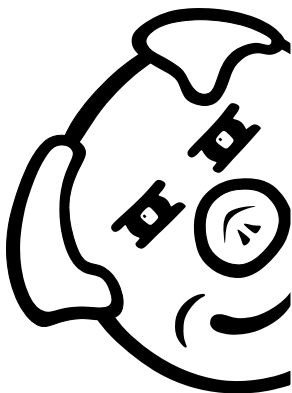


Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !



Právě máš před sebou druhé komentáře 38. ročníku. Spolu s rokem 2018 se ke konci pomalu chýlí i podzimní část semináře. V tomto sešitu tak najdeš vzorová řešení druhé a třetí podzimní série a první seriálové série. Jedna podstatná část tu ale přece jenom chybí – anglická série, která má termín odeslání až **7. ledna**. Dosavadní výkony (prozatímní výsledky nalezneš na konci komentářů) jsou velmi vyrovnané a pořadí těsné a stále je tak příležitost poprat se o místa na jarním soustředění, na které tradičně zveme několik nejlepších řešitelů z první, tj. podzimní, půlky ročníku.

Pokud Ti podzimní část nevyšla podle představ, nezoufej. Jarní část semináře je za dveřmi a s ní přichází spousta nových úloh a možnost zajistit si mimo jiné i účast na podzimním soustředění příští rok. V první jarní serii Tě čeká kombinatorické téma **Váhy** a ve druhé jarní serii se naopak budeš moct s tématem **Tečny** ponořit do tajů geometrie. Připravili jsme pro Tebe i úvodní text, který by Ti měl osvětlit používané techniky.

Rovněž je napsán druhý díl **seriálu o pravděpodobnosti**, kde se tentokrát můžeš dočíst třeba o pravděpodobnostní metodě a náhodných veličinách. K němu samozřejmě přísluší i tři soutěžní úlohy, které se dají hravě vyřešit se znalostmi nabytými z přečtení seriálu.

Hoďte úspěchu a příjemné řešení semináře za organizátory přeje

Martin Raška

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Úvodní text k druhé jarní serii „Obvodové a úsekové úhly“
- Seriál – Pravděpodobnost II. – Žádné věže
- Výsledkové listiny
- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1



matfyz

Náboj

Mezinárodní týmová matematická soutěž Náboj se příští rok uskuteční v pátek 22. března, a to hned v osmi různých zemích a dohromady 16 evropských městech. Podrobnosti najdeš na stránkách Náboje¹, důležité pro Tebe ale je, že přihlašování se spouští za dva měsíce, v pondělí 18. února. Rozhodně je tedy dobré začít se poohlízet po nějakém týmu, protože plno bývá rychle a zájem veliký. Ne každý den se koná takováto mimořádná událost na níž řeší zároveň několik set lidí matematické úlohy. A když už se jednou za rok koná, to si ji přece nemůžeš nechat ujít!

Soustředění

Pro čtyřicet nejlepších z podzimní části letošního ročníku (která končí anglickou sérií) uspořádáme v termínu 20.–28. dubna soustředění. Místo ještě není známé, ale určitě se máte na co těšit.

¹<https://math.naboj.org/>

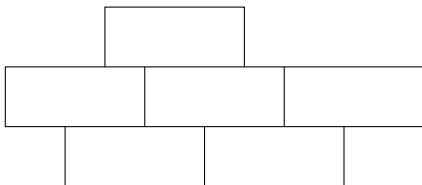
Obdélníky a čtverce

2. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Viki si koupil šest shodných obdélníkových dlaždiček o obvodu 38 cm a spojil je do jednoho obrazce znázorněného na obrázku. Jaký obvod má výsledný útvar?



(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:

Všech šest dlaždiček má dohromady dvanáct delších a dvanáct kratších stran. Z obrázku je jasné vidět, že se vzájemně dotýkají třemi kratšími stranami. Dále se překrývají i třemi delšími stranami, neboť k prostřednímu řádku je shora přilepena jedna a zdola dvě dlaždičky. Každý dotek ale musíme uvážit dvakrát, protože zabírá stejnou délku na dvou dlaždičkách. Zbývá tedy $12 - 3 \cdot 2 = 6$ viditelných delších a stejný počet kratších stran dlaždiček. Protože obvod obdélníku o stranách a , b spočítáme jako $o = 2(a + b)$, je celkový obvod obrazce roven $3 \cdot 38 = 114$.

POZNÁMKY:

Úloha byla natolik jednoduchá, že nevyžadovala žádné podrobné vysvětlování. Výjimečně se někdo spletl v násobení či vzorečku pro obvod obdélníku, jinak jsem udělovala jen plné počty bodů.

(Bára Kociánová)

Úloha 2.

Obdélník $ABCD$ má strany o délkách $|AB| = 4$ a $|AD| = 2$. Na úsečce AB leží bod P tak, že $|AP| = 1$. Ukažte, že přímka DP je kolmá na AC .

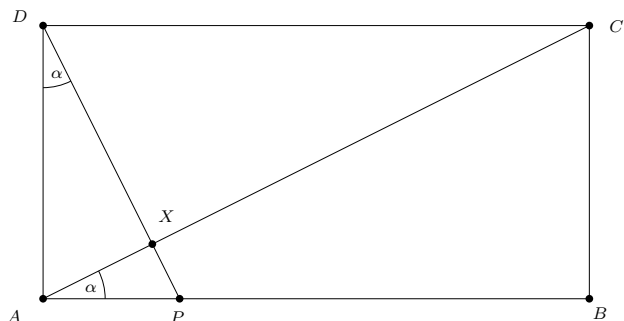
(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Označme X průsečík AC a DP . Trojúhelníky ABC a DAP jsou podobné podle věty *sus*, protože $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{|AD|}{|AP|}$ a zároveň $|\angle ABC| = |\angle DAP|$. Označme $\alpha = |\angle BAC| = |\angle ADP|$. U vrcholu A je v obdélníku pravý úhel, pomocí něhož vyjádříme velikost $|\angle CAD| = 90^\circ - \alpha$. Ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku AXD dopočítáme velikost úhlu AXD :

$$\begin{aligned}\alpha + (90^\circ - \alpha) + |\angle AXD| &= 180^\circ, \\ |\angle AXD| &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Přímka AC je tedy kolmá na přímkou DP .



POZNÁMKY:

Velká část řešitelů postupovala stejně nebo podobně jako vzorové řešení a ti si tím vysloužili plný počet bodů. Často opakovanou chybou, za kterou jsem ale body nestrhával, byl zápis podobnosti trojúhelníků. Vrcholy píšeme v tom pořadí, v jakém si odpovídají. Tedy v této úloze byl správně pouze zápis $\triangle ABC \sim \triangle DAP$, protože úhel u vrcholu A odpovídá úhlu u vrcholu D , úhel u B úhlu u A , úhel u C úhlu u P a podobně pro strany. Jiná pořadí zápisu vrcholů správně nejsou, například neplatí $\triangle ABC \sim \triangle APD$, protože úhly u vrcholu A se v obou trojúhelnících liší.

Také se sešlo mnoho řešení využívajících goniometrické funkce. Tento postup ale většinou není příliš dobrý, protože úhly nedokážeme spočítat přesně a musíme je zaokrouhlit. Přestože je součet zaokrouhlených úhlů roven 90° , neznamená to nutně, že součet bude stejný pro velikostí nezaokrouhlených úhlů. Podobná řešení tedy většinou mnoho bodů nezískala. (Michal Töpfer)

Úloha 3.

V tabulce 8×8 je začerněno sedm políček. Najděte největší a takové, že v obrazci budeme vždy schopni najít nezačerněný obdélník² složený z alespoň a políček, ať už byla začerněná kterákoliv sedmice.

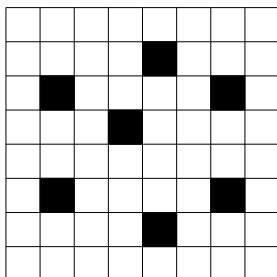
(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Protože je začerněných políček sedm a tabulka má osm řádků, tak jeden ze sloupců je určité prázdný. Tím dostáváme obdélník o obsahu 8.

Zároveň při začernění jako na obrázku nelze najít obdélník o větším obsahu, který neobsahuje začerněný čtvereček.

Proto je odpověď 8.



²Čtverec také považujeme za obdélník.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla víceméně jako řešení vzorové. Někteří k úloze přistupovali způsobem „které začernění bude zjevně nejhorší“. Žádné z takto „zjevně“ nejhorších začernění nejhorší nebylo.

(Rado van Švarc)

Úloha 4.

Uvnitř obdélníku $ABCD$ o obsahu S se nachází bod P . Ukažte, že

$$|PA| \cdot |PB| + |PC| \cdot |PD| \geq S.$$

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

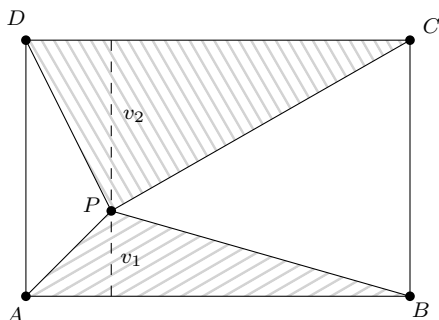
Nejprve si uvědomme, že součet obsahů trojúhelníků ABP a CDP je roven $S/2$: Označme v_1 výšku v trojúhelníku ABP na stranu AB a v_2 výšku v trojúhelníku CDP na stranu CD . Pak máme $v_1 + v_2 = |BC|$, a tedy

$$S_{ABP} + S_{CDP} = \frac{|AB| \cdot v_1}{2} + \frac{|CD| \cdot v_2}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{S}{2}.$$

Dále dokážeme nerovnosti $|PA| \cdot |PB| \geq 2S_{ABP}$ a $|PC| \cdot |PD| \geq 2S_{CDP}$. Platí, že výška v trojúhelníku není delší než strana, která s ní sdílí vrchol. Potom tedy, pokud v_{PA} je výška v trojúhelníku ABP na stranu PA , máme $S_{ABP} = |PA| \cdot v_{PA}/2 \leq |PA| \cdot |PB|/2$. Po vynásobení dvěma dostaneme první nerovnost. Druhá nerovnost je obdobná, stačí jen místo trojúhelníku ABP uvažovat trojúhelník CDP .

Nakonec tedy máme

$$|PA| \cdot |PB| + |PC| \cdot |PD| \geq 2S_{ABP} + 2S_{CDP} = 2 \cdot \frac{S}{2} = S.$$



POZNÁMKY:

Šelo se mnoho správných řešení. Velká část z nich používala stejný argument jako vzorové řešení (někdy s drobnou úpravou doplněním trojúhelníku ABP resp. CDP na rovnoběžník, aby se nemuselo dělit dvěma). Dále mnoho řešitelů argumentovalo podobně, ale o něco rychleji použitím následující vzorce. Platí $2S_{ABP} = |AP| \cdot |BP| \cdot \sin \angle APB$, pak stačí jen použít fakt $0 < \sin \angle APB \leq 1$.

Pár řešitelů se rozhodlo použít AG nerovnost, což je vcelku originální přístup k této úloze – jen někteří však tento postup dotáhli do úspěšného konce.

(Tonda Češík)

Úloha 5.

Áďa našla konvexní mnohoúhelník M a délku h . Nad každou stranou mnohoúhelníku nakreslila obdélník s druhou stranou délky h , který je namířený dovnitř mnohoúhelníku. Všimla si, že součet obsahů všech těchto obdélníků je roven dvojnásobku obsahu M . Ukažte, že tyto obdélníky určité pokrývají M .

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Označme vrcholy mnohoúhelníku postupně X_1 až X_n , pak strany M jsou úsečky $X_i X_{i+1}$ (indexy bereme modulo n , tedy vrcholem X_{n+1} myslíme X_1).

Pro spor předpokládejme, že existuje bod B , který není pokrytý žádným obdélníkem. Vezměme stranu $X_i X_{i+1}$ nejbližší k B a uvažujme kolmici k z bodu B na $X_i X_{i+1}$, její patu označme P . Pokud by P neležela na úsečce $X_i X_{i+1}$, musela by k protnout další stranu, předtím než protne $X_i X_{i+1}$. To by ale znamenalo, že tato strana je k B blíže. Bod P proto leží na úsečce $X_i X_{i+1}$. Aby tedy B nebyl pokryt žádným obdélníkem, musí být vzdálen od nejbližší strany více než h .

Pro každou stranu $X_i X_{i+1}$ a bod B vytvoříme trojúhelník $X_i X_{i+1} B$. Jelikož M je konvexní, pro žádná $i \neq j$ se $X_i X_{i+1} B$ a $X_j X_{j+1} B$ nepřekrývají. Navíc jsou uvnitř M a vyplňují plochu M .

