mathrm{E}(X_j) = \frac{1}{2}$ a z linearity střední hodnoty $\mathrm{E}(S) = \frac{m}{2} + \frac{i}{2} = \frac{n}{2}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Všechna správná řešení se myšlenkou volby největší možné skupiny z náhodné skupiny informatiků podobala tomu vzorovému. Místo použití pravděpodobnostních pojmů jste však často používali ne vždy zcela jasné argumenty se symetrií nebo naopak přímočařejší přístup s počítáním střední hodnoty z definice přes sumu. Ačkoliv oba přístupy u této úlohy byly celkem schůdné (například poslední část řešení se dala nahradit trikovým použitím binomické věty), tak obecně spíš platí, že když už řešení používá pravděpodobnostní metodu, pak půjde elegantně zformulovat v jazyce pravděpodobnosti.

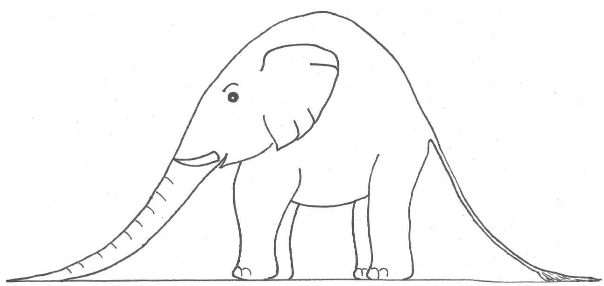
(Danil Koževnikov)

Pravděpodobnost III. – Návrat velkých čísel

Lékařství dělá lidi nemocnými, matematika mrzutými a teologie hříšnými.
Martin Luther

Milý příteli,
vítej u třetího dílu seriálu o pravděpodobnosti! Zatímco v předchozím díle jsme Ti chtěli ukázat, jak se pomocí pravděpodobnosti dají řešit všemožné matematické úlohy, zde bychom Ti především rádi naznačili, proč je vlastně pravděpodobnost tak užitečným nástrojem i mimo svět matematiky. Naším hlavním cílem bude pomocí náhodných veličin vysvětlit princip, kterému se říká *zákon velkých čísel.*

Nejprve si však zopakujme, co jsme si řekli v předchozím díle. Představili jsme si pravděpodobnostní metodu, jež umožňuje pomocí pravděpodobnosti řešit úlohy, které s ní zdánlivě vůbec nesouvisí. Poté jsme si zavedli náhodné veličiny (značené velkými písmeny, nejčastěji X), což jsou v podstatě proměnné nabývající různých hodnot s různou pravděpodobností. Definovali jsme je jako funkce z pravděpodobnostního prostoru Ω do reálných čísel. Díky této definici můžeme s různými náhodnými veličinami definovanými na stejném pravděpodobnostním prostoru provádět různé operace a stále dostaneme náhodnou veličinu: jsou-li například X, Y definované na Ω, pak náhodná veličina $2X + Y^2$ přiřadí každému ω z Ω číslo $2X(\omega) + Y(\omega)^2$. Po stručném shrnutí sumační notace jsme ji hned aplikovali při zavedení střední hodnoty náhodné veličiny $\mathrm{E}(X)$, což je prostě průměrná hodnota X. Nakonec jsme si pro libovolné náhodné veličiny X, Y a číslo c dokázali vztahy $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ a $\mathrm{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathrm{E}(X)$, které se dohromady nazývají linearita střední hodnoty. V řadě případů nám tyto vlastnosti velmi usnadňují její výpočet. Všechny nově nabyté znalosti jsme pak použili k vylepšení pravděpodobnostní metody, té se však ve třetím díle věnovat vůbec *nebudeme.*



Začátek tohoto dílu bude věnován především intuici za již zmíněným zákonem velkých čísel, který může sice na první pohled působit poněkud složitě, ale ve skutečnosti pouze potvrzuje právnost našich představ o pravděpodobnosti. Dále prozkoumáme několik užitečných myšlenek, jako je nezávislost náhodných veličin (což je zobecnění nezávislosti *jevů* z prvního dílu) nebo rozptyl.

Zákon velkých čísel

Zákony jsou jako párky, lepší nevědět, jak vznikají.

John Godfrey Saxe

Vraťme se opět k našemu oblíbenému příkladu s házením mincí. Předpokládejme, že si n-krát hodíme mincí a spočítáme, kolik nám padlo panen. Tomu odpovídá monstrózní pravděpodobnostní prostor obsahující 2^n elementárních jevů – každý odpovídá jedné z možných posloupností hodnot. V minulém díle jsme si ukázali, jak takovéto pokusy popisovat pomocí náhodných veličin. Pro hod s pořadovým číslem i můžeme vytvořit náhodnou proměnnou A_i, která bude říkat, zda v i-tém hodu padla panna (v tomto případě bude rovná jedné), či nikoli (bude rovna nule). Takovým proměnným také říkáme indikátory, neboť indikují, zda nastal daný jev (padla panna). Střední hodnota této proměnné $\mathrm{E}(A_i)$ bude rovna $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$. Použitím linearity střední hodnoty dostáváme, že pro střední počet padlých panen platí $\mathrm{E}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \mathrm{E}(A_1) + \mathrm{E}(A_2) + \dots + \mathrm{E}(A_n) = n/2$.

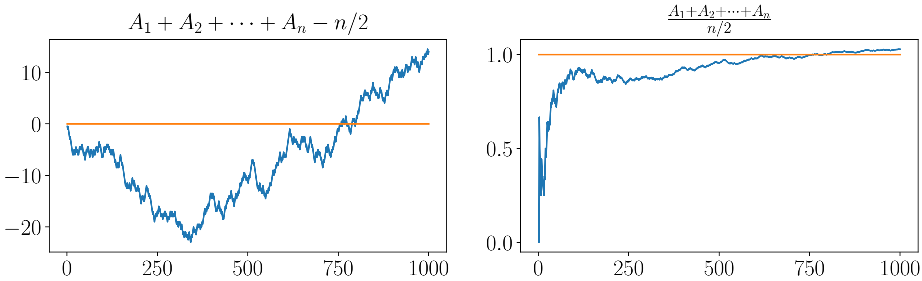
Všimni si, že ačkoli v předchozím příkladu byly jednotlivé hody mincí nezávislé, tak to pro použití linearity střední hodnoty nebylo nutné, protože platí i obecně. Můžeme třeba uvážit jinou náhodnou veličinu B odpovídající tomu, že si nejprve náhodně s poloviční pravděpodobností vybereme mezi mincí, která má na obou stranách pannu, a mincí, která má na obou stranách orla, a poté si touto mincí n-krát hodíme. Střední hodnota B je $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot n = n/2$ (mohou nastat jen dvě možnosti). Zároveň ale můžeme totéž spočítat pomocí indikátorů: Zavedeme-li B_i jako indikátor toho, zda je i-té slovo na papíře „panna“, bude opět platit, že B_i je rovno jedné s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, a podle stejného vzorečku jako výše dostaneme, že $\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(B_1) + \mathrm{E}(B_2) + \dots + \mathrm{E}(B_n) = n/2$. Tentokrát už ale o nezávislosti mluvit nemůžeme: Nastane-li jev $B_1 = 1$, víme, že už jistě nastanou i všechny ostatní jevy $B_i = 1$.

Veličiny A a B nás budou provázet po zbytek dílu a budeme se držet jejich značení (náhodné veličiny jinak obvykle značíme písmeny z konce abecedy).

První příklad s veličinou A jsme dokonce použili v prvním díle jako motivaci k zavedení pravděpodobnosti: hodíme-li si n-krát férovou mincí, očekáváme, že přibližně v půlce případů dostaneme pannu. První a druhý příklad se v tomto ohledu zásadně liší. Ačkoli v druhém příkladu také platí $\mathrm{E}(B) = n/2$, nemá smysl očekávat, že budou hodnoty B blízko průměru, poněvadž veličina nabývá pouze hodnot 0 a n.

Co přesně tedy máme na mysli, když v prvním případě očekáváme přibližně $n/2$ panen? Na následujících dvou obrázcích vidíš výsledek pokusu, kdy jsme na počítači postupně generovali 1000 náhodných veličin, přičemž každá nabývá hodnoty 0, nebo 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. To odpovídá házení mincí a sledování počtu panen, takže dále budeme o pokusu mluvit tak, jako kdybychom si doopravdy hodili tisíckrát mincí.

Na prvním obrázku jsme postupně vyznačili to, jak se počet padlých panen liší od střední hodnoty, neboli pro n od 1 do 1000 jsme vyznačili, kolik je $A_1 + A_2 + \dots + A_n - n/2$. Na druhém obrázku je vyznačen podíl $\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n/2}$. Oba obrázky odpovídají stejnému pokusu, takže například platí, že hodnota nalevo je větší než nula právě tehdy, když je hodnota napravo větší než jedna.



Když se podíváš na první obrázek, vidíš, že celkový počet panen nebyl 500 (doopravdy to bylo 514). Dá se spočítat, že pravděpodobnost, že padne přesně 500 panen, se pohybuje kolem pouhých 2,5 %. Graf na levém obrázku ani nevypadá, že by se snažil zůstávat v okolí nuly. Naopak se zdá, že se rozdíl počtů panen a orlů s rostoucím počtem hodů postupně zvětšuje.

Tento fakt není tak překvapivý, pokud se smíříme s tím, že mince „nemá paměť" – to je to, co myslíme, když říkáme, že jednotlivé hody jsou nezávislé. V prvních šestnácti hodech padly jen dvě panny[8] a graf se odchýlil od nuly k hodnotě -7. To ale vůbec neznamená, že by se v dalších hodech mince musela snažit, aby padalo více panen (a tím se graf vrátil k nule). Panna a orel jsou v každém dalším hodu stejně pravděpodobní, a to nezávisle na historii.

Lidé si to ovšem občas neuvědomují, čímž se dopouštějí tzv. gamblerova omylu. V roce 1913 třeba v jistém kasinu v Monte Carlu hráči prohráli rekordní částky, když v tamní ruletě dvacetšestkrát po sobě skončila kulička na černém políčku. Hráči samozřejmě sázeli na to, že v příštím kole už přece kulička musí padnout na červené políčko. Pozorování, že málokdy padne tolik černých po sobě, je sice správné; když ale tímto nepravděpodobným jevem podmíníme (tedy když už víme, že nastal), je v dalším roztočení rulety černá stejně pravděpodobná jako červená. To, že jsme v minulosti měli smůlu, nás bohužel nijak nechrání před dalším neštěstím.[9]

Následující úloha ukazuje, že ačkoli je po $2n$ hodech nejpravděpodobnější počet padlých panen roven n, pravděpodobnost tohoto jevu se postupně zmenšuje (a jak jsme si řekli, pro $n = 1000$ je to jen 2,5 %).

Úloha 1. Vzpomeň si, že pravděpodobnost, že v n hodech padne přesně k panen, je $\binom{n}{k} \cdot 2^{-n}$.

(1) Dokaž, že pro sudé n a nezáporné $k \leq n$ platí $\binom{n}{n/2} \geq \binom{n}{k}$, neboli nejpravděpodobnější počet padlých panen je $n/2$.

(2) Dokaž, že se s rostoucím $2n$ zmenšuje pravděpodobnost, že při $2n$ hodech padne přesně polovina panen.

Pohlédni však nyní na druhý obrázek, kde udáváme podíl počtu padlých panen a střední hodnoty $n/2$. Ačkoli se tento graf chová pro prvních přibližně 30 hodů docela nevyzpytatelně, poměr se následně rychle přibližuje hodnotě jedna, přesně jak napovídá intuice.

Rozdílné chování obrázků ukazuje i následující úloha. První podúloha se týká obrázku nalevo a její výsledek je přímým důsledkem toho, že mince nemá paměť. Druhá podúloha se týká obrázku napravo a naznačuje, že graf napravo má tendenci vracet se k hodnotě 1, jestliže se od ní vychýlil (prvních několik hodů je totiž stále méně a méně důležitých).