Jestliže v_i je vzdálenost B a $X_i X_{i+1}$ a S je obsah M , potom $\sum_{i=1}^n \frac{v_i \cdot |X_i X_{i+1}|}{2} = S$, protože trojúhelníky $X_i X_{i+1} B$ vyplňují plochu M a obsah jednoho spočítáme jako polovina výšky krát strana. Pro každé i platí $v_i > h$, tedy

$$\sum_{i=1}^n \frac{h \cdot |X_i X_{i+1}|}{2} < \sum_{i=1}^n \frac{v_i \cdot |X_i X_{i+1}|}{2} = S,$$

což je spor, ze zadání víme, že $\sum_{i=1}^n h \cdot |X_i X_{i+1}| = 2S$.

POZNÁMKY:

Většina z vás úlohu zvládla a nejčastěji použila argument $v_i > h$ či jeho obdobu. Nepsali jste však pro tento argument tak podrobnou argumentaci, jako je v druhém odstavci vzorového řešení. Obešlo se to bez ztráty bodů, ale příště si dávejte pozor.

(Adéla Kostecká)

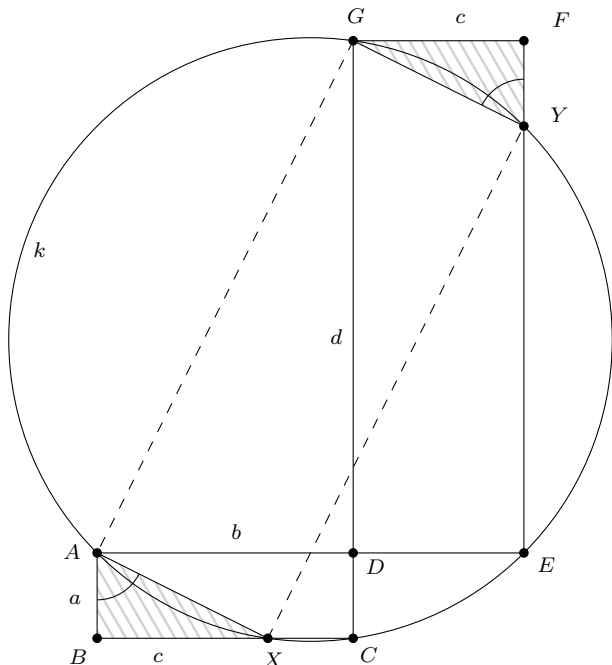
Úloha 6.

Honza si vyrobil dvojici obdélníků $ABCD$ a $DEFG$ takovou, že úsečky AE a CG obě procházejí bodem D a čtyřúhelník $ACEG$ je tětíkový. Druhý průsečík úsečky BC s kružnicí opsanou čtyřúhelníku $ACEG$ nazveme X a druhý průsečík úsečky EF s toutéž kružnicí označme Y . Ukažte, že obsah čtyřúhelníku $AXYG$ je roven součtu obsahů obdélníků $ABCD$ a $DEFG$.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Nejdříve ukážeme, že $AXYG$ je obdélník. Označme kružnici opsanou šestiúhelníku $AXCEYG$ k . Protože $\angle A E Y = \angle D E F = 90^\circ$, je AY průměr kružnice k . Obdobně protože $\angle X C G = \angle B C D = 90^\circ$, je XG také průměr kružnice k . Z toho vyplývá, že $\angle G Y X = \angle Y X A = \angle X A G = \angle A G Y = 90^\circ$, a tedy $AXYG$ je obdélník.



Nyní ukážeme, že trojúhelníky GFY a XBA jsou shodné. Platí, že $|\angle GFY| = |\angle XBA| = 90^\circ$. Dále jelikož platí $FY \parallel AB$ a $GY \parallel XA$, jsou také úhly $\angle XAB$ a $\angle GYF$ shodné. Tyto dva trojúhelníky mají dva úhly shodné, z čehož plyne, že jsou podobné. Navíc mají jednu stranu stejně dlouhou ($AXYG$ je obdélník – takže $|GY| = |AX|$) a jsou proto i shodné.

Označíme si $|AB| = |DC| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|DE| = |GF| = c$, $|DG| = |EF| = d$ a obsahy obdélníků $AXYG$, $ABCD$ a $DEFG$ označme po řadě S_{AXYG} , S_{ABCD} a S_{DEFG} . Ze shodnosti trojúhelníků GFY a XBA víme, že $|AB| = |FY| = a$ a $|BX| = |GF| = c$. Protože ADG a GFY jsou pravoúhlé trojúhelníky, můžeme vyjádřit $|AG| = \sqrt{|AD|^2 + |DG|^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$ a $|AX| = \sqrt{|AB|^2 + |BX|^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$. A poté postupnými úpravami:

$$\begin{aligned} S_{AXYG} &= |AG| \cdot |AX|, \\ S_{AXYG} &= \sqrt{b^2 + d^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}, \\ (S_{AXYG})^2 &= (b^2 + d^2) \cdot (a^2 + c^2), \\ (S_{AXYG})^2 &= b^2 a^2 + d^2 a^2 + b^2 c^2 + d^2 c^2. \end{aligned}$$

Z mocnosti bodu D ke kružnici k získáme:

$$bc = ad,$$

a po dosazení do předchozí rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} (S_{AXYG})^2 &= b^2 a^2 + dabc + dabc + d^2 c^2, \\ (S_{AXYG})^2 &= (ba + dc)^2, \\ S_{AXYG} &= (ba + dc), \\ S_{AXYG} &= S_{ABCD} + S_{DEFG}. \end{aligned}$$

A to jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:

Řešení se na šestou úlohu sešlo poměrně hodně, našlo se pár správných, krátkých a hezkých řešení, ale více dlouhých, složitých a ne vždy správných. Za důkaz, že $AXYG$ je obdélník, jsem dávala dva body, za dořešení úlohy pak zbylých tři. Několik řešitelů k úloze přistoupilo o trochu jinak: obdélníkům $ABCD$ a $DEFG$ opsali obdélník $BKFL$ a zjistili, že součet obsahů trojúhelníků XKY a ALG je roven součtu obsahů obdélníků $KEDC$ a $LADG$. Tito řešitelé zpravidla získali plný počet bodů.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 7.

V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran AB a BC v bodech X a Y . Kružnice vepsaná trojúhelníku XYB se dotýká stran XB a BY v bodech P a Q . Tyto dvě kružnice vepsané se protínají v bodech R a S tak, že P, Q, R a S leží na kružnici v tomto pořadí. Ukažte, že $PQRS$ je obdélník právě tehdy, když je poměr poloměrů těchto kružnic vepsaných roven $3 : 2$.

(Rado van Švarc)

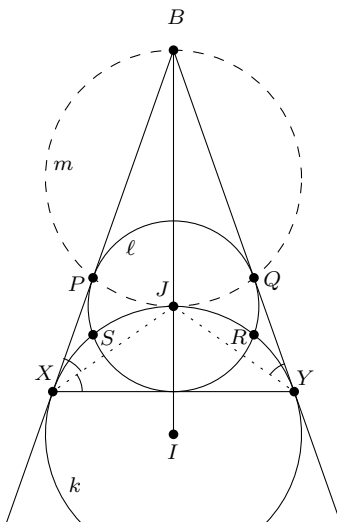
ŘEŠENÍ:

Označme kružnice vepsané ABC a XYB jako k a ℓ a jejich středy jako I a J . Protože k i ℓ jsou symetrické podle osy úhlu $\sphericalangle ABC$, je trojúhelník XYB rovnoramenný a platí $XY \parallel PQ \parallel SR$.

Protože J je střed kružnice vepsané trojúhelníku XYB , máme z rovnoramennosti trojúhelníka XYB rovnost $|\sphericalangle JXB| = |\sphericalangle JXY| = |\sphericalangle JYX|$. To ale díky úsekovým úhlům znamená, že BX je tečna ke kružnici opsané trojúhelníku XJY . Analogicky musí být BY tečna k té samé kružnici, takže tato kružnice splývá s k . Tedy J leží na k .

Protože jsou úhly $\sphericalangle JPB$ a $\sphericalangle JQB$ pravé, leží P a Q na kružnici m nad průměrem JB . Protože středy m a k leží na ose úhlu $\sphericalangle XBY$ a na ní také leží bod J , dotýkají se kružnice k a m v J .

Ukážeme, že obě zkoumaná tvrzení (tj. že $PQRS$ je obdélník a že poměr poloměrů k a ℓ je $3 : 2$) jsou ekvivalentní tomu, že k a m jsou shodné kružnice. Potom už určitě budou ekvivalentní i sobě navzájem.



Protože $PQRS$ je tětíkový lichoběžník (neboť jsme si již odvodili, že $PQ \parallel SR$), je to obdélník právě tehdy, když je symetrický podle J . Ale protože k a m jsou kružnice opsané trojúhelníkům PJQ a SJR , je $PQRS$ symetrický podle J , právě když jsou k a m symetrické podle J . Protože se

ale v J dotýkají, je to ekvivalentní tomu, že jsou shodné, což jsme chtěli. Tedy $PQRS$ je obdélník právě tehdy, když jsou k a m shodné.

Protože JB je průměr m a JI je poloměr k , jsou k a m shodné, právě když $\frac{|JI|}{|BJ|} = \frac{1}{2}$. Po přičtení jedničky dostáváme ekvivalenci s $\frac{|BI|}{|BJ|} = \frac{|BJ|+|JI|}{|BJ|} = \frac{3}{2}$. Kvůli pravým úhlům u P a X jsou trojúhelníky BPJ a BXI podobné, takže $\frac{|IX|}{|JP|} = \frac{|BI|}{|BJ|}$. Protože IX a JP jsou poloměry příslušných kružnic, získáváme skutečně, že m a k jsou shodné, právě když je poměr poloměrů k a ℓ roven $3 : 2$.

POZNÁMKY:

Řešení se sešlo vcelku mnoho, ale často nebyla správně, protože opomíjela jednu z implikací. Ze správných řešení mnohá postupovala vyjádřením dvou délek (nejčastěji $|PQ|$ a $|SR|$) pomocí poloměrů daných kružnic (někdy vcelku pěkně, někdy pomocí mnoha a mnoha goniometrie) a prohlásila, že $PQRS$ je obdélník, právě když se tyto délky sobě rovnají, z čehož dostala ekvivalentními úpravami hledaný vztah pro poloměry. (Rado van Švarc)

Úloha 8.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme (ne nutně podobné) obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$, které s daným trojúhelníkem sdílí pouze stranu. Ukažte, že osy úseček HE , DG a FI se protínají v jednom bodě.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ POMOCÍ KAMARÁDŮ³:

Označme si O_A , O_B , O_C středy kružnic opsaných trojúhelníkům AEH , BDG a CFI . Bod O_A můžeme popsat jako průsečík os stran trojúhelníku AEH , tj. úseček AE , AH a HE . Podobně O_B je průsečíkem os úseček BD , BG a DG . Navíc osy úseček AE a BD jakožto osy protějších stran obdélníku splývají. Proto je úsečka O_AO_B rovnoběžná s AB . Podobně dokážeme i $O_AO_C \parallel AC$ a $O_BO_C \parallel BC$.

Nechť je P průsečík os úseček HE a DG . Dále si označme středy stran EA , HE a HA postupně R , S , T . Protože platí $\angle ERO_A = \angle ESO_A = 90^\circ$, je čtyřúhelník $ERSO_A$ tětíkový. Z toho plyne, že $\angle RO_A S = \angle RES$. Dále pak RT je střední příčkou v trojúhelníku EAH , z čehož dostáváme $\angle SER = \angle ART$. Konečně i čtyřúhelník $TARO_A$ je tětíkový kvůli pravým úhlům u R a T . Proto platí $\angle ART = \angle AO_AT$. Dohromady pak dostáváme

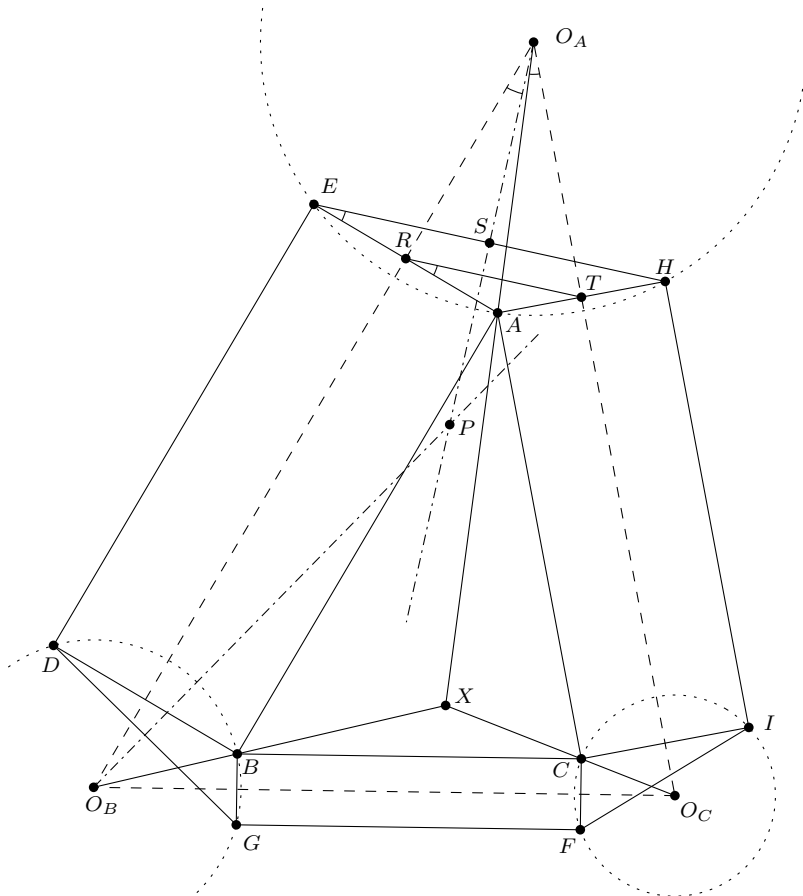
$$\angle O_BO_AP = \angle RO_AS = \angle RES = \angle AEH = \angle ART = \angle AO_AT = \angle AO_AO_C.$$

To znamená, že přímka O_AA je izogonální⁴ s osou úsečky EH v úhlu $O_BO_AO_C$. Analogicky dokážeme, že i osa DG je izogonální s O_BB a osa FI je izogonální s O_CC .