Úloha 2. Předpokládejme, že v prvních deseti hodech padly samé panny. Pro $n \geq 10$ označme $R_n = 10 + A_{11} + \cdots + A_n - n/2$, tedy rozdíl počtu panen a střední hodnoty po n hodech. Obdobně podíl po n hodech označme $P_n = \frac{10 + A_{11} + \cdots + A_n}{n/2}$.

(1) Spočítej, že pro všechna $n \geq 10$ platí $\mathrm{E}(R_n) = \mathrm{E}(R_{10}) = 5$.

[8] Opravdu! Samotné nás to překvapilo.

[9] Jak by Ti Job jistě ochotně potvrdil.

(2) Spočítej, kolik je $\mathrm{E}(P_n)$, a ověř, že pro $m \geq n \geq 10$ je $\mathrm{E}(P_m) \leq \mathrm{E}(P_n)$.

S podobným jevem se mimochodem můžeš setkat i za jiných okolností a obvykle se označuje jako regrese k průměru. Nad jeho jinými variantami se můžeš zamyslet v následující úloze.

Úloha 3. (na zamyšlení, nemusíš nic počítat)

(1) Jistá soutěž probíhá ve dvou soutěžních dnech, přičemž každý den účastníci řeší tři úlohy. Předpokládejme, že každý soutěžící má pro každou úlohu nezávisle na ostatních poloviční pravděpodobnost, že ji vyřeší. Rozmysli si, že ti, kteří první den vyřešili alespoň dvě úlohy, budou po druhém dni pravděpodobně umístěni hůře než po tom prvním.

(2) Jistý učitel zpozoroval, že pozitivní motivace nefunguje tak dobře jako ta negativní. Pokud se žákovi povedl test výjimečně dobře, učitel jej pochválil. I přesto se příští test obvykle nepovedl tak dobře. Pokud se test žákovi vůbec nepovedl, učitel ho seřval. Příští test se žákovi obvykle povedl lépe. Máš pro to nějaké jiné vysvětlení?

(3) Bylo vypozorováno, že v roce 2017 se v jistých zatáčkách odehrálo hodně bouraček. Do zatáček byly nainstalovány bezpečnostní kamery a v příštím roce v těchto zatáčkách již k tolika haváriím nedošlo. Znamená to nutně, že bezpečnostní kamery zde přispěly k bezpečnějšímu provozu?

Vraťme se k obrázku podílu napravo. Fakt, že se graf na obrázku (s velkou pravděpodobností) drží poblíž hodnoty jedna, se nazývá **zákon velkých čísel**. Tento zákon doopravdy neplatí jen pro férové mince, ale třeba i pro házení falešnou mincí nebo kostkou – a obecně pro nezávislá opakování jakéhokoliv pokusu. My si dokážeme jeho jistou verzi, ale nejprve si povězme, proč je tento fakt vůbec zajímavý.

Zákon velkých čísel potvrzuje naši intuici, že se pravděpodobnost chová předvídatelně, pokud daný pokus opakujeme mnohokrát (jestliže bychom si hodili mincí jen třikrát, nic zajímavého bychom asi nevypozorovali). Ve druhém díle jsme si například jako součást naší představy o tom, co je střední hodnota, pověděli, že se vyplatí hrát hry, ve kterých je střední hodnota výdělku kladná. Ne vždy je to ale tak jednoduché – hrál(a) bys třeba hru, ve které vyhraješ 6 000 Kč s pravděpodobností 90 % a prohraješ 50 000 Kč s pravděpodobností 10 %? I když je střední hodnota výdělku kladná, zdá se zbytečné riskovat své týdenní kapesné kvůli almužně 6 000 Kč. Úplně jiná situace je, pokud bys měl(a) odehrát pět tisíc her, přičemž v každé vyhraješ 1,2 Kč s pravděpodobností 90 % a prohraješ 10 Kč s pravděpodobností 10 %. Pro dostatečné množství pokusů už se prostě můžeme spolehnout na to, že vyhrajeme přibližně 90 % her a vyděláme si. To proto, že platí zákon velkých čísel.

Rozmysleme si, jak formulovat zákon velkých čísel o něco přesněji než „graf na obrázku bude blízko jedné“. Zabýváme se náhodnou veličinou $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ a speciálně nás zajímá poměr $\frac{A}{n/2}$. Pravděpodobnost, že bude tento podíl přesně 1, je mizivá, ale můžeme si zvolit interval, řekněme od 0,9 do 1,1, a pak se ptát, jaká je pravděpodobnost jevu $0{,}9 < \frac{A}{n/2} < 1{,}1$. Jestliže dokážeme, že pravděpodobnost tohoto jevu je velká, řekněme alespoň 90 %, můžeme si gratulovat.

Problém je, že tyto podmínky obecně neplatí. Třeba pro $n = 5$ může veličina $\frac{A_1+A_2+\cdots+A_5}{5/2}$ nabývat hodnot $0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$ a $\frac{10}{5}$. Jev $0{,}9 < \frac{A_1+A_2+\cdots+A_5}{5/2} < 1{,}1$ tak nenastane nikdy! Buď je tento podíl nejvýše 0,8, nebo alespoň 1,2. Problém je v tom, že zákon velkých čísel je zákon pro velká čísla, ne pro všechna čísla. Můžeme tak doufat, že podmínky budou s velkou pravděpodobností splněny, pokud si mincí hodíme aspoň, řekněme, tisíckrát, ale je mylné očekávat, že poměr $\frac{A}{n/2}$ bude s velkou pravděpodobností blízko jedné i pro malá n.

Později si opravdu dokážeme, že pro alespoň tisíc pokusů bude poměr $\frac{A}{n/2}$ v intervalu mezi 0,9 a 1,1 s pravděpodobností alespoň 90 %. Důkaz bude obecný a sám (sama) si pak budeš moci rozmyslet, že když zvětšíme počet pokusů, můžeme třeba zúžit interval nebo zvýšit pravděpodobnost, že $\frac{A}{n/2}$ bude ležet po n pokusech v daném intervalu.

Jak vidíš, už jenom formulace principu, který vidíme na obrázku napravo, je nesnadný úkol, proto Ti doporučujeme si ještě jednou přečíst poslední úsek této kapitoly.

Markovova nerovnost

Abychom nějakou verzi zákona velkých čísel dokázali, musíme si nejprve ukázat pravděpodobnostní nerovnost, kterou k důkazu použijeme. Zatím jedinou pravděpodobnostní nerovností, kterou známe, je fakt, že pravděpodobnost sjednocení jevů je nejvýš součet jednotlivých pravděpodobností. S tou si již ale nyní nevystačíme.

Ukážeme si nerovnost, která říká, že pokud nějaká náhodná veličina nabývá nezáporných hodnot, tak jen s malou pravděpodobností může nabývat hodnot podstatně větších než její střední hodnota. To zní docela složitě, ale myšlenka je jednoduchá. Představ si, že na dlouhém drátu napnutém mezi dvěma sloupy sedí hejno špačků. Řekněme, že průměrná vzdálenost špačka od levého sloupu je 10 metrů. Kolik špačků může sedět ve vzdálenosti aspoň 20 metrů? Nejvýše polovina! Pokud by totiž více než polovina špačků seděla ve vzdálenosti alespoň 20 metrů, jen díky této polovině by průměrná vzdálenost byla větší než 10 metrů. Lepší odhad než jedna polovina však dostat nemůžeme, neboť se může stát, že polovina špačků sedí ve vzdálenosti 0 od levého sloupu, zatímco druhá polovina ve vzdálenosti 20 metrů. Podobnou úvahu můžeme udělat i pro náhodné veličiny. Získaná nerovnost se jmenuje podle Andreje Markova[10].

Tvrzení. (Markovova nerovnost) *Nechť X je náhodná veličina definovaná na konečném pravděpodobnostním prostoru Ω nabývající pouze nezáporných hodnot. Potom pro libovolné $c > 0$ platí*

$$P\big(X \geq c \cdot E(X)\big) \leq \frac{1}{c}.$$

Tedy stejně jako maximálně polovina špačků může sedět dále než dvojnásobek průměrné vzdálenosti, může nezáporná náhodná veličina s nanejvýš třetinovou pravděpodobností nabývat hodnot větších než trojnásobek střední hodnoty. Povšimni si, že se v nerovnosti vyskytuje jednou „$\geq$“ a jednou „$\leq$“. Nejprve se „$\geq$“ vyskytuje uvnitř pravděpodobnosti, kde definuje jev „X nabývá velké hodnoty“. Následně „$\leq$“ říká, že pravděpodobnost tohoto jevu je malá.

Důkaz. Pokud by tomu tak nebylo, měl by jev $X \geq c\mathrm{E}(X)$ pravděpodobnost ostře větší než $\frac{1}{c}$. Jenže pokud nezáporná náhodná veličina nabývá hodnoty alespoň $c\mathrm{E}(X)$ s pravděpodobností vyšší než $\frac{1}{c}$, musí už její střední hodnota $\mathrm{E}(X)$ být vyšší než $c\mathrm{E}(X) \cdot \frac{1}{c} = \mathrm{E}(X)$, což je nesmysl.

Úloha 4. Rozmysli si:

(1) Kdy v Markovově nerovnosti nastává rovnost?

(2) Najdi příklad náhodné veličiny nabývající záporných hodnot, pro kterou nerovnost neplatí.

Úloha 5. Mediánem $m(X)$ náhodné veličiny X myslíme libovolné číslo, pro které platí, že $\mathrm{P}(X \geq m(X)) \geq \frac{1}{2}$ a $\mathrm{P}(X \leq m(X)) \geq \frac{1}{2}$. Například pro počet panen při jednom hodu mincí je mediánem libovolné číslo od 0 do 1 a pro hod férovou devítistěnnou kostkou (nabývá hodnot od jedné do devíti) je mediánem pouze číslo 5.

(1) Rozmysli si, že pro každou veličinu X existuje vždy aspoň jeden medián.

(2) Dokaž, že pro libovolný medián platí $m(X) \leq 2\mathrm{E}(X)$.

Úloha 6. Ve Wonkově továrně na čokoládu je na výběr ze 320 příchutí čokolády. Při procházce továrnou si každé z pěti dětí smělo ochutnat 160 příchutí. Protože bylo na spěch, každé dítě si

[10] Andrej Markov (1978–) je ruský hokejista, který v roce 2018 dopomohl svému týmu Ak Bars Kazaň k vítězství Gagarinova poháru. Jeho jmenovec Andrej Markov (1856–1922), žák P. Čebyševa, je v teorii pravděpodobnosti znám zejména díky tzv. Markovovým řetězcům, pomocí kterých se modelují nejrůznější pravděpodobnostní procesy.

vybralo náhodných 160 příchutí nezávisle na ostatních dětech. Dokaž, že příchutí, které si žádné dítě nevybralo, je alespoň dvacet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

Vraťme se nyní k zákonu velkých čísel. Zajímá nás náhodná veličina $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, kde každé A_i odpovídá jednomu hodu mincí. Speciálně bychom rádi odhadli pravděpodobnost jevu $\frac{A}{n/2} \geq 1{,}1$, který také můžeme zapsat jako $A \geq 0{,}55n$. Díky symetrii panen a orlů je pravděpodobnost, že $A \leq 0{,}45n$, stejná, takže stačí spočítat, že pravděpodobnost jevu $A \geq 0{,}55n$ je malá. Pravděpodobnost, že A neleží v intervalu mezi $0{,}45n$ a $0{,}55n$, pak bude dvojnásobná (a tedy pořád malá), neboť se jedná o disjunktní jevy.