Trojúhelníky $O_AO_BO_C$ a ABC nejsou shodné a mají příslušné strany rovnoběžné, proto existuje střed stejnolehlosti X zobrazující trojúhelník ABC na $O_AO_BO_C$. Ten však musí být zároveň průsečíkem přímek O_AA , O_BB a O_CC , které se tedy protínají v X . Hledaný průsečík os úseček HE , DG a FI je proto kamarád bodu X v trojúhelníku $O_AO_BO_C$.

³Jako kamaráda překládáme takzvaný isogonal conjugate, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Isogonal_conjugate.

⁴Přímky AX a AY jsou izogonální v úhlu $\angle BAC$, pokud je AX obrazem AY podle osy úhlu $\angle BAC$.



ŘEŠENÍ POČÍTÁNÍM DÉLEK:

Nejprve dokážeme, že pro libovolný bod P v rovině a libovolný obdélník $ABCD$ platí

$$|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2.$$

Označme paty kolmic z bodu P na AB a CD postupně P_{AB} , P_{CD} . Použijeme Pythagorovu větu na trojúhelníky $PP_{AB}A$, $PP_{AB}B$, $PP_{CD}C$, $PP_{CD}D$:

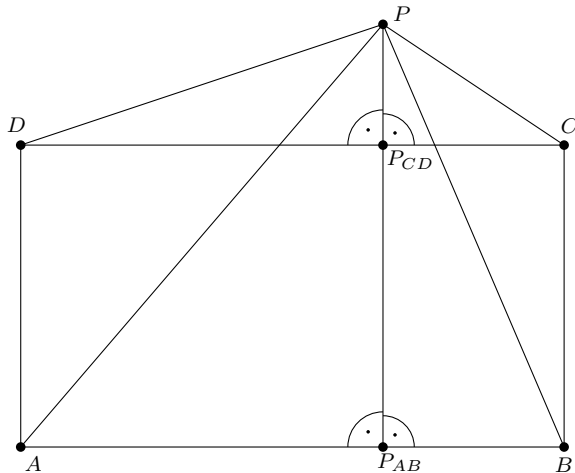
$$|PA|^2 = |P_{AB}P|^2 + |P_{AB}A|^2,$$

$$|PB|^2 = |P_{AB}P|^2 + |P_{AB}B|^2,$$

$$|PC|^2 = |P_{CD}P|^2 + |P_{CD}C|^2,$$

$$|PD|^2 = |P_{CD}P|^2 + |P_{CD}D|^2.$$

V libovolném obdélníku platí $|P_{AB}B|^2 = |P_{CD}C|^2$ a $|P_{AB}A|^2 = |P_{CD}D|^2$. Z toho snadno odvodíme, že když sečteme první a třetí rovnici, dostaneme stejnou pravou stranu, jako kdybychom sečetli druhou a čtvrtou rovnici. Proto se musí rovnat i levé strany, které tvoří dokazovanou rovnost.



Nyní použijeme naše tvrzení na libovolný bod P roviny a obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$:

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PD|^2 &= |PB|^2 + |PE|^2, \\ |PB|^2 + |PF|^2 &= |PC|^2 + |PG|^2, \\ |PC|^2 + |PH|^2 &= |PA|^2 + |PI|^2. \end{aligned}$$

Sečtením těchto tří rovnic dostáváme

$$|PD|^2 + |PF|^2 + |PH|^2 = |PE|^2 + |PG|^2 + |PI|^2.$$

Definujme nyní Q jako průsečík os úseček DG a EH . Potom platí $|QD|^2 = |QG|^2$ a $|QH|^2 = |QE|^2$. Aby platila rovnice z předchozího odstavce, musí zároveň platit i $|QF|^2 = |QI|^2$. To ale znamená, že Q leží i na ose úsečky FI , jak jsme měli dokázat.

POZNÁMKY:

K úloze se sešlo množství myšlenkově rozdílných řešení. Nejčastější chybou pak bylo, že řešitelé uvažovali trojúhelník XYZ takový, že $XYHE$, $XZDG$ a $YZFI$ jsou obdélníky. Existence takového trojúhelníku však vůbec není zřejmá a důkaz existence tvořil při tomto přístupu větší část úlohy.

(Pavel Hudec)

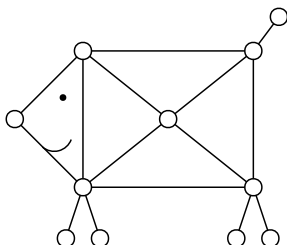
Dělitelnost

3. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

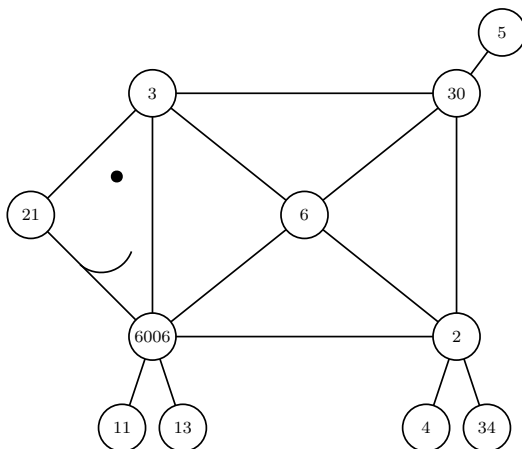
Do každého kolečka napište jedno z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 21, 30, 34 a 6006 tak, aby poměr čísel ve dvou kolečkách byl celočíselný právě tehdy, když jsou tato kolečka spojena čarou.



(Anička Doležalová)

ŘEŠENÍ:

Zadání vyhovuje například následující rozmístění čísel:



POZNÁMKY:

Všichni řešitelé si s úlohou hravě poradili a PraSátko vyplnili. Většina řešení obsahovala i krátký komentář, v jakém pořadí je vhodné čísla do koleček doplňovat. Porovnáním počtu čar vycházejících z koleček a počtu dělitelů (násobků) čísel vyšlo, že na čumáčku PraSátka musí nutně být číslo 21, na bradičce 6006 a na bříšku 2.

(Hedvika Ranošová)

Úloha 2.

Martin si napsal své oblíbené číslo do sešitu. Petr mu ho vzal a škrtnl cifru na místě jednotek. Pak si všiml, že původní číslo je dělitelné tím novým. Najděte všechna aspoň dvouciferná čísla, která mohl Martin napsat.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Martinovo oblíbené číslo si označíme a . Můžeme jej napsat jako $10b + c$, kde b je nové číslo a c je škrtnutá cifra. Hledáme tedy taková čísla, že $b \mid 10b + c$, což nastane právě tehdy, když $b \mid c$.

Pokud a je dvouciferné, pak vyhovují právě ta čísla, pro která dělí cifra na místě desítek cifru na místě jednotek.

V opačném případě, tedy pokud $a \geq 100$, platí $b \geq 10$. Z toho plyne, že b je větší než c , protože c je cifra. Ale zároveň má platit, že b dělí c . Tyto dvě podmínky jsou zároveň splněny právě tehdy, když $c = 0$.

Množinou řešení jsou čísla 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 33, 36, 39, 40, 44, 48, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99 a všechna alespoň trojciferná čísla končící na 0.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správná a podobná vzorovému. Několik řešitelů našlo jen taková dvouciferná čísla (pravděpodobně přehlídli slovo aspoň v zadání úlohy). Jelikož se jednalo o snadnější část řešení, uděloval jsem jen 1 bod.

(Lucien Šíma)

Úloha 3.

Žabička Danýlek skáče po očíslovaných kamenech. Vždy, když stojí na kameni s číslem n , najde největšího a nejmenšího prvočíselného dělitele čísla n . Pak skočí na kámen označený součtem těchto dělitelů. Ukažte, že ať začne kdekolí, může takto navštívit jen konečně mnoho různých kamenů.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Pro spor předpokládejme opak. Vezměme nejmenší n takové, že když žabička Danýlek začíná na kameni s číslem n , pak navštíví nekonečně mnoho kamenů. Všimněme si, že z toho plyne, že žabička nikdy nesmí skočit na kámen s číslem menším než n , jinak potom už navštíví jen konečně mnoho kamenů. Jednoduše ověříme, že $n \geq 8$: z dvojky skočí na čtyřku, čtyřka se zacyklí sama na sobě, z trojky skočí na šestku a ta se (stejně jako čísla 5 a 7) objeví v cyklu $6 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow \dots$

Nejprve nechť n je složené. Pak má alespoň dva prvočíselné dělitele, nejmenšího označíme k a největšího ℓ . Protože jsou oba vlastní, tak víme, že $k, \ell \leq \frac{n}{2}$, a tedy $k + \ell \leq n$. To ale znamená, že žabička buď po prvním skoku zůstane na n (a tudíž nikdy neskočí nikam jinam, což je spor), nebo skočí na číslo menší než n , což je také spor.

Tedy n musí být prvočíslo. Takže největší i nejmenší prvočíselný dělitel n je n . Žabička Danýlek proto dále skočí na kámen s číslem $2n$, a protože 2 a n jsou jediní prvočíselní dělitelé $2n$, skočí poté na kámen s číslem $n + 2$.

Nejprve předpokládejme, že $n + 2$ je složené. Pak může žabička Danýlek skočit na číslo menší než n , na n , na $n + 1$ nebo $n + 2$. První případ jsme již vyloučili v úvodu. Podívejme se na ty ostatní:

n : Danýlek by skákal cyklicky mezi n , $2n$ a $n + 2$,

$n + 1$: Číslo $n + 1$ je sudé, a tedy složené, takže Danýlek buď zůstane na $n + 1$, nebo skočí na n a bude cyklicky skákat na n , $2n$, $n + 2$, $n + 1$, n , a nebo skočí na nižší číslo než n ,

$n + 2$: Danýlek už bude skákat pouze na $n + 2$.

Ve všech případech jsme dostali spor, takže $n + 2$ nemůže být složené.

Tedy $n + 2$ musí být prvočíslo. Stejným postupem jako pro n dostaneme, že po dvou skocích bude žabička na $n + 4$. Protože n , $n + 2$ a $n + 4$ jsou tři za sebou jdoucí lichá čísla, je právě jedno z nich dělitelné třemi. Navíc n i $n + 2$ jsou prvočísla větší než 3, proto musí být $n + 4$ dělitelné třemi. Žabička Danýlek tak poté skočí maximálně na číslo $3 + \frac{n+4}{3}$. Ale ze vztahu $n \geq 8$ dostaneme

$$\begin{aligned} n &\geq 8, \\ 2n &\geq 16, \\ 3n &\geq 16 + n > 9 + (n + 4), \\ n &> 3 + \frac{n + 4}{3}. \end{aligned}$$

To ale znamená, že z $n + 4$ Danýlek skočí na kámen s číslem menším než n , což je spor.

POZNÁMKY:

Všechna řešení, co dorazila, byla na rozdíl od vzorového řešena přímo. Jeden bod jsem udělila za dokázání, že žabička Danýlek ze složeného čísla skočí na nižší číslo. Druhý bod jsem udělila, když si řešitel správně rozmyslel, jak bude žabička skákat poté, co skočí na prvočíslo, a poslední, pokud i správně zdůvodnil, proč z toho vyplývá, že žabička opravdu skočí pouze na konečně mnoho kamenů.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 4.