Pravděpodobnost jevu $A \geq 0{,}55n$ odhadneme pomocí Markovovy nerovnosti. Máme $\mathrm{E}(A) = \frac{n}{2}$, takže Markovova nerovnost říká, že

$$\mathrm{P}(A \geq 0{,}55n) = \mathrm{P}(A \geq 1{,}1 \cdot \mathrm{E}(A)) \leq \frac{1}{1{,}1} \doteq 0{,}9.$$

Pravděpodobnost, že A neleží v intervalu mezi $0{,}45n$ a $0{,}55n$, je tak nejvýše $2 \cdot \frac{1}{1{,}1} \doteq 1{,}8$. Ouha, aplikace Markovovy nerovnosti tedy skončila naprostým fiaskem. Chtěli jsme dokázat, že pravděpodobnost tohoto jevu malá, ale pouze jsme zjistili, že je menší než 1,8. Kde se stala chyba?

Problém je v tom, že kdybychom takto jednoduše pomocí Markovovy nerovnosti dokázali něco pro veličinu A odpovídající opakovanému házení mincí, dokázali bychom to samé i pro veličinu B, která nabývá hodnoty 0 a n se stejnou pravděpodobností. Pro ni ale nic takového neplatí – průměrná hodnota je $n/2$, ale pravděpodobnost, že při n hodech získáme hodnotu mezi $0{,}45n$ a $0{,}55n$, je nulová. V následující kapitole se proto zamyslíme nad nezávislostí, protože důležitý rozdíl mezi A a B je právě ten, že jednotlivé hody mincí, pomocí kterých definujeme A, jsou nezávislé. Následně si pro náhodné veličiny zavedeme další parametr, tzv. rozptyl, který už veličiny A a B spolehlivě rozliší.

Nezávislost náhodných veličin

Už v prvním díle jsme si pověděli o nezávislosti jevů. Protože ale nyní pracujeme spíše s veličinami než s konkrétními jevy, hodí se rozšířit si i naši definici nezávislosti. Co znamená, že na sobě dvě veličiny X, Y – tedy dva pokusy – nezávisí? Intuitivně by to mělo znamenat, že známe-li výsledek jednoho pokusu, neovlivní to možné výsledky toho druhého. Řečeno jazykem podmíněné pravděpodobnosti, pro libovolné x a y by mělo platit $\mathrm{P}(Y = y \mid X = x) = \mathrm{P}(Y = y)$. Z prvního dílu víme, že tento výraz můžeme přepsat jako $\mathrm{P}(X = x \cap Y = y) = \mathrm{P}(X = x) \cdot \mathrm{P}(Y = y)$, tedy jevy $X = x$ a $Y = y$ jsou nezávislé. Přesně tak se definuje nezávislost veličin.

Definice. Mějme pravděpodobnostní prostor Ω a na něm dvě náhodné veličiny X a Y takové, že X nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_m$ a Y nabývá hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Řekneme, že X a Y jsou nezávislé, pokud jsou pro všechna $1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$ jevy $X = x_i$ a $Y = y_j$ nezávislé.

Příkladem je třeba hod dvěma férovými kostkami. V takovém případě pracujeme s pravděpodobnostním prostorem obsahujícím 36 možných výsledků, přičemž každý nastane se stejnou pravděpodobností. Můžeme se nyní ptát na to, kolik ok padlo na první a kolik na druhé kostce, a zavést k tomuto účelu náhodné veličiny X a Y.

Spočítáme, že pro libovolné $1 \leq i \leq 6$ platí

$$\mathrm{P}(X = i) = \mathrm{P}(X = i \cap Y = 1) + \cdots + \mathrm{P}(X = i \cap Y = 6) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6},$$

neboť to, že nastal jev $X = i$, odpovídá šestici elementárních jevů. Stejně tak pro libovolné $1 \leq j \leq 6$ dostaneme $\mathrm{P}(Y = j) = \frac{1}{6}$. Pro libovolné i a j proto platí $\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{36}$.

Zároveň $\mathrm{P}(X = i) \cdot \mathrm{P}(Y = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Všechny dvojice jevů $X = i$ a $Y = j$ jsou tedy nezávislé, a můžeme tak směle tvrdit, že i náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé.

Úloha 7. Na stole leží dvě modré, jedna červená a jedna zelená propiska. Vybereme si dvě náhodně. Nechť X je náhodná veličina značící počet vybraných modrých propisek a Y značí počet vybraných červených propisek. Jsou X a Y nezávislé?

Řešení. Pravděpodobnostní prostor odpovídá šesti možným výsledkům. Dáme-li si tu práci, můžeme si nakreslit tabulku a vyplnit do ní pravděpodobnosti všech jevů $X = i \cap Y = j$.

Y \ X	0	1	2
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0
0	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Pravděpodobnosti jevů $X = i$ dostaneme jako součty po sloupcích (vyjde $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$) a pravděpodobnosti $Y = j$ jako součty po řádcích (vyjde $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$). Aby byly dané veličiny nezávislé, musela by hodnota na každém políčku být rovna součinu součtu odpovídajícího řádku a součtu odpovídajícího sloupce. To ale neplatí, třeba pro jev $X = 0 \cap Y = 0$ máme $0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

Ačkoli nám trvalo tři díly seriálu, než jsme si ukázali definici nezávislých náhodných veličin, je to jeden z konceptů, který často bereme jako samozřejmý. Když si hodíme kostkou, zatímco kamarád si lízne kartu ze zamíchaného balíčku, výsledky na sobě samozřejmě „nezávisí“. Abychom tento koncept mohli pořádně popsat, zavedli jsme si postupně pravděpodobnostní prostory, které obsahují všechny možné výsledky pokusu (to jsou elementární jevy, v tomto případě dvojice stěna kostky a karta). Následně jsme definovali nezávislost, ale jen pro jevy. Poté jsme zavedli náhodné veličiny, které odpovídají jednotlivým pokusům, a teprve nyní jsme všechno spojili dohromady. Plodem našeho snažení je to, že nyní naprosto přesně víme, co to znamená, že jsou dané pokusy nezávislé, a můžeme proto s nimi snáze pracovat. Pro všechny nezávislé veličiny kupříkladu platí, že součin jejich středních hodnot je střední hodnotou jejich součinu.

Tvrzení. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom platí, že $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.*

Než se pustíme do důkazu, ukažme si použití na následujícím příkladu. Uvažme pravděpodobnostní prostor o velikosti 24 odpovídající denním hodinám a veličiny X, Y, kde X pro každý interval o délce jedné hodiny říká, kolik vlaků včera projelo jihlavským nádražím během tohoto intervalu. Dále Y říká, kolik průměrně vagónů měly tyto vlaky. Pokud tedy mezi půlnocí a jednou hodinou ranní projel jeden vlak se dvěma a jeden vlak se čtyřmi vagóny, bude pro odpovídající elementární jev našeho prostoru nabývat X hodnoty 2 a Y hodnoty 3.

Veličina XY říká, kolik vagónů projelo nádražím v daný časový interval. Víme-li, že $\mathrm{E}(X) = 20$ a $\mathrm{E}(Y) = 3$, dává smysl, že $\mathrm{E}(XY) = 60$. To ale platí jen za předpokladu, že jsou veličiny X a Y nezávislé!

Jestliže každou z dvanácti nočních hodin projede stanicí jeden vlak s jedním vagónem, zatímco každou denní hodinu to bude 39 vlaků po pěti vagónech, bude platit $\mathrm{E}(X) = 20$ a $\mathrm{E}(Y) = 3$. Jenže průměrný počet vagónů bude $\frac{12 \cdot 1 \cdot 1 + 12 \cdot 39 \cdot 5}{24} = 98$, což je mnohem více než 60. Rozmysli si, že v tomto případě nejsou X a Y nezávislé.

Důkaz. Nazvěme $H(X)$ a $H(Y)$ obory hodnot X a Y. Na jednu stranu pro veličinu $X \cdot Y$ platí

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \sum_{x \in H(X)} \sum_{y \in H(Y)} \mathrm{P}(X = x \cap Y = y) xy,$$

protože vždy s pravděpodobností $\mathrm{P}(X = x \cap Y = y)$ bude $X = x$ a $Y = y$, pročež $XY = xy$. Na druhou stranu zatneme zuby a uvědomíme si, že

$$\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \left(\sum_{x \in H(X)} \mathrm{P}(X = x)x\right) \cdot \left(\sum_{y \in H(Y)} \mathrm{P}(Y = y)y\right) = \\ = \sum_{x \in H(X)} \sum_{y \in H(Y)} \mathrm{P}(X = x)x \cdot \mathrm{P}(Y = y)y,$$

kde jsme roznásobili dvě závorky. Tyto dva výrazy jsou ale stejné, protože z nezávislosti máme $\mathrm{P}(X = x \cap Y = y) = \mathrm{P}(X = x) \cdot \mathrm{P}(Y = y)$ pro všechna x a y.

Úloha 8. Kuba dluží Honzovi obnos, jehož hodnotu již oba dávno zapomněli, a tak se rozhodli, že mu ho Kuba splatí následujícím způsobem.

(1) Kuba si dvakrát hodí kostkou. Počet ok při prvním hodu postupně určí jednu z šesti hodnot $1, 2, 5, 10, 20, 50$. Počet ok při druhém hodu pak určí, kolik mincí této hodnoty dá Kuba Honzovi. Jaká je střední hodnota zaplacené částky?

(2) Honzu napadlo, že aby se zbytečně neošoupala kostka, bude stačit, když si Kuba hodí jen jednou, a tato hodnota určí částku i počet mincí (tři oka znamenají třikrát pět korun). Jaká je střední hodnota teď?

Úloha 9.

(1) Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, pokud pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že n-tice jevů $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ je nezávislá. Ověř, že pro nezávislé veličiny platí $\mathrm{E}(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = \mathrm{E}(X_1) \cdot \mathrm{E}(X_2) \cdots \mathrm{E}(X_n)$.

(2) David se rozhodl podvádět v jisté hře, ve které se desetkrát hodí kostkou (jednotlivé hody jsou nezávislé) a následně se spočte a) součet b) součin jednotlivých počtů ok. Součet ok na protilehlých stranách kostky je vždy sedm. David se naučil házet kostkou tak, že si vždy může vybrat dvojici protějších stěn a hodit tak, že tyto stěny zaručeně nepadnou (ostatní stěny padnou s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Jak má házet kostkou, aby maximalizoval střední hodnotu a) součtu b) součinu ok?

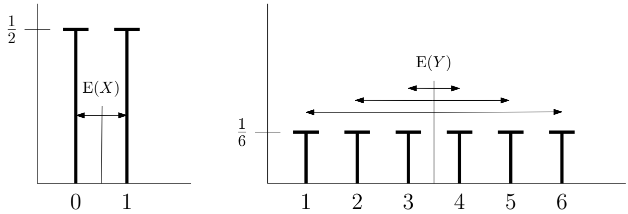
Rozptyl

Tragické fiasko s aplikací Markovovy nerovnosti na veličinu A odpovídající hodu n mincemi ukázalo, že znát střední hodnotu dané veličiny nestačí k tomu, abychom rozlišili A od veličiny B, která nabývá hodnoty 0 a n se stejnou pravděpodobností. V této kapitole si povíme o **rozptylu**, což je parametr náhodné veličiny, který nám říká, jak moc jsou hodnoty dané veličiny vzdálené od průměru, a umožní nám tak tyto veličiny rozlišit.

Definice. Rozptylem náhodné veličiny X myslíme střední hodnotu veličiny $(X - \mathrm{E}(X))^2$.