Najděte všechna prvočísla, která nelze zapsat jako $\sqrt{24n + 1}$ pro žádné přirozené n .

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Chceme, aby pro dané prvočíslo p existovalo n takové, aby platilo $p = \sqrt{24n + 1}$. Výraz můžeme ekvivalentně upravovat:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{24n + 1}, \\ p^2 &= 24n + 1, \\ (p + 1)(p - 1) &= 24n. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že p se dá zapsat jako $\sqrt{24n + 1}$ právě tehdy, když $24 \mid (p + 1)(p - 1)$.

Je zjevné, že $24 \nmid 3 = (2 + 1)(2 - 1)$ a $24 \nmid 8 = (3 + 1)(3 - 1)$, takže prvočísla 2 ani 3 takto zapsat nelze. Dokážeme, že zbylá prvočísla již takto zapsat umíme.

Podívejme se na tři po sobě jdoucí čísla $p - 1$, p , $p + 1$. Jedno z těchto čísel je určitě dělitelné třemi. Avšak žádné prvočíslo větší než 3 není dělitelné třemi, a proto je dělitelné třemi jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$. Tedy 3 dělí $(p - 1)(p + 1)$.

Obdobně p není sudé, protože prvočísla větší než dva jsou vždy lichá. Proto jsou sudá obě čísla $p - 1$ a $p + 1$, a jelikož jde o dvě po sobě jdoucí sudá čísla, je jedno z nich dělitelné dokonce čtyřmi. Proto platí $2 \cdot 4 = 8 \mid (p + 1)(p - 1)$.

Jelikož jsou čísla 8 a 3 nesoudělná, tak i $3 \cdot 8 = 24 \mid (p + 1)(p - 1)$, což jsme chtěli dokázat, a tudíž každé prvočíslo větší než tři lze takto zapsat.

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správná, avšak někteří si spletli rozklad na prvočinitele a tvrdili, že $24 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ a někteří jen tipli výsledek, ale neuvedli důkaz, že to pro ostatní prvočísla jde, za což jsem dával nula bodů.

(Filip Čermák)

Úloha 5.

Číslo n nazveme *vypečené*, jestliže ho můžeme vyjádřit jako součet tří čísel a, b, c , pro která platí

$$a < b < c, \quad a \mid b, \quad b \mid c.$$

Dokažte, že existuje pouze konečně mnoho čísel, která nejsou vypečená.

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Důkaz začneme pozorováním. Je-li přirozené číslo d vypečené, pak jeho libovolný násobek md můžeme napsat jako $ma + mb + mc$, což prokazuje vypečenost md .

Každé liché číslo $l > 5$ je vypečené. Stačí zvolit $a = 1, b = 2, c = l - 3$. Zřejmě l je součtem těchto čísel a $l - 3$ je sudé číslo větší než 2, z čehož plyne vypečenost l . Dále číslo 16 je vypečené, neboť je součtem 1, 5 a 10.

Každé přirozené číslo n umíme jednoznačně napsat ve tvaru $n = 2^k \cdot l$, kde k je celé nezáporné a l je liché číslo. Pokud $l > 5$, pak je n dělitelné vypečeným lichým číslem. Pokud $k \geq 4$, pak je n dělitelné vypečeným číslem 16. Podle úvodního pozorování dělitelnost vypečeným číslem prokazuje vypečenost a zbývá jen konečný počet čísel, která nemusí být vypečená (čísla tvaru $2^k \cdot l$, kde k je menší než 4 a l liché menší než 7).

POZNÁMKY:

Velká část došlých řešení byla správná, někteří řešitelé si však přidělali práci rozebíráním většího množství případů, než bylo nutné. Častou chybou bylo, že řešitelé předpokládali, že každé sudé číslo je po vydělení dvěma liché, a snažili se tak ukázat jeho vypečenost přes dělitelnost lichým číslem větším než pět. Bohužel jim tím unikla nekonečná podmnožina přirozených čísel (mocniny dvojky, případně čísla dělitelná čtyřmi). Za tato částečná řešení jsem uděloval 2–3 body. (Lucien Šíma)

Úloha 6.

Anička chce číslo n s následující vlastností: pro všechny nenulové cifry a a b platí, že když před n přidáme a a za n přepíšeme b , bude výsledné číslo dělitelné číslem ab . Může Anička takové číslo najít?

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že takové n existuje. Potom speciálně dostáváme $12 \mid \overline{1n2}$ a $24 \mid \overline{2n4}$. Protože 12 i 24 jsou obě dělitelné čtyřmi, máme $4 \mid \overline{1n2}$ a $4 \mid \overline{2n4}$. Odečtením pak získáme $4 \mid 100 \dots 02$, přičemž nul je stejný počet jako má n cifer. To ale nemůže platit, protože poslední dvojčíslí není dělitelné čtyřmi.

Takže žádné takové n nemůže existovat.

POZNÁMKY:

Klíčové pozorování bylo, že chceme sledovat jen poslední cifry. Nejčastější (a asi nejrychlejší) způsob jak to udělat, byl použitím 12 a 24 jako ve vzoráku. Některá řešení pracovala podobným způsobem také s nějakými z čísel 16, 25, 44 a 88. (Rado van Švarc)

Úloha 7.

Najděte všechny monické polynomy⁵ f s celočíselnými koeficienty takové, že platí

$$p \mid 2 \cdot (f(p)!) + 1$$

pro nekonečně mnoho prvočísel p , pro která je $f(p) > 0$.

(Rado van Švarc)

⁵Polynom $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ nazveme monickým, pokud $a_n = 1$.

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že polynom f splňuje podmínku v zadání.

Pokud pro nějaké prvočíslo p platí $f(p) \geq p$, potom máme $p \mid f(p)!$, a tedy $p \nmid 2 \cdot (f(p)!) + 1$. Pro nekonečně mnoho prvočísel musí tedy nastat nerovnost $f(p) < p$. Pokud by však f byl monický polynom stupně alespoň 2, pak pro všechna dostatečně velká x by platilo $f(x) \geq x$. Pokud $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, kde $n \geq 2$, označme si $a = \min\{0, a_0, a_1 - 1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ a ukážeme, že pro všechna $x \geq 1 - na$ je $f(x) \geq x$. Protože $a \leq 0$, je $x \geq 1$, takže díky $a_i \geq a$ pro $i \neq 1$ a $a_1 \geq a + 1$, máme $a_i x^i \geq ax^i$ pro $i \neq 1$ a $a_1 x \geq ax + x$. Zároveň protože $a \leq 0$ a $x \geq 1$, platí $ax^i \geq ax^{n-1}$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$. Z toho dostáváme:

$$f(x) \geq x^n + ax^{n-1} + \dots + ax + a + x \geq x^n + na x^{n-1} + x = x^{n-1}(x + na) + x \geq x.$$

Nerovnost $f(p) < p$ by tak nastala jen pro konečně mnoho prvočísel, což je spor. Takže f může mít stupeň roven nanejvýš jedné.

Dále, polynom stupně 0 (konstantní polynom) podmínku triviálně nesplňuje, proto je f polynom stupně 1. Tedy $f(x) = x + m$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Kvůli podmínce $f(p) < p$ máme $f(x) = x - k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Nyní dokážeme, že jediná možná hodnota k je 3. Vezměme si nějaké p , pro které platí podmínka ze zadání. Wilsonova věta nám říká, že $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Z podmínky ze zadání víme

$$(p-1)! \equiv -1 \equiv 2 \cdot (p-k)! \pmod{p}.$$

Dále

$$(p-1)! = (p-k)! \cdot (p-(k-1)) \cdot (p-(k-2)) \cdots (p-1) \equiv (p-k)!(-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}.$$

Tedy pokud předchozí kongruenci vydělíme $(p-k)!$ (což můžeme, protože $(p-k)!$ je nesoudělné s p), dostaneme

$$(-1)^{k-1}(k-1)! \equiv 2 \pmod{p},$$

neboli $p \mid (k-1)! + (-1)^k \cdot 2$. Jelikož takových p existuje nekonečně mnoho a číslo $(k-1)! + (-1)^k \cdot 2$ nezávisí na p , musí být $(k-1)! + (-1)^k \cdot 2 = 0$, proto $(k-1)! = 2$ a tudíž $k = 3$. Pokud nyní ověříme hodnotu pro $k = 3$, dostáváme $(3-1)! + (-1)^3 \cdot 2 = 0$, tedy polynom $f(x) = x - 3$ podmínku v zadání splňuje.

Hledaný polynom je proto jediný, a to $f(x) = x - 3$.

POZNÁMKY:

Řešení mělo v podstatě dvě části – zaprvé, uvědomit si, že polynomy stupně ≥ 2 rostou moc rychle, zadruhé, použít Wilsonovu větu pro úpravu kongruence. Všichni řešitelé, kteří dospěli k úspěšnému závěru, se drželi tohoto schématu.

V první části někteří používali argument s limitami. To je právě ten způsob, jak se na to člověk, který limity zná, typicky dívá. Znalost limit ale v PraSeti nepředpokládáme, a proto ve vzorovém řešení je uvedeno zcela korektní zdůvodnění nerovnosti bez použití limit. (Tonda Češík)

Úloha 8.

Rozhodněte, zda existuje číslo a takové, aby pro nekonečně mnoho čísel n platilo:

$$n! + a \mid (2n)!$$

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Pro spor předpokládejme, že takové a existuje. Pak existuje $n \geq 2a + 12$ takové, že

$$n! + a \mid (2n)!.$$

Protože $n \geq a$, tak můžeme zapsat $n! + a$ jako $a \cdot (\frac{n!}{a} + 1)$, kde jsou oba činitelé přirození. Zřejmě $\frac{n!}{a} = 1 \cdot 2 \cdots (a-1) \cdot (a+1) \cdots n$ je dělitelné každým číslem menším nebo rovným n kromě možná a , ale díky $n \geq 2a$ máme $(a \cdot 2a) \mid n!$, takže $a \mid \frac{n!}{a}$. To znamená, že $\frac{n!}{a}$ je dělitelné všemi přirozenými čísly menšími nebo rovnými n , a proto $\frac{n!}{a} + 1$ není dělitelné žádným přirozeným číslem menším nebo rovným n .

Zároveň pokud nějaké prvočíslo p dělí $\frac{n!}{a} + 1$, tak určitě dělí i $(2n)!$, tedy $p \leq 2n$, takže $\frac{n!}{a} + 1$ je součin některých prvočísel mezi n a $2n$ a každé je v tomto součinu v ne vyšší než první mocnině. Pokud tedy $n \neq \#$ označíme *primoriál* čísla n (součin všech prvočísel menších nebo rovných n), tak platí

$$\frac{n!}{a} + 1 \mid \frac{2n\#}{n\#}.$$

Nyní ale ukážeme, že $\frac{n!}{a} + 1 > \frac{2n\#}{n\#}$, čímž dostaneme spor, protože pak výše získaná dělitelnost nebude moc platit.

K tomu nám pomůžou dvě nerovnosti:

První z nich je nerovnost $\frac{n!}{a} > 4^n$ pro jakékoliv $n \geq a$ a $n \geq 12$. Zřejmě platí $\frac{n!}{a} \geq (n-1)!$. Takže stačí ukázat, že $(n-1)! > 4^n$. To dokážeme pro $n \geq 12$ jednoduchou indukcí. Pro $n = 12$ máme $39\,916\,800 = (12-1)! > 4^{12} = 16\,777\,216$. A pokud tvrzení platí pro nějaké $k \geq 12$, pak $((k+1)-1)! = k(k-1)! \geq k \cdot 4^k > 4^{k+1}$, takže platí i pro $k+1$, čímž je indukční krok dokončen.

A druhá pak říká, že $\frac{2n\#}{n\#} \leq 4^n$ pro všechna přirozená n . Všimněme si, že

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

je určitě násobkem všech prvočísel p , pro která $n < p < 2n$, a zároveň také $\binom{2n}{n} \leq \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n} = 4^n$. Takže

$$\frac{2n\#}{n\#} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Nyní, protože jsme zvolili $n > 2a + 12$, už jednoznačně platí

$$\frac{n!}{a} + 1 > \frac{n!}{a} > 4^n \geq \frac{2n\#}{n\#}.$$

což je požadovaný spor.

POZNÁMKY:

V důkazu jsme použili $n > 2a + 12$, což se ze začátku může zdát jako náhodná konstanta. Důvodem je ale jen, abychom měli dostatečně velké číslo n – větší než $2a$, abychom dostali požadovanou dělitelnost, a větší než $a + 12$, aby určitě platila první nerovnost.