Rozptyl se značí $\mathrm{Var}(X)$ (značení pochází z anglického *variance*), takže můžeme psát $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)$. Ačkoli tento výraz vypadá kuriózně, dává dobrý smysl. Předně, $(X - \mathrm{E}(X))^2$ je zase náhodná veličina. Známe-li střední hodnotu původní veličiny X (na obrázku vyznačená svislou čarou), pro výpočet rozptylu si nejdříve představíme, že od všech možných hodnot X odečteme $\mathrm{E}(X)$ (tím posuneme celý histogram o $\mathrm{E}(X)$). Dostaneme veličinu $X - \mathrm{E}(X)$, jejíž střední hodnota je nula. Nakonec možné hodnoty této veličiny umocníme na druhou a spočítáme střední hodnotu.

Číslo, které dostaneme, nám v jistém smyslu říká, jaká je průměrná vzdálenost hodnot veličiny X od její střední hodnoty. Nicméně se nejedná o průměr vzdáleností (tomu by odpovídala veličina $|X - \mathrm{E}(X)|$), ale o průměr druhých mocnin vzdáleností. Druhá mocnina zařídí, že může-li veličina nabývat hodnot hodně vzdálených od průměru, bude její rozptyl obrovský. Proto platí, že rozptyl pro hod mincí vyjde jen $\frac{1}{2} \cdot (0{,}5^2 + 0{,}5^2) = \frac{1}{4}$, protože výsledek je vždy blízko průměru. Naproti tomu rozptyl hodu kostkou je $\frac{1}{6}(2{,}5^2+1{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2+1{,}5^2+2{,}5^2) = \frac{35}{12}$, neboť výsledky mohou být od průměru dále.



Naším cílem je nyní spočítat rozptyly dvou veličin A a B ze začátku tohoto dílu. Začněme s B. Abychom se při výpočtu rozptylu moc nenadřeli, rozmysli si nejprve dvě obecné vlastnosti rozptylu.

Úloha 10. Dokaž, že pro libovolná čísla a a b platí $\mathrm{Var}(X+a) = \mathrm{Var}(X)$ a $\mathrm{Var}(bX) = b^2\mathrm{Var}(X)$.

Jinými slovy, přičtením jedničky ke všem hodnotám náhodné veličiny se její rozptyl nezmění, a pokud hodnoty vynásobíme deseti, rozptyl se zvětší stokrát.

Z druhé vlastnosti plyne, že rozptyl B je n^2-násobek rozptylu veličiny indikující, zda v jednom hodu mincí padla panna. Už jsme spočítali, že rozptyl této veličiny je $\frac{1}{4}$; dostáváme $\mathrm{Var}(B) = \frac{1}{4} \cdot n^2$.

Následující tvrzení ukazuje jiný způsob, jak počítat rozptyl.

Tvrzení. *Pro náhodnou veličinu X platí $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.*

Důkaz. Po rozepsání rozptylu z definice a roznásobení dostáváme rovnost

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2 - 2X\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2\right).$$

Na ni můžeme aplikovat linearitu střední hodnoty:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}\left(2X\mathrm{E}(X)\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X)^2\right).$$

Jakkoli je to na první pohled zvláštní, i $2X\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{E}(X)^2$ jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru jako X: první z nich přiřadí elementárnímu jevu ω číslo $2\mathrm{E}(X) \cdot X(\omega)$, zatímco druhá prostě přiřadí všem jevům stejné číslo $\mathrm{E}(X)^2$.

Protože $2\mathrm{E}(X)$ je číslo a ne veličina, platí $\mathrm{E}\left(2X\mathrm{E}(X)\right) = \mathrm{E}\left(2\mathrm{E}(X) \cdot X\right) = 2\mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(X) = 2\mathrm{E}(X)^2$, a dále $\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X)^2\right) = \mathrm{E}(X)^2$. Dohromady tedy dostáváme

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)^2 + \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2.$$

Úloha 11. Spočítej $\mathrm{Var}(B)$ pomocí předchozího tvrzení.

Úloha 12. Dokaž, že pro libovolnou náhodnou veličinu X platí $\mathrm{E}(X^2) \geq \mathrm{E}(X)^2$. Kdy v této nerovnosti nastává rovnost?

Úloha 13. Mějme náhodnou veličinu X, která nabývá pouze hodnot z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pro jakou největší hodnotu n je každá taková X jednoznačně určena (neboli pravděpodobnost každého jevu $X = i$ je pevně dána):

(1) svojí střední hodnotou?

(2) svojí střední hodnotou a rozptylem?

(3) svým rozptylem?

Pokusme se nyní spočítat rozptyl veličiny A. Na první pohled vůbec není jasné, jak na to. Pro počítání střední hodnoty přijde vhod její linearita, tedy fakt, že střední hodnota součtu je součet středních hodnot. Platí něco takového i pro rozptyl? Obecně ne, což si můžeš rozmyslet v následující úloze.

Úloha 14. Uvažme jeden hod férovou mincí (odpovídající pravděpodobnostní prostor má dva prvky) a veličinu P indikující, zda padla panna (tedy je rovná jedné, padla-li panna, a jinak nule), a veličinu O indikující, zda padl orel. Spočítej, že $\mathrm{Var}(O+O) > \mathrm{Var}(O) + \mathrm{Var}(O)$ a $\mathrm{Var}(O+P) < \mathrm{Var}(O) + \mathrm{Var}(P)$.

Klíčovou vlastností rozptylu je nicméně to, že pro nezávislé veličiny je součet jejich rozptylů opravdu rozptylem jejich součtu. To plyne přímo z toho, že pro nezávislé veličiny je $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$:

Tvrzení. *Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, platí $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.*

Důkaz. Rozepišme výraz $\mathrm{Var}(X+Y)$ s pomocí linearity střední hodnoty.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}\left((X+Y)^2\right) - \mathrm{E}(X+Y)^2 = \\ &= \mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(Y^2) + 2\mathrm{E}(XY) - \left(\mathrm{E}(X)^2 + 2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Y)^2\right).\end{aligned}$$

Pro nezávislé náhodné veličiny platí $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, takže se tyto členy odečtou a zbude nám rovnost $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(X)^2 - \mathrm{E}(Y)^2 = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Úloha 15. Zobecni předchozí tvrzení pro libovolný počet náhodných veličin, tedy dokaž, že máme-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ takové, že každá dvojice X_i, X_j $(i \neq j)$ je nezávislá, pak platí $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$.

Spočítat rozptyl náhodné veličiny A je nyní snadné. Máme

$$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(A_1) + \mathrm{Var}(A_2) + \cdots + \mathrm{Var}(A_n) = n \cdot \mathrm{Var}(A_1) = \frac{1}{4}n.$$

Porovnáním s $\mathrm{Var}(B) = \frac{1}{4}n^2$ vidíme, že $\mathrm{Var}(A)$ je pro velké n mnohem menší než $\mathrm{Var}(B)$. To je přesně výsledek, který jsme čekali! Rozptyl veličiny B je obrovský, protože hodnoty, kterých B nabývá, jsou vždy daleko od průměru.

Jdeme do finále. Markovova nerovnost, kterou jsme již potkali, nám totiž překvapivě často o náhodné veličině X řekne více, pokud ji aplikujeme nikoliv přímo na X, nýbrž na veličinu $(X - \mathrm{E}(X))^2$, která měří „vzdálenosti hodnot X od průměru“. Dosazení tohoto výrazu do Markovovy nerovnosti je tak užitečným trikem, že výsledná nerovnost má své vlastní jméno po P. Čebyševovi[11].

Tvrzení. (Čebyševova nerovnost) *Pro libovolnou náhodnou veličinu X a $a > 0$ platí*

$$P\left((X - E(X))^2 \geq a^2\,\mathit{Var}(X)\right) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $(X - \mathrm{E}(X))^2$ nabývá pouze nezáporných hodnot a $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)$, můžeme aplikovat Markovovu nerovnost na veličinu $(X - \mathrm{E}(X))^2$ a a^2, čímž dostaneme dokazovanou nerovnost.

[11]Ruský matematik Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821–1894) je kromě své nerovnosti znám také díky svým příspěvkům k teorii čísel: dokázal kupříkladu tzv. Bertrandův postulát, který tvrdí, že pro libovolné přirozené n se mezi n a $2n$ nachází alespoň jedno prvočíslo. V cizojazyčné literatuře vystupuje pod přezdívkami Chebyshev, Chebysheff, Chebychov, Chebyshov, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff či Chebychev.

Ekvivalentně můžeme psát $\mathrm{P}\left(|X-\mathrm{E}(X)| \geq a\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \leq \frac{1}{a^2}$. Odmocnina z rozptylu se nazývá **směrodatná odchylka** a obvykle se značí σ.[12] Stejně jako rozptyl říká, jak moc jsou hodnoty veličiny vzdáleny od průměru. Dost možná ses s ní již setkal(a) ve fyzice. Pokud pětkrát změříš hustotu neznámého předmětu, pokaždé Ti vyjde trochu jiný výsledek kvůli různým nepřesnostem – měření proto můžeme popisovat náhodnou veličinou. Směrodatnou odchylku této veličiny pak obvykle odhadneš z naměřených dat pomocí jistého vzorečku z fyzikálních tabulek. Odchylka je představitelnější než rozptyl: pokud náhodnou veličinu X měříš v metrech, tak rozptyl má jednotku metry čtvereční, zatímco směrodatná odchylka je opět v metrech.

Podobně jako Markovova nerovnost tvrdí, že náhodná veličina nabývá hodnot vyšších než a-násobek střední hodnoty s pravděpodobností nejvýše $1/a$, Čebyševova nerovnost prohlašuje, že pravděpodobnost, že náhodná veličina je vzdálena od své střední hodnoty o a-násobek směrodatné odchylky, je nejvýše $1/a^2$. Proto směrodatná odchylka dává představu, jak moc se jednotlivá měření obvykle liší od průměru (tedy střední hodnoty).

Úloha 16. Dokaž, že pro libovolnou náhodnou veličinu X nabývající nezáporných hodnot platí $\mathrm{P}(X=0) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{E}(X)^2}$.

Jako velké finále se nyní naposled vraťme k veličině A popisující hod n mincemi. Máme $\mathrm{E}(A) = \frac{n}{2}$ a $\mathrm{Var}(A) = n/4$. Čebyševova nerovnost tak po odmocnění podmínky dává

$$\mathrm{P}\left(|A-\mathrm{E}(A)| \geq a\sqrt{n/4}\right) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Dosadíme-li z estetických důvodů $a = 2c\sqrt{n}$, dostáváme

$$\mathrm{P}\left(|A-\mathrm{E}(A)| \geq cn\right) \leq \frac{1}{4c^2 n}.$$

Jestliže za c nyní dosadíme 0,05 a zvolíme $n = 1000$, dostaneme, že počet panen se bude od průměru lišit o více než $0{,}05n = 0{,}1 \cdot \frac{n}{2}$ s pravděpodobností nejvýše $\frac{1}{4\cdot 0{,}05^2\cdot 1000} = \frac{400}{4\cdot 1000} = \frac{1}{10}$, přesně jak jsme slibovali v první kapitole. S rostoucím n bude tato pravděpodobnost dále klesat. Můžeme si vybírat různá c a zkoušet různé přesnosti, pro každé c nicméně výraz $\frac{1}{4c^2 n}$ bude klesat a nakonec bude zanedbatelně malý.

Postup, který jsme aplikovali pro házení férovou mincí, samozřejmě funguje i pro házení falešnou mincí, kostkou, měření výšky lidí, které potkáš na ulici, … Vždy platí, že se zvětšujícím se počtem pokusů se pravděpodobnost chová předvídatelněji a ukázněněji. S pomocí nově nabytých poznatků dokonce můžeme zformulovat obecnější verzi našeho tvrzení:

Tvrzení. (Verze zákona velkých čísel) *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou po dvou nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou střední hodnotu i rozptyl. Potom pro jejich součet $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ a libovolné kladné c platí nerovnost*

$$P\left(|Y-E(Y)| \geq cn\right) \leq \frac{Var(X_1)}{c^2 n}.$$

Ačkoli toto tvrzení kvůli mnoha písmenkům může působit složitě, nejedná se o nic jiného než o výpočet, který jsme udělali pro házení mincí (vzoreček nahoře dostaneme, pokud si vzpomeneme, že rozptyl jednoho hodu mincí je $\frac{1}{4}$).