Úloha byla velmi těžká na vymyšlení, což se projevilo v malém počtu odeslaných řešení, a navíc se do nerovností dalo velmi snadno zamotat, a tak jen tři z nich úspěšně došly až k výsledku. Dva další řešitelé se pokusili využít myšlenku se součinem prvočísel od n do $2n$, ale už nedotáhli potřebnou nerovnost, za což jsem udělil 2 body. (Jáchym Solečký)

Pravděpodobnost I

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Danil má doma 29 plyšových tuleňů. Víme, že alespoň jeden tuleň je chlupatý a alespoň jeden je roztomilý. Danil si všiml, že když jednoho tuleňe náhodně vybere, jsou jevy „tuleň je chlupatý“ a „tuleň je roztomilý“ nezávislé. Dokažte, že jsou všichni Danilovi tuleni chlupatí nebo všichni roztomilí nebo obojí.

(Vašek Rozhoň)

ŘEŠENÍ:

Označme R jev „vybraný tuleň je roztomilý“ a C jev „vybraný tuleň je chlupatý“, pak $|R|$ bude počet roztomilých a $|C|$ počet chlupatých tuleňů. Použijeme nezávislost jevů R a C a upravíme vztahy:

$$\begin{aligned}P(R \cap C) &= P(R) \cdot P(C), \\ \frac{|R \cap C|}{29} &= \frac{|R|}{29} \cdot \frac{|C|}{29}, \\ |R \cap C| &= \frac{|R||C|}{29}.\end{aligned}$$

Protože počet roztomilých chlupatých tuleňů je určitě celočíselný a 29 je prvočíslo, musí platit, že 29 dělí $|R|$ nebo že 29 dělí $|C|$. Ze zadání je ale $0 < |R| \leq 29$ a $0 < |C| \leq 29$, proto 29 dělí $|R|$, právě když $|R| = 29$, podobně pro $|C|$. Danil tedy musí mít 29 roztomilých tuleňů nebo 29 chlupatých tuleňů.

POZNÁMKY:

Při řešení úlohy stačilo správně využít definici nezávislosti dvou jevů a všimnout si, že 29 je prvočíslo. Většina důkazů se velmi podobala vzorovému, jen málo bylo řešitelů, kteří se v úvahách o tuleních zamotali. Těm doporučuji znovu si přečíst kapitolu seriálu o nezávislosti.

(Bára Kociánová)

Úloha 2.

Danil s Vaškem našli úlohu do seriálu a teď se ji snaží vyřešit. Jelikož nejsou moc zdatní v numerických výpočtech, je šance, že Vašek vyřeší úlohu správně, rovna $\frac{3}{16}$, zatímco pro Danila to je $\frac{4}{11}$. Víme, že Vaškův a Danilův výsledek jsou na sobě nezávislé. Také víme, že spletou-li se oba, vyjde jim totéž číslo s pravděpodobností $\frac{1}{273}$. Pokud vyšel Danilovi i Vaškovi stejný výsledek, jaká je pravděpodobnost, že je tento výsledek správný?

(Danil Koževnikov)

ŘEŠENÍ:

Jev „Danil vyřeší úlohu správně“ si označíme D , jev „Vašek vyřeší úlohu správně“ bude V a konečně jev „oběma vyšel stejný výsledek“ označíme S . Zadání po nás žádá spočítat pravděpodobnost

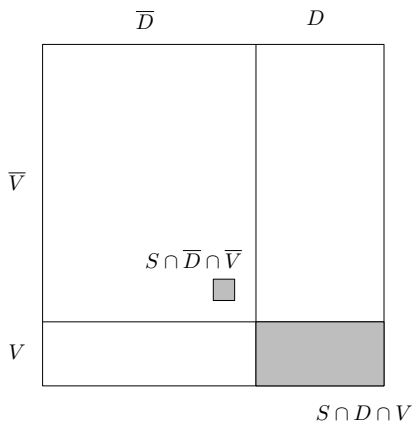
toho, že nastaly oba jevy D a V za podmínky, že nastal jev S , tedy $P(D \cap V | S)$. Z definice podmíněné pravděpodobnosti máme $P(D \cap V | S) = \frac{P(D \cap V \cap S)}{P(S)}$. Stačí spočítat hodnotu čitatele i jmenovatele.

Víme, že Danilův i Vaškův výsledek jsou na sobě nezávislé, tedy $P(D \cap V) = P(D) \cdot P(V)$. Dále vyšel-li oběma správný výsledek, mají jej oba stejný, tedy $P(D \cap V \cap S) = P(D \cap V) \cdot P(S | D \cap V) = P(D) \cdot P(V) \cdot P(S | D \cap V) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{16} \cdot 1 = \frac{3}{44}$.

Dále si povšimněme, že vyšel-li jednomu chlapci správný výsledek a druhému špatný, musely se tyto výsledky lišit, tedy $P(S \cap \bar{D} \cap V) = P(S \cap D \cap \bar{V}) = 0$. Pravděpodobnost jevu S nyní spočítáme s pomocí věty o úplné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap D \cap V) + P(S \cap \bar{D} \cap V) + P(S \cap D \cap \bar{V}) + P(S \cap \bar{D} \cap \bar{V}) \\ &= P(S \cap D \cap V) + P(S \cap \bar{D} \cap \bar{V}) = \frac{3}{44} + P(\bar{D} \cap \bar{V}) \cdot P(S | \bar{D} \cap \bar{V}). \end{aligned}$$

Protože D a V jsou nezávislé, jsou nezávislé i $\bar{D}$ a $\bar{V}$. Navíc ze zadání víme, že $P(S | \bar{D} \cap \bar{V}) = \frac{1}{273}$, takže $P(S) = \frac{3}{44} + (1 - \frac{4}{11}) \cdot (1 - \frac{3}{16}) \cdot \frac{1}{273} = \frac{3}{4 \cdot 11} + \frac{7}{11} \cdot \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{36+1}{3 \cdot 11 \cdot 16} = \frac{37}{3 \cdot 11 \cdot 16}$.



Dostáváme tak

$$P(D \cap V | S) = \frac{P(D \cap V \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{44}}{\frac{37}{3 \cdot 11 \cdot 16}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 16}{4 \cdot 11 \cdot 37} = \frac{36}{37}.$$

POZNÁMKY:

Všichni, kteří zvolili správný postup, nakonec i došli ke správnému výsledku. To je pozoruhodné; když jsme tuto úlohu počítali s Danilem, vyšlo nám nejprve několik různých výsledků, přičemž ne všechny výsledky byly čísla od nuly do jedné. Na druhou stranu, výsledek, na kterém jsme se nakonec shodli, se i ukázal být správný. (Vašek Rozhoň)

Úloha 3.

Vašek má padesát kartiček s pokémony a padesát s digimony. Hraje s Honzou následující hru. Nejprve kartičky zamíchá tak, že všechna možná pořadí jsou stejně pravděpodobná. Potom Honzovi postupně kartičky ukazuje v pořadí, v jakém je zamíchal. Honza má v jednu chvíli Vaška zastavit a říct: „Příští kartička je digimon.“ Pokud bude mít pravdu, Vašek mu dá kartičku, a pokud ne, Vašek mu dá facku.

Honza se rozhodl pro následující strategii: Počká si na první okamžik, kdy počet digimonů, které mu Vašek ukázal, je aspoň o sedm menší než počet pokémonů, které mu Vašek ukázal, a v tu chvíli

si tipne, že příští kartička je digimon. Pokud tento jev nenastane do chvíle, kdy zbývá poslední kartička, Honza si o této kartičce tipne, že je to digimon. Dokažte, že pravděpodobnost, že touto strategií vyhraje digimona, je jedna polovina.

(Danil Koževnikov)

ŘEŠENÍ:

Kdyby Honza vždy volil poslední kartu z balíčku, tak by byla pravděpodobnost, že vyhraje digimona, rovna jedné polovině, neboť je počet pokémonů i digimonů v balíčku stejný.

Teď ukážeme, že si Honza použitím jakékoliv jiné *strategie* nemůže zvýšit svoji šanci na výhru, přičemž strategií myslíme nějakou množinu situací, v nichž si tipne, že následující karta je digimon. Pokud se v průběhu odhalování prvních 99 karet Honza nedostal do žádné z těchto situací, tak si tipne poslední kartu, takže vyhraje s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

Předpokládejme tedy, že Honza chce tipnout následující kartičku, když v balíčku zbývá p pokémonů a d digimonů. Potom bude následující kartička digimon s pravděpodobností $\frac{d}{p+d}$. Ze symetrie však platí, že bude v dané situaci poslední kartička digimon rovněž s pravděpodobností $\frac{d}{p+d}$, takže má Honzova strategie i v tomto případě stejnou úspěšnost, jako volba poslední kartičky.

Ukázali jsme, že libovolná strategie (tedy i ta ze zadání, ve které Honza tipne následující kartičku, pokud platí $d - p = 7$) má padesátiprocentní šanci na úspěch.

POZNÁMKY:

Tato úloha se na první pohled může zdát neintuitivní, až lehce paradoxní – to, jaké byly předchozí kartičky, nám přece zdánlivě dává dost cenných informací o tom, jaké jsou ty zbývající, takže by měla existovat nějaká strategie, jež by měla nadpoloviční úspěšnost! Zádrhel je však v tom, že nám znalost podmíněné pravděpodobnosti toho, že bude v jistém stavu následující karta digimon, vlastně nedává žádný návod na to, kterou ze zbývajících karet vybrat.

Většina došlých řešení správně využila myšlenku symetrie, některým jedincům se úlohu podařilo dořešit i nějakým alternativním, mnohem pracnějším způsobem. Velká část nesprávných řešení se snažila výsledek nějakým způsobem odhadnout pomocí numerických výpočtů. Tento v praxi velmi užitečný přístup se však na důkazové úlohy nehodí. Je totiž něco úplně jiného, když víme, že výsledek je *přesně* jedna polovina, než když víme pouze to, že leží někde mezi 0,49 a 0,51.

(Danil Koževnikov)

Obvodové a úsekové úhly – Crash Course

Vítej u tohoto studijního textu! Obvodové a úsekové úhly jsou krásná část geometrie, která může člověku i v nevinně vypadajícím obrázku najít nečekané souvislosti. Ať už tento text čteš kvůli přípravě na řešení matematických příkladů, nebo si jen chceš přečíst něco zajímavého, určitě pokračuj.

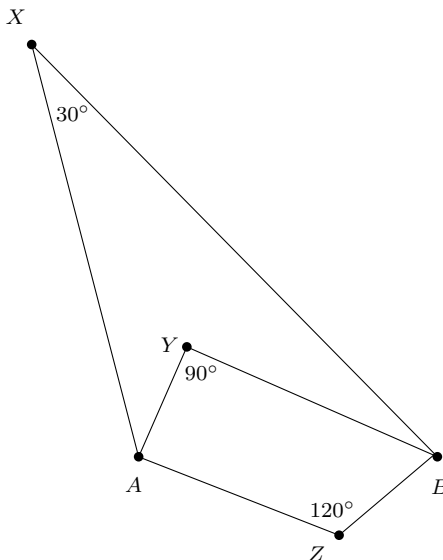
Ačkoliv je napsán primárně jako studijní text pro sérii Tečny, zdaleka se nejedná o zbraň pouze na úlohy s tečnami, a proto je tento text trošku obsírnější. Znalosti o obvodových a úsekových úhlech jsou nepostradatelné alespoň u poloviny pokročilejších geometrických úloh a jsou jednoznačně nejdůležitějším výpadem, který je třeba pro boj s geometrií bravurně ovládat. *Pokud nicméně spěcháš s řešením série, stačí Ti mrknout na užitečná tvrzení zde označená jako Zbraně. Tato tvrzení můžeš při řešení matematických příkladů využívat bez důkazu.*

Pojďme na to – těžko na cvičišti, lehký na bojišti!

Když se body dívají

Definice. Bod X se *dívá* na úsečku AB pod úhlem o velikosti $|\angle AXB|$.