Nyní si můžeme konečně s úlevou oddechnout, neboť jsme potvrdili, že intuitivní představa o povaze pravděpodobnosti je správná! Cesta k tomuto důkazu byla sice poměrně dlouhá a náročná, ale zase jsme díky ní narazili na spoustu užitečných a zajímavých konceptů. Dříve než si budeš moci

[12] Uvedený symbol je malé řecké sigma; jeho velkou variantu už znáš jako sumační symbol.

vychutnat zasloužený odpočinek, rádi bychom Ti ještě v hvězdičkových kapitolách představili pár zajímavostí, které souvisí s tím, čím jsme se v tomto díle zabývali.

Zvěřinec náhodných veličin*

Jeden z pojmů, který jsme doteď nezaváděli, je rozdělení náhodné veličiny. Rozdělení je histogram, kterým si popisujeme, jak často daná veličina nabývá jednotlivých hodnot. Jedná se tak o jakýsi prototyp náhodných veličin, u kterých už nás vlastně vůbec nezajímá původní pravděpodobnostní prostor. Zde jsme pro Tebe uspořádali katalog několika důležitých rozdělení. Přidali jsme k nim také některé jejich vlastnosti, přičemž s většinou z nich ses už někde v seriálu potkal(a). Pokud ne, zkus si je sám (sama) odvodit!

Alternativní (Bernoulliho) rozdělení – náhodná veličina nabývající s pravděpodobností p hodnoty 1 a jinak nabývající hodnoty nula. Veličina odpovídá hodu falešnou mincí a my ji z druhého dílu známe jako tzv. indikátor. Pro alternativní náhodnou veličinu X platí $\mathrm{E}(X) = p$ a $\mathrm{Var}(X) = p - p^2$.

Binomické rozdělení – náhodná veličina značící počet panen při hodu n mincemi, přičemž na každé z nich padne panna s pravděpodobností p. Platí $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Dále máme $\mathrm{E}(X) = n \cdot p$ (z linearity střední hodnoty) a $\mathrm{Var}(X) = n(p - p^2)$ (X je součet nezávislých veličin).

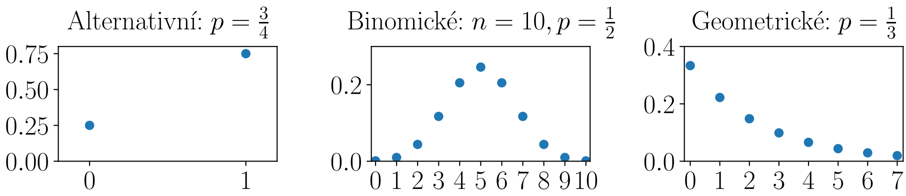
Pro $p = \frac{1}{2}$ jsou hodnoty binomického rozdělení přesně kombinační čísla $\binom{n}{k}$ vynásobená 2^{-n}. Proto binomické rozdělení úzce souvisí s kombinačními čísly, tzv. Pascalovým trojúhelníkem nebo tzv. binomickou větou, se kterými ses již možná někde setkal(a). Toto rozdělení nás provázelo po celý tento díl a víme o něm již mnoho. Jestliže si hodíme n mincemi pro sudé n, nejpravděpodobnější výsledek je, že padne $n/2$ panen. Přesto je pravděpodobnost tohoto jevu čím dál menší, když zvětšujeme počet hodů (viz první úlohu). Čebyševova nerovnost říká, že pravděpodobnost, že binomické rozdělení bude nabývat hodnot vzdálených od $n/2$ o více než, řekněme, tři směrodatné odchylky (tedy $3 \cdot \sqrt{\frac{n}{4}}$), je jen $\frac{1}{9}$. Intuice, že počet panen se od střední hodnoty $n/2$ odchýlí o řádově odmocninu z n, vysvětluje rozdílné chování dvou grafů ze začátku tohoto dílu. Zatímco v prvním grafu se křivka postupně vzdaluje od nuly ($\sqrt{n}$ postupně roste), ve druhém grafu se postupně přibližuje k jedničce ($\sqrt{n}/n$ je fakt malé pro velká n).

Úloha 17. (těžká) Mějme sudé n. Nejprve si rozmysli, že $\binom{n}{n/2}$ je určitě menší než 2^n, ale větší než $2^n/(n+1)$. Předchozí úvaha o Čebyševově nerovnosti doopravdy dává lepší představu o tom, jak velké je toto kombinační číslo.

(1) Pomocí Čebyševovy nerovnosti dokaž, že $\binom{n}{n/2} \geq 2^n \cdot \frac{3}{(8\sqrt{n}+4)}$.

(2) Naopak využij toho, že platí $\binom{n}{n/2} \cdot 2^{-n} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n-2}) \cdots (1 - \frac{1}{2})$ a zároveň $(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{n+1}$, abys dokázal(a), že $\binom{n}{n/2} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n+1}}$.

Geometrické rozdělení – náhodná veličina odpovídající počtu hodů, než na falešné minci padne panna. Padne-li panna s pravděpodobností p, máme $\mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ a $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$ (viz minulý díl). Jedná se o jedno z mála rozdělení s vlastností $\mathrm{P}(X \geq a + b \mid X \geq a) = \mathrm{P}(X \geq b)$. Jinými slovy, mince nemá paměť (vzpomeň na gamblerův omyl).



Rovnoměrné rozdělení – náhodná veličina odpovídající tomu, že zlomíme hůl na náhodném místě tak, že pro libovolný úsek hole (třeba pro první třetinu hole) je pravděpodobnost, že zlom bude někde v tomto úseku, úměrná jeho délce.

Spojitých rozdělení kromě toho rovnoměrného existuje mnoho a obecně se popisují funkcí, které se říká hustota pravděpodobnosti. V případě hole délky 1 by hustotou byla funkce rovná jedné pro $0 \le x \le 1$ a jinak rovná nule. Pravděpodobnost, že si vybereš dané x z nějakého intervalu, pak odpovídá obsahu pod grafem této funkce, což je v případě hole to samé jako délka intervalu. Opravdová hůl se láme snáze poblíž prostředku, což můžeme popsat funkcí, která je od 0 do $\frac{1}{2}$ rostoucí a následně od $\frac{1}{2}$ do 1 klesající. Stejně dlouhé intervaly pak obecně odpovídají různým obsahům, a tedy i pravděpodobnostem. Detaily o hustotě pravděpodobnosti jsou nicméně daleko nad rámec seriálu.

Jako varovný příklad toho, že se spojité náhodné veličiny chovají složitěji, uvádíme úlohu, se kterou přišel na konci 19. století francouzský matematik Joseph Bertrand[13].

Úloha 18. (Bertrandův paradox) Uvažme kružnici k se středem S a do ní vepsaný rovnostranný trojúhelník se stranou délky 1. Jaká je pravděpodobnost, že bude délka náhodně zvolené tětivy kružnice větší než 1?

(1) Zvolit si náhodnou tětivu znamená zvolit rovnoměrně a nezávisle dva body na obvodu kružnice a spojit je. Na základě toho si rozmysli, že pravděpodobnost, že dostaneme tětivu delší než 1, je jedna třetina.

(2) Zvolit si náhodnou tětivu ale také můžeme tak, že si zvolíme náhodný bod A uvnitř kružnice a ten následně interpretujeme jako střed tětivy kolmé na úsečku SA. Rozmysli si, pro které body je daná tětiva delší než 1, a porovnáním obsahů z toho vyvoď, že daná pravděpodobnost je jedna čtvrtina.

(3) Ještě jiný způsob, jak zvolit bod A z předešlého odstavce, je náhodně si zvolit, pod jakým úhlem se vydáš ze středu kružnice S a v jaké vzdálenosti se zastavíš. První je náhodné číslo od 0 do 2π, druhé je náhodné číslo od 0 do poloměru kružnice. V takovém případě si rozmysli, že vyjde jedna polovina.

(4) Který z předchozích přístupů je správný? :-)

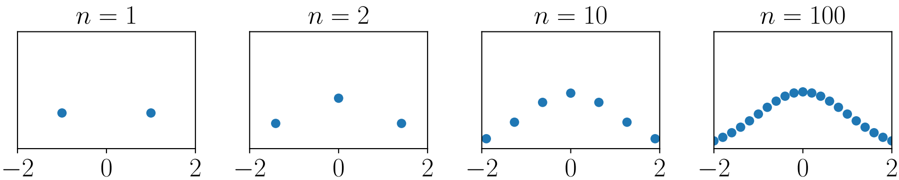
Centrální limitní věta*

Statistika nuda je, má však cenné údaje.
Zdeněk Svěrák, Jaroslav Uhlíř

To nejlepší nakonec. Podívej se na následující obrázky zobrazující binomické rozdělení s $p = \frac{1}{2}$ pro $n = 1, 2, 10$ a 100. Třeba druhý obrázek odpovídá třem možným počtům panen po hodech dvěma mincemi, které nastanou postupně s pravděpodobnostmi $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Obecně je vidět, že rozdělení se

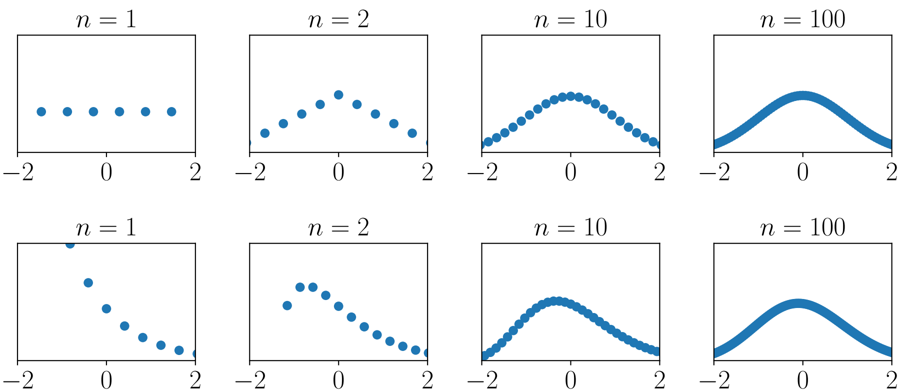
[13] Joseph Bertrand (1,98 m) je basketbalista, kterého můžeš znát díky jeho výkonům v týmu Drážďanští Titáni. Jeho jmenovec Joseph Bertrand (1822–1900) je znám zejména díky tzv. Bertrandovu postulátu, který dokázal až P. Čebyšev.

čím dál tím více podobají jisté křivce, která vypadá jako kopeček[14]. To není tak docela pravda, abychom dosáhli tohoto efektu, museli jsme postupně měnit měřítko na osách x a y. Po vhodném přeškálování ale opravdu platí, že se binomické rozdělení s rostoucím n blíží jisté křivce. Jmenuje se Gaussova křivka a je popsaná rovnicí $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$, přičemž $\mathrm{e} \doteq 2{,}7$ je tzv. Eulerovo číslo.[15]



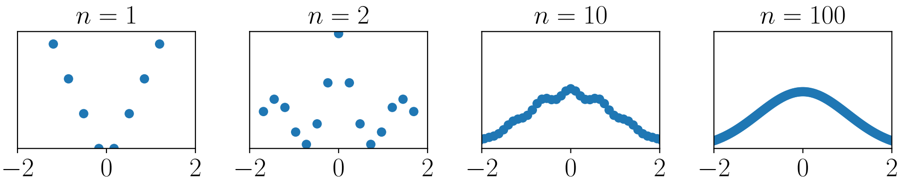
Co přesně jsme udělali s obrázkem? Nejprve jsme od veličiny odečetli střední hodnotu, tedy $n/2$. Tím jsme dosáhli toho, že vrcholy všech kopečků budou na pozici nula. To by samo o sobě ještě nestačilo. Jak víme, rozptyl součtu nezávislých veličin je roven součtu rozptylů, takže pro součet n veličin dostáváme rozptyl $n \cdot \mathrm{Var}(X_1) = n \cdot \frac{1}{4}$. Abychom dosáhli toho, že všechny veličiny budou mít stejný rozptyl, vydělili jsme jejich hodnoty výrazem $\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}$ (nezapomeň, že $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$). To odpovídá „zmáčknutí" hodnot ve vodorovné ose. Následně jsme stejným poměrem „roztáhli" hodnoty na svislé ose. To jsme udělali proto, že součet pravděpodobností se vždy musí nasčítat na 1, takže celkový „obsah pod křivkou" musí být zachován (právě obsah totiž odpovídá naší intuitivní představě o pravděpodobnosti ve spojitých prostorech). Hodnoty na vodorovné ose odpovídají tomu, že se díváme jen do vzdálenosti dvou směrodatných odchylek od průměru (pro $n = 10$ se na obrázek vešlo jen 7 z 11 možných výsledků).

To je sice pěkné, ale hod férovou mincí je jen jednou z mnoha aktivit, která se dá opakovat. Co se stane, když budeme házet falešnou mincí, kostkou nebo si vymyslíme svoje vlastní potřeštěné rozdělení? Odpověď je šokující: stane se to samé! Na následujícím obrázku je nejprve stejný proces pro hod kostkou (rozmysli si, proč pro $n = 2$ vypadá obrázek jako střecha) a následně pro geometrické rozdělení, které vypadá jako skluzavka, a pro podivné rozdělení, které vypadá jako údolí. U všech rozdělení jejich součtu nakonec vypadá podezřele stejně!



[14]Případně jako hroznýš, který právě pozřel slona.

[15]Leonhard Euler (1707–1783) a Carl Friedrich Gauss (1777–1855) jsou všeobecně pokládáni za jedny z nejvlivnějších matematiků vůbec. Proto se objevují v poznámce pod čarou v každém druhém PraSečím seriálu.



Fakt, že pokud dost dlouho sčítáme nezávislé veličiny se stejným rozdělením, vypadá výsledek jako kopeček, se nazývá **centrální limitní věta**.[16] Nejen důkaz, ale i jen samotná formulace tohoto skvostu je nad rámec seriálu, neboť vyžaduje rozsáhlé znalosti z matematické analýzy. Přesto si o ní i o jejích důsledcích něco můžeme říci. Centrální se jí říká proto, že se jedná o jeden ze základních faktů pravděpodobnosti a statistiky, podobně jako fakt, že každé číslo lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel, je základním kamenem teorie čísel. Limitní je proto, že v řeči vyšší matematiky je Gaussova křivka v jistém smyslu tzv. limitou.

K čemu je centrální limitní věta dobrá mimo svět matematiky? Například vysvětluje, proč je většina lidí téhož pohlaví podobně vysoká – na Tvoji výšku totiž má vliv mnoho okolností a speciálně hned několik různých genů. Zjednodušeně lze říct, že to, jak se Tvá výška liší od průměru, je součtem příspěvků všech těchto okolností. Protože na sobě různé okolnosti moc nezávisí a žádná není výrazně důležitější než ty zbylé, platí zde centrální limitní věta a rozdělení výšek vypadá jako kopeček (většina lidí je někde uprostřed).

Na druhou stranu barva očí záleží zejména na jednom genu, a proto je mnoho lidí s modrýma a hnědýma očima, ale není pravda, že by většina lidí měla oči v jakési hnědomodré barvě.

Zkus se sám (sama) zamyslet nad tím, kde všude můžeš Gaussovu křivku (kopeček) potkat. Závisí kupříkladu výběr auta nebo mobilního telefonu na mnoha podobně důležitých faktorech, nebo se lidé prostě dělí na dvě skupiny: ty, kdo chtějí nejlepší model za každou cenu, a na ty, kdo se spokojí se standardem stejným pro všechny? V prvním případě budou ceny různých modelů na trhu rozložené podobně jako binomické rozdělení, v druhém případě většina modelů bude mít přibližně jednu ze dvou cen.

I když je Gaussova křivka definovaná pro všechna reálná čísla, platí, že přibližně 99,7 % obsahu pod touto křivkou leží v intervalu od -3 do 3. Protože podle centrální limitní věty platí pro veličiny, které jsou součtem mnoha stejných nezávislých příspěvků, že $\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ vypadá jako Gaussova křivka, můžeme pro tyto veličiny tvrdit, že s pravděpodobností přibližně 99,7 % nabývají hodnot vzdálených od střední hodnoty nejvýše o tři směrodatné odchylky. Podobné vlastnosti této křivky se často používají ve statistice. Ukažme si jednoduché použití na následující úloze z praxe.

Úloha 19. Na večírek přijde sto hostů. Víme, že každý host chce sníst nezávisle na ostatních nula chlebíčků s pravděpodobností 20 %, jeden s pravděpodobností 50 % a dva s pravděpodobností 30 %. Kolik máme nakoupit chlebíčků, aby s pravděpodobností aspoň 99 % na všechny zbylo?

Řešení. Neukážeme si přesné řešení, jen načrtneme, jak pomůže centrální limitní věta. Označme X_i počet chlebíčků, které snědl i-tý host. Zajímá nás veličina $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Z centrální limitní věty víme, že histogram X (tedy její rozdělení) vypadá přibližně jako Gaussova křivka se středem v

$$\mathrm{E}(X) = 100 \cdot \mathrm{E}(X_1) = 100 \cdot (0{,}2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2) = 110.$$

Dále vypočítáme rozptyl:

$$\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot (\mathrm{E}({X_1}^2) - \mathrm{E}(X_1)^2) = 100 \cdot (0{,}2 \cdot 0^2 + 0{,}5 \cdot 1^2 + 0{,}3 \cdot 2^2 - 1{,}1^2) = 49 = 7^2.$$

Na internetu (nebo v tabulkách) můžeme najít, že 99 % obsahu pod křivkou leží v intervalu od $-\infty$ do 2,3. Hledaná odpověď je tak přibližně $110 + 2{,}3 \cdot 7 = 126{,}1$, takže musíme koupit aspoň 127 chlebíčků. Předchozí výpočet nicméně není žádný důkaz (doopravdy chlebíčků stačí 126).

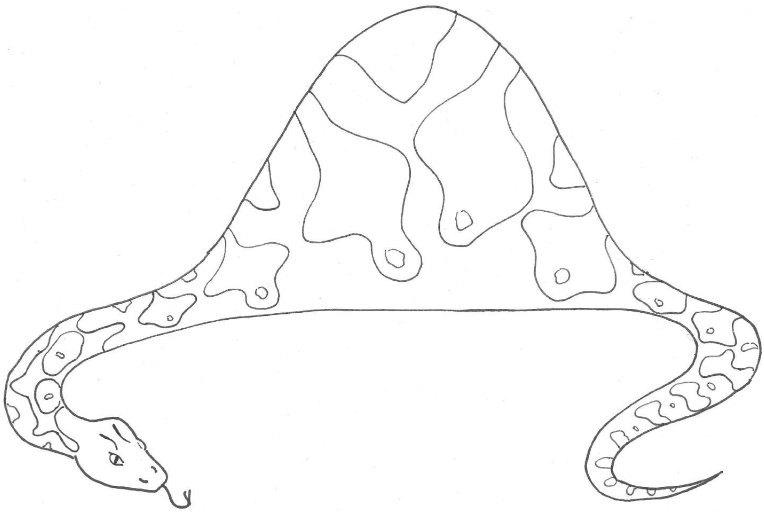
[16] Přesná matematická formulace nepoužívá slovo „kopeček“.

Odhad v podobném duchu bychom dostali i s použitím Čebyševovy nerovnosti, která říká, že libovolná veličina se odchýlí o a směrodatných odchylek s pravděpodobností nejvýše $1/a^2$. Pointa je, že s předpokladem nezávislosti všech veličin (k použití Čebyševa by totiž stačila nezávislost po dvou) dostaneme mnohem přesnější odhad, k jehož použití nám kromě víry v centrální limitní větu stačí jen znalost střední hodnoty a rozptylu dané veličiny.

Závěr

Všudypřítomným a tajemným kopečkem skončila bonusová část posledního dílu. Vždy když si odteď koupíš kopeček zmrzliny, vzpomeň si na chladnou krásu střední hodnoty, roztaj nad definicí nezávislosti a vychutnej si sladkou příchuť zákona velkých čísel.

Doufáme, že sis čtení seriálu a řešení úloh užil(a) podobně, jako jsme si my užili psaní. Seriál pro Tebe psali Danil s Vaškem a obrázky nakreslila Hanka Pařízková. S psaním nám nesmírně pomohlo mnoho dalších PraSátek, za všechny děkujeme Hedvice, Kubovi K., Martinovi T., Michalovi, Mirkovi, Pepovi T., Radovi a Vikimu. A hlavně děkujeme Tobě, žes dočetl(a) až sem – měj se parádně!



Návody k úlohám

1. (1) Napiš si podíl po sobě jdoucích kombinačních čísel.
(2) Napiš si podíl pravděpodobností pro n a $n+1$.

2. V obou částech využij linearitu střední hodnoty.

3. (1) Jestliže soutěžící vyřešil alespoň dvě úlohy, skončí pravděpodobně po prvním dni mezi první polovinou soutěžících. Jenže druhý den jeho umístění bude náhodné, tedy pravděpodobně horší, než první den.
(2) Výjimečně dobrý výsledek nastává s malou pravděpodobností. Je-li příští test nezávislý na předchozím, s velkou pravděpodobností dopadne hůře.
(3) Počet bouraček je do značné míry náhodný, takže vybrané zatáčky v daný rok možná jen „měly smůlu“ a příští rok v nich pak pravděpodobně již k tolika haváriím nedojde.

4. Podobně jako v příkladu se špačky nastane rovnost jen tehdy, když daná veličina může nabývat pouze jedné nezáporné hodnoty.

Pro druhou část stačí uvážit veličinu, která nabývá pouze hodnot $-1, 0$, a k ní vhodnou hodnotu a.

5. (1) Postupuj od nejmenší možné hodnoty X po největší až do chvíle, kdy pravděpodobnost, že X je nejvýše x, přesáhne jednu polovinu. Dané x je pak medián.

(2) Použij Markovovu nerovnost pro $c = 2$.

9. (1) Postupuj stejně jako pro $n = 2$, neboj se představit si roznásobení n zárovek.

(2) Pro součet použij linearitu střední hodnoty, pro součin předchozí bod.

10. Dosaď do vzorečku a vzpomeň, že $\mathrm{E}(X + a) = \mathrm{E}(X) + a$ a $\mathrm{E}(bX) = b\mathrm{E}(X)$.

13. Vyjde postupně 2, 3 a 1. Pokud $\mathrm{P}(X = i) = p_i$, musí ve všech podúlohách platit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Známe-li $\mathrm{E}(X)$, respektive $\mathrm{Var}(X)$, známe hodnotu výrazů $\sum_{i=1}^{n} ip_i$, respektive $\sum_{i=1}^{n} i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{n} ip_i)^2$. Pro důkaz toho, že jsou čísla jednoznačně určena pro daná n, můžeme využít v prvních dvou částech jednoznačnosti řešení jisté soustavy lineárních rovnic. Pro důkaz maximality stačí najít dvě náhodné veličiny nabývající $n + 1$ hodnot, které mají stejný rozptyl či střední hodnotu.

15. Postupuj jako v předchozím tvrzení a neboj se roznásobit výraz $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2$.