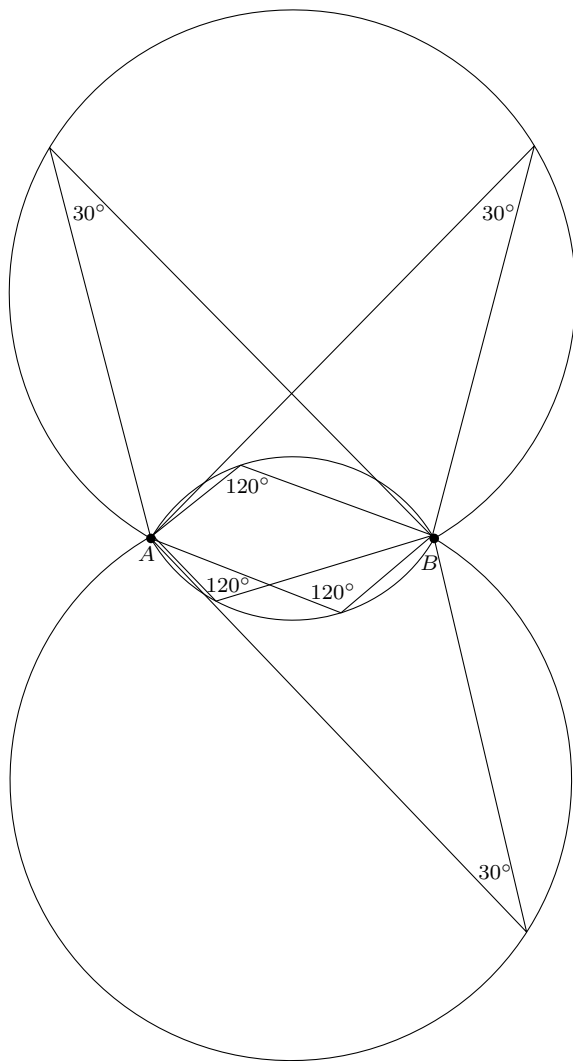
Zde je příklad bodů X, Y, Z , které se dívají na úsečku AB postupně pod úhly $30^\circ, 90^\circ$ a 120° .



Například vezmeme-li množinu všech bodů, které se na úsečku AB dívají pod úhlem 90° , dostaneme Thaletovu kružnici nad úsečkou AB .⁶

⁶Jako bedlivý čtenář si jistě všimneš, že do Thaletovy kružnice patří i samotné body A, B . Umí se tyto dva body taky koukat na úsečku AB ? Dodejme tedy pro matematickou korektnost – pro body na přímce AB , ale mimo úsečku AB dává smysl říct, že se na úsečku AB dívají pod úhlem 0° . Naopak body uvnitř AB se musí „pořádně rozhlédnout“ na obě strany, aby zkontrolovaly oba konce úsečky; dívají se tedy pod přímým úhlem 180° . Samotné krajní body A, B se na úsečku AB mohou

Co kdybychom se snažili najít množinu bodů, které se na tuto úsečku dívají pod úhlem třeba 30° či 120° ? Prozradíme, že by vypadala takhle!



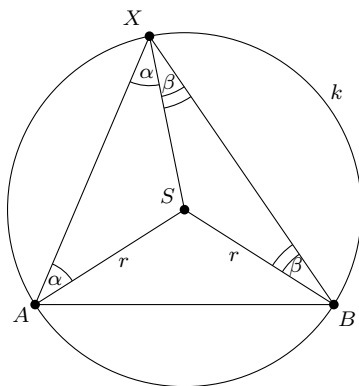
A proč? To se brzy dozvíš ;).

O středu kružnice

Podívejme se na následující obrázek – bod S je středem kružnice k o poloměru r . Na této kružnici je vyznačená nějaká její tětiva AB a bod X . Pod jakým úhlem se bod X dívá na AB ? Nazvěme úhel $\sphericalangle ASB$ *středový úhel* a úhel $\sphericalangle AXB$ *obvodový úhel*.

dívat pod jakýmkoli úhlem, tedy i 90° .

Ihned si můžeme všimnout, že trojúhelník SAB je rovnoramenný díky $|SA| = |SB| = r$, platí tedy $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA|$. Stejnou úvahu můžeme provést i pro trojúhelníky ASX a BSX . Abychom si udrželi přehled o tom, které úhly jsou stejné, označme si je písmenky – viz obrázek.



Nyní vidíme, že musí platit

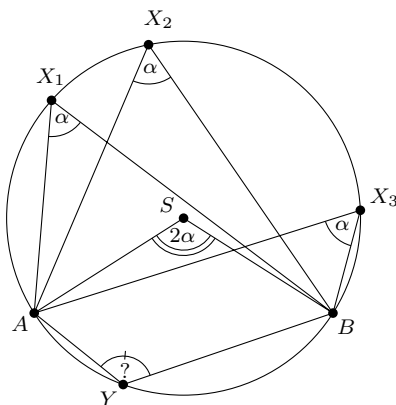
$$\alpha + \alpha + \beta + \beta + |\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA| = 180^\circ.$$

Můžeme si všimnout, že $\alpha + \beta$ se rovná velikosti obvodového úhlu $|\sphericalangle AXB|$. Úhly $\sphericalangle SBA$ a $\sphericalangle SAB$ spolu musí doplňovat středový úhel do 180° . S těmito znalostmi upravíme naši rovnici na

$$\begin{aligned} 180^\circ &= 2(\alpha + \beta) + (|\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA|) = 2|\sphericalangle AXB| + (180^\circ - |\sphericalangle ASB|), \\ 2|\sphericalangle AXB| &= |\sphericalangle ASB|. \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ má oproti středovému úhlu $\sphericalangle ASB$ poloviční velikost.

To je velmi zajímavé zjištění – ale pozor, z tohoto obrázku můžeme vytěžit ještě mnohem více. Všimněme si, že bod X jsme si na kružnici vybrali náhodně – co kdybychom jej vybrali na jiném místě delšího oblouku AB ? Důkaz by vypadal velmi podobně. Bod X by se na AB opět díval pod úhlem o velikosti poloviny středového úhlu. **Jinak řečeno, všechny body delšího oblouku AB kružnice k se na úsečku AB dívají pod stejným úhlem.**



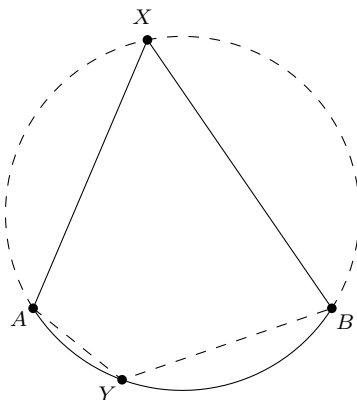
U tohoto obrázku na chvíli ještě zůstaneme. Nabízí se totiž další otázka – pod jakým úhlem se na AB dívají body kružnice k , které jsou „pod“ AB ?

Cvičení. Rozmysli si, že $\frac{|\angle ASB|}{2}$ to asi nebude.

Nicméně by intuitivně opět mělo platit, že se všechny body tohoto kratšího oblouku také dívají na AB pod stejným úhlem – označme si nějaký takový bod Y .

Nyní se nám hodí začít přemýšlet nejen nad úhly, ale i nad oblouky kružnice, které oněm obvodovým či středovým úhlům přísluší.

Přestože se oba body X, Y dívají na úsečku AB , bod X se dívá na **kratší** oblouk kružnice k vymezený body A, B , zatímco bod Y se kouká na ten **delší**.



To samé můžeme rozlišit i u středového úhlu. Středový úhel příslušející kratšímu oblouku AB má velikost $|\angle ASB|$, zatímco velikost středového úhlu příslušejícímu delšímu oblouku AB je $360^\circ - |\angle ASB|$.⁷

Nebudeme to nyní exaktně dokazovat, ale je to tak. Všechny body, které jsou pod úsečkou AB , se na ni dívají stále pod úhlem o velikosti rovné polovině středového úhlu – pouze je to tentokrát ten větší středový úhel příslušný většímu oblouku AB .

Velikost úhlu $\angle AYB$ je tedy $180^\circ - \frac{|\angle ASB|}{2}$. Za chvíli se nám bude hodit další důležité pozorování: součet úhlů, pod kterými se na AB dívají body X a Y , je roven 180° .⁸ Pojdme zformulovat to, co jsme nyní zjistili.

Zbraň I. (o obvodových úhlech)

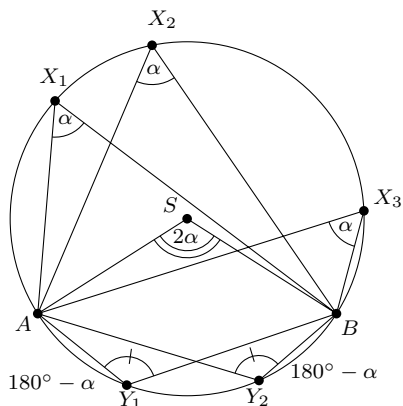
Mějme libovolnou kružnici a nějakou její tětivu AB . Pak se všechny body na obvodu kružnice, které leží ve stejné polorovině vůči přímce AB , dívají na tětivu AB pod stejným úhlem. Součet úhlů, pod kterými se na AB dívají body kružnice z různých polorovin vymezených přímkou AB , je 180° .

Zbraň II. (o obvodovém a středovém úhlu)

Mějme libovolnou kružnici a nějaký její oblouk AB . Středový úhel jemu příslušný je dvojnásobkem jeho obvodového úhlu.

⁷Těmto „škaradým“ úhlům, které mají velikost větší než 180° , se říká nekonvexní úhly.

⁸To intuitivně odpovídá tomu, že součet středových úhlů odpovídajícím kratšímu a delšímu oblouku AB musí pokrýt celou kružnici, což odpovídá $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.



Cvičení. Rozmysli si, že Thaletova kružnice je speciálním případem Zbraň I.

Cvičení. Rozmysli si, že obrázek množin bodů, které se na nějakou úsečku koukají pod úhly 30° a 120° , dává dobrý smysl.

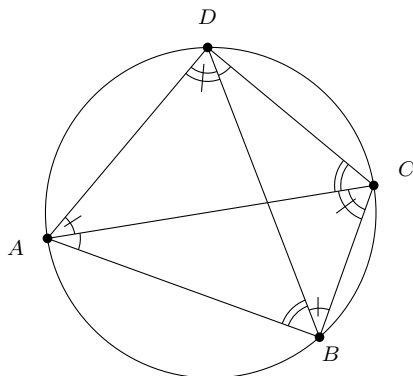
Tětivové čtyřúhelníky

Tětivový čtyřúhelník je čtyřúhelník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na jedné kružnici.

Cvičení. Rozmysli si, že lichoběžník je tětivový tehdy a pouze tehdy, je-li rovnoramenný.

Proč bychom se o tětivové čtyřúhelníky měli zajímat? Můžeme si všimnout, že jsme se na ně vlastně již narazili – $AXBY$ byl v předchozích obrázcích tětivovým čtyřúhelníkem.

Tětivové čtyřúhelníky jsou velmi pevně spjaty s obvodovými úhly. Představme si, že máme nějaký čtyřúhelník $ABCD$, o kterém víme, že je tětivový. Nyní na něj vypustíme Zbraň I:



Dostaneme celkem dost informací, a to jsme si ještě mohli dokreslit střed kružnice a použít Zbraň II. Tětivové čtyřúhelníky by se evidentně hodilo umět hledat. Nabízí se tedy otázka – jak bychom dokázali, že nějaké čtyři body leží na kružnici? Máme štěstí – tvrzení, která jsme dosud dokázali, platí i obráceně!

Zbraň III. (detektor tětivových čtyřúhelníků)

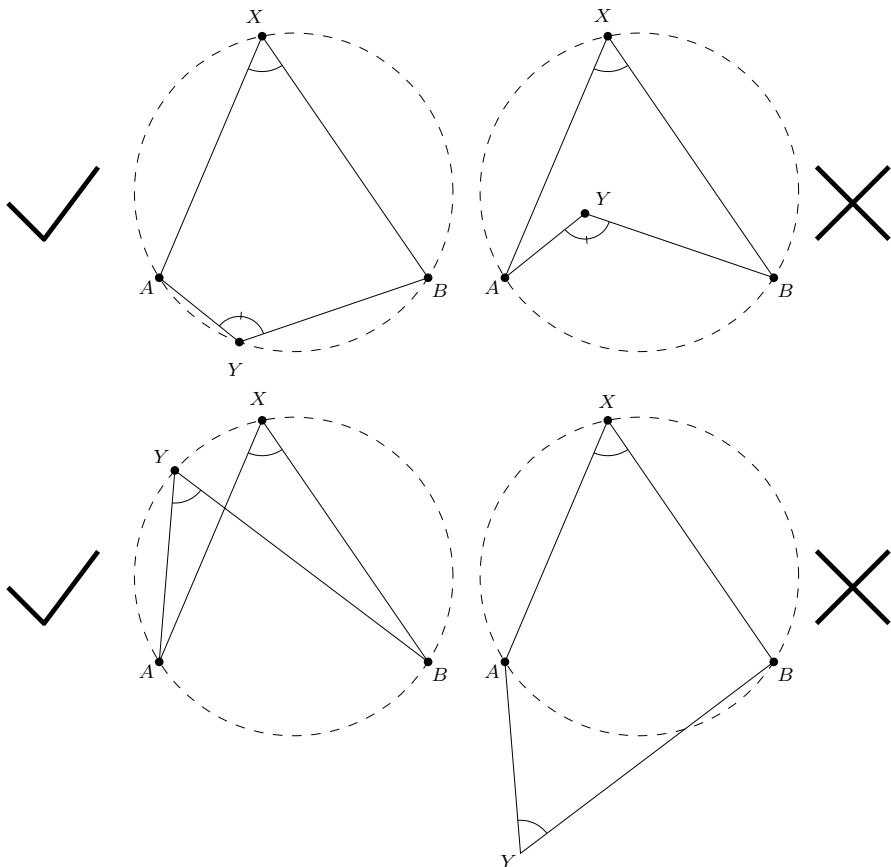
Mějme libovolnou úsečku AB a nějaké body X, Y ležící mimo přímku AB . Pak body $ABXY$ leží

na jedné kružnici, právě když platí jedna z následujících podmínek:

- (1) Body X, Y leží ve stejné polorovině vymezené přímkou AB a dívají se na úsečku AB pod stejným úhlem.
- (2) Body X, Y leží v opačných polorovinách vymezených přímkou AB a součet úhlů, pod kterými se na úsečku AB dívají, je 180° .