16. Dosaď do Čebyševovy nerovnosti, zvol a tak, aby vyšla pravá strana.

17. Pro první část stačí použít, že $\binom{n}{n/2}$ je největší z $n+1$ čísel, která se dohromady sečtou na 2^n.

(1) Použij Čebyševovu nerovnost s $a = 2$ (ale fungují i jiné hodnoty), abys dokázal(a), že součet kombinačních čísel mezi $n/2 - \sqrt{n}$ a $n/2 + \sqrt{n}$ je velký. Poté použij, že $\binom{n}{n/2}$ je ze všech sčítanců ten největší.

(2) Umocni druhou nerovnost na druhou a porovnej výrazy.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) Z linearity střední hodnoty plyne $\mathrm{E}(R_n) = 10 + \mathrm{E}(A_{11}) + \cdots + \mathrm{E}(A_n) - n/2 = 10 + (n - 10)/2 - n/2 = 5$.

(2) Z linearity střední hodnoty plyne $\mathrm{E}(P_n) = \frac{10+\mathrm{E}(A_{11})+\cdots+\mathrm{E}(A_n)}{n/2} = \frac{n+10}{n}$. Porovnáním po sobě jdoucích výrazů spočítáme, že $\mathrm{E}(P_n) - \mathrm{E}(P_{n+1}) > 0$, tedy $\mathrm{E}(P_n) > \mathrm{E}(P_{n+1})$.

6. Každá příchuť má poloviční pravděpodobnost, že si ji dané dítě vybere. Protože si děti vybírají nezávisle, má proto každá příchuť pravděpodobnost $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, že si ji nikdo nevybere. Zavedeme si pro každou hodnotu indikátorovou proměnnou, která říká, zda si čokoládu nikdo nevybral. Z linearity střední hodnoty pak plyne, že střední počet nevybraných příchutí je $\frac{320}{32} = 10$. Dosazením $c = 2$ do Markovovy nerovnosti dostáváme, že nevybraných příchutí je alespoň dvacet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

8. (1) Vzhledem k nezávislosti hodů to je součin obou středních hodnot, tedy $\frac{1+2+5+10+20+50}{6} \cdot \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 51 + \frac{1}{3}$ Kč.

(2) Veličiny již nyní nejsou nezávislé. Střední hodnota jejich součinu je $\frac{1}{6} \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + \cdots + 6 \cdot 50) = 76 + \frac{2}{3}$ Kč.

11.

$$\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = \frac{1}{2}(0 + n^2) - \left(\frac{1}{2}(0 + n)\right)^2 = \frac{1}{4}n^2.$$

12. Protože $\mathrm{Var}(X)$ je střední hodnotou nezáporné veličiny $(X - \mathrm{E}(X))^2$, je vždy nezáporný – proto $\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \geq 0$, což je požadovaná nerovnost. Aby byl rozptyl nulový, musí být všechny členy $(x - \mathrm{E}(X))^2$ nulové, tedy pro všechna x z oboru hodnot musí být $x = \mathrm{E}(X)$, tedy náhodná veličina může nabývat pouze jedné hodnoty (a není tak moc náhodná).

14. Máme $\mathrm{Var}(O) = \mathrm{Var}(P) = \mathrm{E}(O^2) - \mathrm{E}(O)^2 = \mathrm{E}(O) - \mathrm{E}(O)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Dále $\mathrm{Var}(O+O) = \mathrm{Var}(2O) = 4\mathrm{Var}(O) = 1$ a $O + P$ je veličina, která vždy nabývá stejné hodnoty, takže její rozptyl je nula.

18. (1) Nejprve náhodně zvolíme jeden z konců tětivy X a vepíšeme do k rovnostranný trojúhelník XAB, čímž kružnici rozdělíme na tři stejně dlouhé oblouky. Délka tětivy bude větší než jedna právě tehdy, když její druhý konec bude ležet na kratším oblouku AB. Tento oblouk tvoří třetinu obvodu kružnice, a proto je pravděpodobnost tohoto jevu $\frac{1}{3}$.

(2) Vepíšeme-li do kružnice rovnostranný trojúhelník ABC, bude střed kružnice S těžištěm trojúhelníku. Označme D střed úsečky AB. Úsečka DC je těžnice, kterou těžiště S dělí v poměru $1 : 2$. Vzdálenost DS je tedy rovna polovině poloměru kružnice.

Zvolíme-li náhodný bod tak, že jeho vzdálenost od S bude přesně polovinou poloměru kružnice, bude délka odpovídající tětivy přesně 1. Bude-li zvolený bod dál, bude tětiva kratší, a bude-li blíž, bude delší. Tětiva bude delší než jedna pro jevy odpovídající bodům v kruhu se středem v S a poloměrem polovičním oproti původní kružnici. Obsah tohoto obrazce je jednou čtvrtinou celkového obsahu.

(3) Na úhlu pochopitelně nezáleží. Tětiva bude delší než jedna právě tehdy, když zvolíme vzdálenost od středu větší než polovina poloměru (viz předchozí bod), což nastane v půlce případů.

(4) V jistém smyslu jsou správné všechny tři přístupy. Záleží na tom, co myslíme „náhodnou tětivou". Rozdíl mezi přístupy se dá ilustrovat na druhé a třetí podúloze, kde vlastně vybíráme náhodný bod uvnitř kruhu a testujeme, zda je jeho vzdálenost od středu menší než polovina poloměru. Takové body leží v kružnici se stejným středem a polovičním poloměrem, která má proto čtvrtinový obsah.

Když ale vybíráme náhodný bod tak, že si náhodně zvolíme jeho vzdálenost od středu, bude tato vzdálenost menší než polovina poloměru s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Rozdíl mezi druhým a třetím způsobem tak je ten, že třetí v jistém smyslu preferuje body blízko středu nad body blízko okraje kruhu, zatímco ten druhý se chová ke všem stejně.

Výsledky podzimní části

	jméno	příjmení	r.	škola	1p	2p	3p	4p	1s	celkem	hist.
1.	*Eva*	*Feldbabelová*	1	KGTřebíč	22	25	24	23	13	**107,78**	108
2.	*Magdaléna*	*Mišinová*	2	GKepleraPH	24	25	24	23	11	**106,75**	314
3.	*Michal*	*Beránek*	1	GVoděraPH	23	22	24	21	15	**104,14**	557
4.	*Matěj*	*Doležálek*	4	G Humpolec	25	25	25	14	15	**104,08**	735
5.	*Klára*	*Churá*	2	GNerudCheb	23	22	21	20	15	**101,17**	284
6.	*Adam*	*Křivka*	3	CMGPgBrno	22	25	23	20	10	**101,06**	288
7.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	2	GZborovPH	21	24	21	21	11	**97,89**	304
8.	*Radek*	*Olšák*	4	GMensaPH	21	25	20	17	15	**97,61**	761
9.	*Lucia*	*Kvasničková*	0	GFGLorBA	22	24	23	15	13	**97,49**	97
10.	*Zdeněk*	*Pezlar*	1	GJarošeBO	24	21	23	19	10	**97,40**	97
11.	*Kryštof*	*Pravda*	1	GMensaPH	23	25	23	18	9	**97,12**	97
12.	*Josef*	*Minařík*	4	GJarošeBO	25	25	13	19	15	**96,94**	500
13.	*Matej*	*Hanus*	3	GPošKošice	25	22	22	16	11	**96,93**	97
14.	*Vašek*	*Janáček*	2	GJarošeBO	23	16	22	21	15	**96,60**	97
15.	*Tomáš*	*Sourada*	4	G Žamberk	21	23	23	19	10	**96,00**	96
16.	*Jonáš*	*Havelka*	3	G Jírov ČB	22	19	21	24	9	**95,99**	294
17.	*Dominik*	*Stejskal*	4	G Krnov	25	22	20	20	9	**95,63**	272
18.	*Tomáš*	*Flídr*	1	G Kojetín	22	15	24	18	15	**94,13**	219
19.	*Kateřina*	*Panešová*	3	G Teplice	22	17	22	19	11	**89,81**	228
20.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	3	GJHroncaBA	25	22	19	16	8	**89,50**	696
21.	*Ondřej*	*Mišina*	4	SGFryčovPH	22	23	23	10	10	**88,54**	89
22.	*Jakub*	*Parada*	3	G Gröss BA	22	24	15	23	3	**86,62**	426
23.	*Lenka*	*Kopfová*	4	MendelG OP	20	21	17	14	15	**86,48**	746
24.	*Ondřej*	*Krabec*	4	G KomHavíř	23	19	19	11	15	**86,47**	438
25.	*Klára*	*Pernicová*	2	GJarošeBO	19	19	21	19	9	**86,17**	244
26.	*Petr*	*Hladík*	1	GMikul23PL	22	23	19	21	–	**85,80**	86
27.	*Jan*	*Kaifer*	3	GKepleraPH	19	14	19	19	13	**85,78**	282
28.	*Mikuláš*	*Brož*	2	GNadŠtolPH	21	19	21	16	7	**84,10**	258
29.	*Petr*	*Khartskhaev*	2	PORG PH	22	21	20	13	7	**81,42**	279
30.	*Tomáš*	*Hulla*	2	GTajBanBys	21	21	19	13	–	**73,80**	132
31.	*Martin Albert*	*Gbúr*	3	GPošKošice	18	18	18	8	11	**73,68**	74
32.	*Daniel*	*Perout*	2	GJarošeBO	15	13	19	18	7	**72,55**	73
33.	*Alan*	*Hübsch*	1	GKepleraPH	19	22	16	15	–	**72,21**	72
34.	*Michal*	*Vosyka*	2	GUKlafárŽR	22	15	15	13	7	**71,98**	72
35.	*Denisa*	*Hanušková*	1	G VelMeziř	22	19	18	14	–	**71,91**	72
36.	*Markéta*	*Hanušková*	1	G VelMeziř	21	19	18	13	–	**70,16**	70
37.	*Marek*	*Pišťák*	1	GHeyrovPH	18	18	17	18	–	**69,93**	70
38.	*Darian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	22	11	18	12	7	**69,03**	69
39.	*Viktor*	*Materna*	3	GJarošeBO	19	14	17	4	14	**67,71**	125
40.	*Michal*	*Kupec*	3	G Písek	20	13	14	11	6	**65,56**	66
41.	*Robin*	*Palán*	1	GJarkovPH	14	13	18	8	9	**61,75**	62
42.	*Jan*	*Vavřín*	2	PORG PH	10	9	19	11	11	**61,15**	284
43.	*Diana*	*Procházková*	2	PORG PH	19	14	18	7	–	**57,95**	58
44.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	2	PORG PH	14	14	17	8	4	**57,63**	213
45.	*David*	*Klement*	3	GNadAlejPH	21	18	19	–	–	**56,95**	314
46.	*Dominik*	*Majkus*	4	GNVPlániPH	23	13	11	5	4	**56,40**	107