Zbraň III nám zaručuje, že kdykoliv najdeme libovolné dva body dívající se na nějakou úsečku ze stejné strany pod stejným úhlem, pak tyto dva body spolu s koncovými body úsečky tvoří tětíkový čtyřúhelník. Totéž platí, kdykoliv najdeme dva body, které se dívají na úsečku z opačných stran a součet jejich „dívacích“ úhlů je 180° .

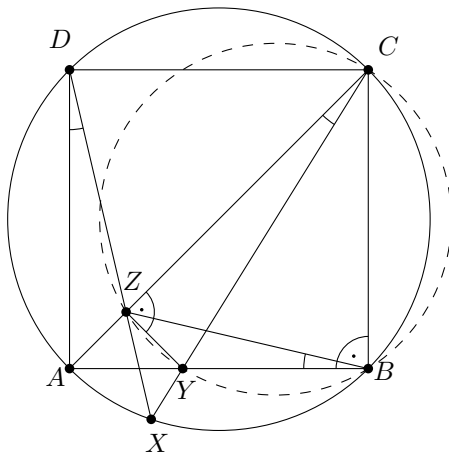
Pozor, neověřit, ve kterých polorovinách vůči AB se body X, Y nachází, je chyba, kvůli které pravidelně ztrácejí body v soutěžích i zkušení řešitelé. Jak Zbraň III správně použít a nenachytat se, můžeme shrnout následujícími čtyřmi obrázky:



Víme, že tětíkové čtyřúhelníky jsou hodně užitečné, a umíme je hledat. Pojďme si to vyzkoušet na příkladu.

Příklad. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB jemu opsané kružnice zvolíme libovolně bod X . Průsečík úsečky XC se stranou AB označíme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označíme Z . Ukažte, že YZ je kolmá na AC .

Řešení. Zkusme nad příkladem přemýšlet od konce. Pokud má opravdu být YZ kolmá na AC , pak by se body Z a B dívaly na úsečku YC pod úhlem 90° – tedy body B, C, Z, Y by v tomto pořadí ležely na Thaletově kružnici nad CY , tudíž by tvořily tětívový čtyřúhelník.



Díky této úvaze již víme, co máme dělat – stačí nám z toho, co známe, nějak dokázat, že čtyřúhelník $BCZY$ je skutečně tětívový. Ze zadání víme, že body A, X, B, C, D leží v tomto pořadí na jedné kružnici. Z obvodových úhlů příslušných tětív AX vyplývá $|\angle ACX| = |\angle ADX|$. Ze symetrie bodů B, D vůči úhlopříčce AC máme $|\angle ADZ| = |\angle ABZ|$. Dohromady tedy

$$|\angle YBZ| = |\angle ABZ| = |\angle ADZ| = |\angle ADX| = |\angle ACX| = |\angle ZCY|.$$

Víme tedy, že úhly $\angle YBZ$ a $\angle ZCY$ mají stejnou velikost, a jelikož leží vůči YZ ve stejné polovině, tak body Y, B, C, Z dle Zbraně III tvoří tětívový čtyřúhelník.

Nyní již stačí pouze říct, že v tětívovém čtyřúhelníku je součet protějších úhlů roven vždy 180° , proto $|\angle YZC| = 180^\circ - |\angle YBC| = 90^\circ$, YZ a CA jsou na sebe tedy skutečně kolmé.

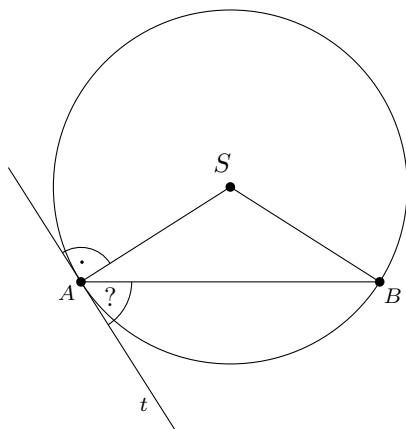
Obvodové úhly nám ovšem ještě neřekly poslední slovo.

Tečny a úsekové úhly

Definice. Mějme kružnici k . Přímce, která se této kružnici k dotýká v jediném bodě, říkáme *tečna* ke kružnici k . Prochází-li přímka navíc bodem X , můžeme říct, že je to tečna ke kružnici k z bodu X .

Základní vlastností tečny je, že v bodě dotyku svírá s poloměrem kružnice pravý úhel.

Představme si podobnou konfiguraci, s jakou jsme začali – opět mějme kružnici se středem S a na ní nějakou tětívu AB . Nyní vedme bodem A tečnu t . Úhlu označenému otazníčkem, který svírají přímka t a úsečka AB , se říká *úsekový úhel* (v tomto případě kratšího) oblouku AB . Jaká je jeho velikost vůči středovému úhlu pro tento oblouk AB ?



Již víme, že platí $|\angle SAB| = 90^\circ - \frac{|\angle ASB|}{2}$. Díky tomu, že tečna svírá s poloměrem pravý úhel, můžeme vyvodit, že spolu t a AB svírají úhel o velikosti $\frac{|\angle ASB|}{2}$ – tedy o polovině středového úhlu. Ale to je přece rovno velikosti obvodového úhlu pro AB , což nám předkládá novou zbraň.

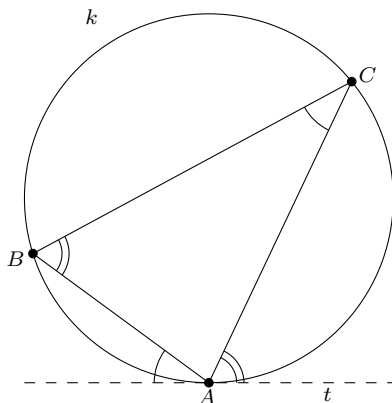
Zbraň IV. (o obvodovém a úsekovém úhlu)

Mějme kružnici k a její oblouk AB , následně bodem A vedme tečnu ke k . Pak obvodový a úsekový úhel příslušející tomuto oblouku mají stejnou velikost.

Toto důležité tvrzení platí i obráceně.

Zbraň V. (detektor tečen)

Mějme trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici k . Necht' bodem A prochází přímka t (viz obrázek) a platí, že úhel svíraný přímkou t a úsečkou AB je roven $|\angle ACB|$. Pak je přímka t tečnou kružnice k v bodě A .⁹

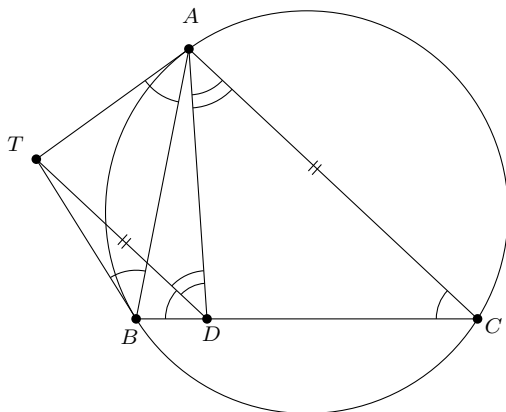


Příklad. Mějme trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici. Necht' se její tečny v bodech A a B protínají v bodě T . Dále necht' přímka rovnoběžná s AC procházející bodem T protíná stranu BC v bodě D . Dokaž, že $|AD| = |CD|$.

Řešení. Díky rovnoběžnosti $AC \parallel TD$ víme, že $|\angle TDA| = |\angle DAC|$ (střídavé úhly) a $|\angle TDB| = |\angle ACB|$ (souhlasné úhly). Z věty o obvodovém a úsekovém úhlu (Zbraň IV) plyne $|\angle ACB| =$

⁹Jinak řečeno, přímka t nemá s kružnicí k již žádný jiný společný bod kromě A .

$|\angle TAB| = |\angle TBA|$. Body D , A jsou ve stejné polorovině vůči přímce TB , protože jsou oba uvnitř či na hranici kružnice, která celá leží na jednu stranu od TB . Navíc jsme již dokázali, že $|\angle TAB| = |\angle ACB| = |\angle TDB|$, tedy body A i D se na úsečku TB dívají pod stejným úhlem, a $TBDA$ je proto tětiový čtyřúhelník (Zbraň III). Nyní můžeme jeho vlastností využít – z obvodových úhlů (Zbraň I) vyplývá, že $|\angle TBA| = |\angle TDA|$.



Dohromady tedy máme tento vyčerpávající řetězec rovností:

$$|\angle TDB| = |\angle ACD| = |\angle ACB| = |\angle TAB| = |\angle TBA| = |\angle ADT| = |\angle CAD|.$$

V něm je schována i rovnost $|\angle ACD| = |\angle CAD|$, která dokazuje rovnoramennost trojúhelníku ACD .

Povzbuzení na konec

Geometrii je těžké se naučit a jen cvičení dělá mistra.¹⁰

Pokud jsi toho o hledání úhlů v obrázcích moc nevěděl(a) a dočetl(a) ses až sem, tak si můžeš pográtulovat, protože jsi udělal(a) důležitý první krok.

Hodně užitečných úhlů a hodně štěstí při řešení úloh Ti přeje PraSátko! :)

¹⁰Pokud chceš mrknout na těžší až velmi zapeklité úlohy s obvodovými a úsekovými úhly, je dobrým zdrojem archiv matematické olympiády – námatkou např. B62-II-4, A56-II-3, A62-I-5, A63-III-5 (řazeno dle obtížnosti).

Pravděpodobnost II. – Žádné věže

Teorie pravděpodobnosti není nic jiného než selský rozum přeložený do řeči výpočtů.

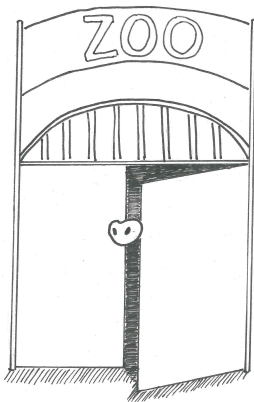
Pierre Simon Laplace

Milý příteli,

vítáme Tě u druhého dílu seriálu o pravděpodobnosti!

Dříve než se pustíme do neprobádaných vod, bleskurychle si zopakujeme, co už známe z dílu prvního. Začali jsme představením základních kombinatorických pojmů. Ty nás i nadále budou provázet minimálně na každém druhém kroku.¹¹ Připomeňme si, že počet podmnožin množiny s n prvky je 2^n . Pro každý prvek množiny totiž máme nezávisle na těch ostatních dvě možnosti – buď ho do podmnožiny přidáme, nebo ne. Dále počet způsobů, kterak seřadit n objektů, je $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Možným uspořádáním také říkáme permutace. A konečně, počet způsobů, jak z n objektů vybrat nějakých k , je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tomuto výrazu se říká kombinační číslo.

Zásadním pravděpodobnostním pojmem je nezávislost. Dvojice nezávislých jevů se pozná podle toho, že je pravděpodobnost, že oba zároveň nastanou, rovna součinu jejich pravděpodobností. Nakonec jsme si v prvním díle vysvětlili, jak funguje podmíněná pravděpodobnost, která se hodí zejména, potřebujeme-li spočítat pravděpodobnost jevu, který nějakým způsobem závisí na jiných jevech. Také jsme si ve hvězdičkové části řekli, co dělat, když pracujeme s nekonečnými prostory, a zde se k nim znovu vrátíme (opět v nepovinné části).



¹¹ Jako věrný přítel nebo žvýkačka na podrážce boty; záleží na Tvém vztahu k nim.

V tomto díle jsou na programu dvě novinky. Nejprve si řekneme, jak se naše pravděpodobnostní znalosti dají překvapivě aplikovat na řešení úloh, které na první pohled s pravděpodobností vůbec nesouvisí. Nenech se zaskočit tím, že takováto aplikace pravděpodobnosti působí značně nepravděpodobně. :-). Technice, kterou si za chvíli předvedeme, se říká pravděpodobnostní metoda. Jako druhou novinku zavedeme náhodné veličiny a ukážeme si, k čemu je dobré znát jejich průměrnou hodnotu. Naše znalosti pak použijeme pro vylepšení pravděpodobnostní metody.