47.	*Jakub*	*Polák*	1	GNPražačPH	20	18	19	–	–	**56,22**	56
48.	*Martin*	*Hubata*	3	GMikul23PL	21	13	14	–	3	**51,11**	268
49.	*Josef*	*Král*	4	MendelG OP	20	13	18	–	–	**51,09**	182
50.	*Peter*	*Školník*	3	GLSaruBA	13	13	11	4	7	**50,03**	50
51.	*Radomír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	11	19	7	11	–	**48,83**	49
52.	*Karolina*	*Šedová*	0	GJNerudyPH	17	10	14	6	–	**47,99**	48
53.	*Klára*	*Hloušková*	3	G Kolín	17	15	9	6	0	**46,35**	220
54.	*Bartomiej*	*Lewandowski*	4	LicOSSWa	24	22	–	–	–	**46,27**	46
55.	*Ondřej*	*Macháč*	3	GStrážnice	18	10	15	3	–	**45,39**	97
56.	*Lenka*	*Poljaková*	0	GJŠkodyPŘ	22	10	13	–	–	**44,78**	45
57.	*Ludmila Hana*	*Houfková*	2	GMHS	19	15	9	–	–	**43,35**	73
58.	*Nikol*	*Krejčí*	3	PORG PH	17	13	11	–	–	**40,83**	96
59.	*Matěj*	*Holubička*	3	G Hořice	15	6	14	5	–	**40,62**	97
60.	*Samuel*	*Krajči*	4	GAlejKošic	21	20	–	–	–	**40,25**	299
61.	*Martin*	*Zimen*	4	GJMasar JI	18	21	–	–	–	**39,41**	507
62.	*Timea*	*Szöllsová*	3	G Gröss BA	18	13	7	–	–	**37,95**	111
63.	*Anna*	*Musilová*	3	PORG PH	3	6	12	8	8	**37,18**	222
64.	*Alžběta*	*Manová*	4	G UherBrod	13	12	4	5	3	**37,09**	191
65.	*Miroslav*	*Horský*	4	GČeskoliPH	10	14	13	–	–	**37,00**	37
66.	*Jan*	*Šuráň*	1	GŠpitálsPH	19	18	–	–	–	**36,98**	37
67.	*Klára*	*Zemanová*	2	PORG PH	9	9	18	–	–	**36,44**	95
68.	*Matěj*	*Krátký*	3	PORG PH	18	17	–	–	–	**34,90**	182
69.	*Kateřina*	*Charvátová*	4	GBNěmcovHK	13	8	13	–	–	**34,44**	324
70.	*Kateřina*	*Pazderová*	3	SŠMŠLit	11	8	7	8	0	**34,18**	34
71.	*Veronika*	*Borýsková*	4	GJarošeBO	19	7	3	5	–	**34,00**	34
72.	*David*	*Beinhauer*	4	MendelG OP	15	15	–	–	–	**30,50**	189
73.	*Daniel*	*Novotný*	2	PORG PH	7	8	15	0	–	**29,98**	30
74.	*Petr*	*Sochor*	4	GJarošeBO	19	6	–	3	–	**28,00**	28
75.	*Vojtěch*	*Lejsek*	4	GČeskoliPH	15	–	12	–	–	**27,00**	27
76.	*Erika*	*Kojdová*	2	GNámestovo	12	7	8	–	0	**26,82**	27
77.	*Johana*	*Dvořáková*	4	G Trutnov	11	7	8	–	–	**26,78**	82
78.	*Václav*	*Verner*	0	PORG PH	–	8	10	0	8	**26,77**	27
79.	*Matěj*	*Jerhot*	3	GJirsíkaČB	–	–	15	–	10	**25,79**	26
80.	*Júlia*	*Sirotiaková*	2	GRimSob	5	9	5	5	–	**25,29**	25
81.	*Agáta*	*Štrosová*	1	GZborovPH	14	11	–	–	–	**25,19**	25
82.	*Karel*	*Balej*	4	G Rokycany	19	5	–	–	–	**24,89**	80
83.	*Jáchym*	*Mierva*	2	GUKlafárŽR	–	–	12	–	12	**23,82**	24
84.	*Jakub*	*Devát*	1	GJarošeBO	15	8	–	–	–	**23,37**	23
85.	*Jan*	*Nekarda*	3	GUHradiště	–	11	–	13	–	**23,15**	121
86.	*Tomáš*	*Cepko*	4	GAnMeTr	8	10	3	2	–	**23,00**	23
87.	*Alexandra*	*Rosenbergová*	1	GJarošeBO	14	–	8	–	–	**22,29**	22
88.	*Václav*	*Pavlíček*	3	SPŠElek PA	13	8	–	–	–	**21,47**	21
89.	*Suzan*	*Catay*	4	GHeyrovPH	18	3	–	–	–	**21,00**	21
90.	*Aleš*	*Papáček*	2	G Třeboň	15	5	–	–	–	**20,32**	20

Zbytek výsledkové listiny nalezneš na našem webu: mks.mff.cuni.cz/vysledky

1. jarní série – Váhy

Výsledková listina

	Jméno	Příjmení	r.	Škola	1 2 3 4 5 6 7 8	re±im	celkem
1.	*Eva*	*Feldbabelová*	1	KGTřebíč	3 3 3 5 5 5 – 3	21	**23,42**
2.	*Vašek*	*Janáček*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	**22,79**
3.	*Lucia*	*Kvasničková*	0	GFGLorBA	3 3 3 4 – 5 – 0	18	**22,66**
4.	*Petr*	*Hladík*	1	GMikul23PL	3 3 3 3 5 5 – –	19	**22,43**
5.	*Kryštof*	*Pravda*	1	GMensaPH	3 3 3 4 5 0 0 –	18	**21,88**
6.	*Michal*	*Beránek*	1	GVoděraPH	3 3 – 5 5 0 2 4	20	**21,40**
7.	*Klára*	*Pernicová*	2	GJarošeBO	3 3 3 3 5 5 – –	19	**20,92**
8.	*Klára*	*Churá*	2	GNerudCheb	3 3 3 3 5 5 – –	19	**20,82**
9.	*Tomáš*	*Flídr*	1	G Kojetín	3 3 3 3 5 0 0 –	17	**20,60**
10.	*Jonáš*	*Havelka*	3	G Jírov ČB	3 3 3 0 5 0 2 5	19	**19,30**
11.	*Jan*	*Nekarda*	3	GUHradiště	3 3 3 4 5 0 – –	18	**19,23**
12.	*Martin Albert*	*Gbúr*	3	GPošKošice	3 3 3 3 5 – – –	17	**19,00**
13.	*Jan*	*Vavřín*	2	PORG PH	3 3 2 3 5 – 0 –	16	**18,16**
14.	*Jan*	*Brada*	2	CírkGPlzeň	3 3 3 5 – – – –	14	**17,77**
15.–16.	*Markéta*	*Hanušková*	1	G VelMeziř	3 3 3 2 – 0 1 –	12	**17,70**
15.–16.	*Denisa*	*Hanušková*	1	G VelMeziř	3 3 2 3 – 0 1 –	12	**17,70**
17.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	2	GZborovPH	3 3 3 3 3 0 0 –	15	**17,39**
18.	*Karolina*	*Šedová*	0	GJNerudyPH	3 3 1 – 3 – – –	10	**17,36**
19.	*Diana*	*Procházková*	2	PORG PH	3 – 3 2 5 – 0 –	13 + *i*	**17,14**
20.	*Darian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 2 0 5 0 – –	13	**16,90**
21.	*Jakub*	*Parada*	3	G Gröss BA	3 3 3 1 5 – – 3	17 + *i*	**15,94**
22.	*Mikuláš*	*Brož*	2	GNadŠtolPH	3 3 3 4 – 0 – –	13	**15,79**
23.	*Tomáš*	*Hulla*	2	GTajBanBys	3 3 3 0 3 – – –	12	**15,62**
24.	*Adam*	*Křivka*	3	CMGPgBrno	1 3 3 3 5 0 – –	15	**15,55**
25.	*Kateřina*	*Panešová*	3	G Teplice	3 3 3 5 – – – –	14	**15,16**
26.–29.	*Alan*	*Hübsch*	1	GKepleraPH	3 3 3 0 – – – –	9	**14,89**
26.–29.	*Peter*	*Kochelka*	1	GTajBanBys	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
26.–29.	*Vendula*	*Onderková*	1	GJŠkodyPŘ	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
26.–29.	*Zdeněk*	*Pezlar*	1	GJarošeBO	3 3 3 0 – 0 – –	9	**14,89**
30.	*Magdaléna*	*Mišinová*	2	GKepleraPH	3 3 3 3 – 0 – –	12	**14,60**
31.	*František*	*Kmječ*	3	G Brandýs	3 3 3 3 – – – –	12	**14,47**
32.	*Daniel*	*Perout*	2	GJarošeBO	3 3 3 – – – 1 –	10	**14,05**
33.	*Marek*	*Pišťák*	1	GHeyrovPH	3 0 0 5 – – – –	8	**13,81**
34.	*Matěj*	*Holubička*	3	G Hořice	3 3 3 2 – – 0 –	11	**13,01**
35.	*Filip*	*Sedláček*	2	GSRandyJN	3 – 1 0 5 – 0 –	9	**13,00**
36.	*Robin*	*Palán*	1	GJarkovPH	3 1 2 1 0 0 – –	7	**12,64**
37.–38.	*Jan*	*Kaifer*	3	GKepleraPH	3 3 3 3 – – – –	12	**12,45**
37.–38.	*Michal*	*Kupec*	3	G Písek	3 3 3 1 – – – –	10	**12,45**
39.	*Tomáš*	*Sourada*	4	G Žamberk	3 3 3 – – – – 3	12	**12,00**

40.	*Dominik*	*Stejskal*	4	G Krnov	3 3 3 5 – – – –	14	**11,93**
41.–43.	*Daniel*	*Novotný*	2	PORG PH	3 0 2 3 – 0 – –	8	**11,89**
41.–43.	*Júlia*	*Sirotiaková*	2	GRimSob	3 3 2 – – – – –	8	**11,89**
41.–43.	*Martin*	*Svatoň*	2	GZborovPH	3 3 2 0 – – 0 –	8	**11,89**
44.	*Petr*	*Khartskhaev*	2	PORG PH	3 3 3 0 – – – –	9	**11,60**
45.	*Radomír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	3 – – 3 – – – –	6	**11,38**
46.	*Ondřej*	*Macháč*	3	GStrážnice	3 3 3 0 – – – –	9	**10,96**
47.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	2	PORG PH	2 3 3 0 – 0 0 –	8	**10,81**
48.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	3	GJHroncaBA	3 3 3 5 – 0 – –	14	**10,41**
49.	*Kateřina*	*Vokálová*	3	G Kolín	3 3 2 – – 0 0 –	8	**10,30**
50.–51.	*Veronika*	*Borýsková*	4	GJarošeBO	3 3 3 – – – 1 –	10	**10,00**
50.–51.	*Petr*	*Sochor*	4	GJarošeBO	3 3 3 1 – – – –	10	**10,00**
52.	*Michal*	*Vosyka*	2	GUKlafárŽR	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
53.	*Kateřina*	*Pazderová*	3	SŠMŠLit	3 3 1 – – – 0 –	7	**9,17**
54.	*Klára*	*Zemanová*	2	PORG PH	0 3 3 – – – – –	6	**9,09**
55.	*Josef*	*Král*	4	MendelG OP	3 3 3 0 – – 1 –	10	**8,45**
56.–57.	*Klára*	*Chobotová*	0	GJNerudyPH	3 – – – – – – –	3	**8,34**
56.–57.	*Václav*	*Verner*	0	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**8,34**
58.	*Dominik*	*Majkus*	4	GNVPlániPH	3 3 3 – – – – –	9	**8,32**
59.	*Agáta*	*Žižková*	2	PORG PH	2 – 3 – – – – –	5	**8,17**
60.	*Viktor*	*Materna*	3	GJarošeBO	3 – 3 – – – – –	6	**7,59**
61.	*Vojtěch*	*Šára*	4	PORG PH	3 – 3 2 – – – –	8	**7,20**
62.	*Michal*	*Chudoba*	4	GLitoměřPH	3 3 3 – – – – –	9	**6,82**
63.	*Klára*	*Hloušková*	3	G Kolín	3 3 0 0 – 0 – –	6	**6,57**
64.	*Jan Antonín*	*Musil*	2	PORG PH	2 0 2 – – – – –	4	**6,43**
65.	*Vojtěch*	*Turland*	3	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**4,23**
66.	*Nikol*	*Krejčí*	3	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**3,97**
67.	*Jan*	*Vondra*	3	G TýnNVlt	3 – – – – – – –	3	**3,94**
68.	*Tomáš*	*Cepko*	4	GAnMeTr	2 – – – – – – –	2	**2,00**
69.	*Matěj*	*Doležálek*	4	G Humpolec	– – – 0 – – – –	0	**0,00**

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*