Pravděpodobnostní metoda vůbec není jednoduchá, takže pokud se budeš ztrácet, přečti si nejprve kapitolu o náhodných veličinách, která na pravděpodobnostní metodě nezávisí. Ačkoli se Ti pravděpodobnostní metoda může hodit v řešení seriálových příkladů, v příštím díle na ni nebudeme navazovat. Nakonec opět podotýkáme, že pro pochopení nových pojmů není potřeba pokoušet se vyřešit všechny úlohy, ale je dobré se v každé sekci alespoň o několik úloh pokusit. Pokud se Ti to ovšem nebude moc dařit, vždy jsou tu pro Tebe nápovědy na konci seriálu.

Pravděpodobnostní metoda

Metoda v matematice je trik, který je použit více než jednou.

Ron Getoor

Jak jsme avizovali, na úvod si ukážeme, jak naše stávající znalosti použít v nezvyklém prostředí. Doteď jsme se totiž věnovali především úlohám, v nichž se pravděpodobnost přímo vyskytuje. Teď si ale ukážeme, že pravděpodobnost je ten správný trik i pro mnohé úlohy, které o pravděpodobnosti vůbec nemluví. Ilustruje to následující příklad, jehož překvapivé řešení následuje po pár odstavcích vysvětlujících, proč je těžké úlohu vyřešit jinak.

Úloha 1. Na soustředění přijelo dvacet čtyři účastníků, které je potřeba na závěrečnou hru rozdělit do dvou týmů. Týmy nemusí být stejně velké, jeden z nich by mohl obsahovat i všechny účastníky. Na soustředění už několik her proběhlo a organizátoři nechtějí, aby se týmy opakovaly: stanovili si tedy deset podmínek, přičemž každá z nich říká, že nějaká konkrétní šestice nemá být celá ve stejném týmu. Dokaž, že je možné účastníky rozdělit tak, aby všechny podmínky byly splněny.

Než budeš pokračovat ve čtení, zkus si nejprve nad úlohou popřemýšlet sám (sama). Nejpřirozenější způsob, jak k ní přistoupit, je snažit se nějak explicitně říct, jak budou oba týmy vypadat. Ale ouha: o deseti podmínkách toho moc nevíme, takže není vůbec jasné, jak týmy zkonstruovat. Jediné, co víme naprosto přesně, je to, jak budou vypadat týmy, které některou podmínku porušují, takže se tuto znalost pokusíme v řešení zužitkovat.

Vžij se do role ubohého organizátora, který má týmy sestavit. Podmínky mezi sebou mohou komplikovaným způsobem interagovat, což vede na nesmírně úmorné rozebírání spousty možností. Někáký nekonstruktivní důkaz, který se tomuto rozboru vyhýbá elegantní oklikou, sice může prokázat, že vyhovující rozdělení existuje, ale jen velmi těžko dá přímý návod na jeho nalezení. Ze zoufalství může organizátor prostě tipovat rozdělení na týmy doufaje, že nakonec jedno z nich bude fungovat. Ověřit, zda dané rozdělení vyhovuje, či ne, je totiž našťastí velmi jednoduché.

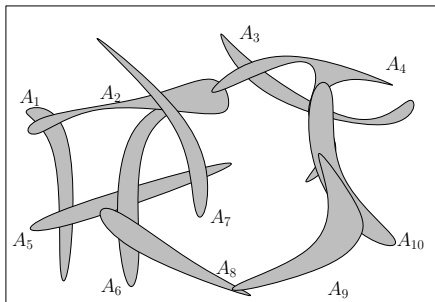
Poněkud nečekaně se tento na první pohled nezodpovědný přístup dá dotáhnout do podoby formálního důkazu. Můžeme si totiž představit pravděpodobnostní prostor, jehož elementární jevy jsou všechna možná rozdělení do týmů. Trik je následující: Dokážeme-li, že pro náhodně vybraný tým z tohoto prostoru budou všechny podmínky najednou splněny s nenulovou pravděpodobností, plyne z toho, že pro alespoň jeden elementární jev jsou všechny podmínky splněny. To ale znamená, že alespoň jedno rozdělení vyhovuje. A to přesně chceme dokázat!

Motto triku, který chceme využít, tedy je: *Pokud má náhodné zvíře ze ZOO rypáček s nenulovou pravděpodobností, pak v ZOO existuje zvíře, které má rypáček.* Pojďme nyní tuto (zcela triviální a zdánlivě nezajímavou) myšlenku využít ke spojení všech nastíněných nápadů a dořešení příkladu:

Řešení. Rozdělit účastníky na dva týmy vlastně znamená zvolit podmnožinu účastníků, kteří budou v prvním týmu. My tuto podmnožinu zvolíme náhodně. Zvolení takové podmnožiny si můžeme

představovat buď jako náhodný výběr z 2^{24} možných podmnožin, nebo jako 24 nezávislých náhodných rozhodnutí, zda bude daný účastník v prvním týmu (volíme s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Druhý přístup se mnohem lépe hodí pro naše účely.

Nyní si zavedme deset jevů $A_1, \dots, A_{10}$, přičemž jev A_i zahrnuje elementární jevy odpovídající rozdělením, která jsou nepřipustná kvůli tomu, že i -tá ze zakázaných šestic je ve stejném týmu. Spočítejme nyní pravděpodobnosti toho, že nastane nějaký z těchto jevů. Aby takový jev nastal, musí být buď všech šest účastníků v prvním týmu, nebo všech šest účastníků ve druhém týmu. Pravděpodobnost každého z těchto jevů je díky nezávislosti 2^{-6} ; celková pravděpodobnost toho, že nastane jev A_i , je díky disjunktnosti těchto dvou jevů rovna 2^{-5} .



Obrázek obsahující našich deset jevů naznačuje, že spolu můžou souviset nějakým dost komplikovaným způsobem. Žádný jev ale není moc pravděpodobný, takže jejich sjednocení (vše, co je šedou barvou) v žádném případě nepokryje celý pravděpodobnostní prostor (obdélník).

Stačí tedy spočítat, že $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}) < 1$. K tomu využijeme odhad z prvního dílu, že pravděpodobnost sjednocení je vždy nejvýše rovna součtu pravděpodobností. Jinými slovy, nic horšího, než že jsou všechny jevy disjunktní, se nemůže stát. Dostáváme tak

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_{10}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{10}) \leq 10 \cdot 2^{-5} = \frac{10}{32}.$$

Pravděpodobnost, že ani jeden z jevů A_1 až A_{10} nenastane, je tedy alespoň $\frac{22}{32}$, což je rozhodně větší než nula. Tím je úloha vyřešena.

Pokud Tě tento důkaz zaskočil, nesmutni! Když autoři tohoto seriálu poprvé viděli podobný pravděpodobnostní důkaz, považovali jej za velký podvod. To proto, že takovýto důkaz by se přece dal stejně, ba možná dokonce jednodušeji, říct i bez pravděpodobnostních termínů, například takto:

Řešení. Máme 2^{24} možností, jak účastníky rozdělit do dvou týmů. Spočítáme, že 10 podmínek ze zadání dohromady zakazuje méně než 2^{24} možných rozdělení, a proto aspoň jedno bude vyhovovat.

Každá podmínka říká, že daných 6 lidí nesmí být ve stejném týmu. Kolik je možných rozdělení do dvou týmů takových, že daných 6 lidí je ve stejném týmu? Stačí si vybrat jeden ze dvou týmů, ve kterém bude oněch 6 lidí, a pro zbylých 18 si můžeme vybrat libovolně. Každá podmínka tedy zakazuje $2 \cdot 2^{18}$ možných rozdělení do týmů. Všechny deset podmínek tak dohromady zakáže nejvýše $10 \cdot 2 \cdot 2^{18}$ rozdělení, což je ale méně než 2^{24} . Proto nějaké vhodné rozdělení existuje.

Všimni si, že tento důkaz je ve své podstatě úplně stejný jako ten pravděpodobnostní, jenom nepoužíváme termíny jako „klasický pravděpodobnostní prostor“ či „nezávislost jevů“. Možná je i intuitivnější, neboť přesně ukazuje, proč úloha platí: podmínky ze zadání toho prostě dohromady nemohou moc zakázat.

Proč si tedy dáváme tu práci a vysvětlujeme první řešení? Na danou otázku budeme odpovídat po zbytek tohoto dílu. Ukážeme si několik těžších úloh, jejichž řešení bude založeno na podobném principu. Později pak začneme používat složitější pravděpodobnostní pojmy. Čím složitější pojmy, tím těžší bude vymyslet „počítací řešení“, které jsme právě předvedli. Tím elegantnější Ti,

doufáme, bude připadat řešení pravděpodobnostní. Zkus se ještě jednou zamyslet nad předešlou úlohou a polož si následující otázky:

Úloha 2.

- (1) Co by se stalo, kdyby zakázané skupiny účastníků mohly být větší než 6?
- (2) Co kdyby počet účastníků směl být větší než 24?
- (3) Rozmysli si, že existují minimálně dva elementární jevy, které leží v průniku $A_1 \cap \dots \cap A_{10}$ (obrázek jevů tedy není moc přesný). Na základě toho vyřeš Úlohu 1 pro 32 podmínek místo 10.
- (4) (poučná) Co by se stalo, kdybychom požadovali, aby oba týmy byly stejně velké, a v řešení bychom tedy místo pravděpodobnostního prostoru všech 2^{24} podmnožin pracovali s prostorem všech $\binom{24}{12}$ podmnožin velikosti 12? V tomto případě se neboj použít kalkulačku.

Použití pravděpodobnostní metody si můžeš ozkoušet na následujících úlohách. Podobně jako vzorový příklad se dají vyřešit i prostým počítáním možností. Přesto však doporučujeme použít pravděpodobnost, i pokud je Ti používání pravděpodobnostních úvah zatím pořád trochu proti srsti; slibujeme¹², že se Ti budou zkušenosti s ní v budoucnu velmi hodit.

Ještě předtím si dovolíme krátkou vsuvku. Základním trikem, který se zpravidla používá při řešení pravděpodobnostní metodou, je prostinký, leč značně užitečný odhad pravděpodobnosti sjednocení jevů pomocí součtu odpovídajících pravděpodobností¹³, tedy

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Stručný návod, jak řešit pravděpodobnostní metodou následující úlohy¹⁴, je tedy:

- (1) Vyber si, co budeš volit náhodně; někdy se totiž nabízí víc možností. Pak si rozmysli, jak vypadá pravděpodobnostní prostor odpovídající této volbě.
- (2) Jak v rámci tohoto pravděpodobnostního prostoru vypadají podmínky, které musíš splnit? Každou podmínku bude vyjadřovat nějaký jev, který odpovídá tomu, že *nebyla* splněna.
- (3) Spočítej (nebo aspoň odhadni) pravděpodobnosti těchto jevů.
- (4) Odhadni shora pravděpodobnost sjednocení těchto jevů (tedy pravděpodobnost toho, že nastal alespoň jeden tento jev) pomocí součtu jejich pravděpodobností.
- (5) Ověř, že součet pravděpodobností je ostře menší než jedna; pokud náhodou není, tak zkontroluj všechny svoje výpočty, a pokud to stále nefunguje, vrať se k bodu (1).
- (6) Všechny podmínky budou splněny s nenulovou pravděpodobností, takže existuje volba, která všechny podmínky splňuje. Hotovo!

Úloha 3. Chceme rozdělit skupinu PraSátek na čtyři týmy. Máme přitom podmínky typu „z této skupinky PraSátek o velikosti n musí být alespoň jedno PraSátko v každém týmu“. Dokaž, že je-li podmínka méně než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, lze PraSátka rozdělit požadovaným způsobem.

Obecně platí, že vždy chceme pracovat s co nejjednodušším pravděpodobnostním prostorem, aby se s ním dobře počítalo. Překvapivě často totiž i poměrně „hloupé“ metody dají dostatečně silný odhad. Například pokud se v následujících úlohách rozhodneš, že budeš volit k náhodných objektů z n , tak je nejintuitivnější vybrat náhodnou k -tici, což se dá udělat $\binom{n}{k}$ způsoby. Mnohdy se však vyplatí provést místo toho k nezávislých náhodných výběrů, takže máš n^k možných výsledků a některý objekt může být vybrán vícekrát. Počítání bude nicméně jednodušší a úlohy obvykle povolují i taková řešení, ačkoli vedou na trochu horší odhad.

¹²Nebo vyhrožujeme – záleží na Tvém úhlu pohledu.

¹³V angličtině (a často i v češtině) se mu říká *union bound*.

¹⁴Kromě té, která je označená jako těžká. Není těžká pro nic za nic.

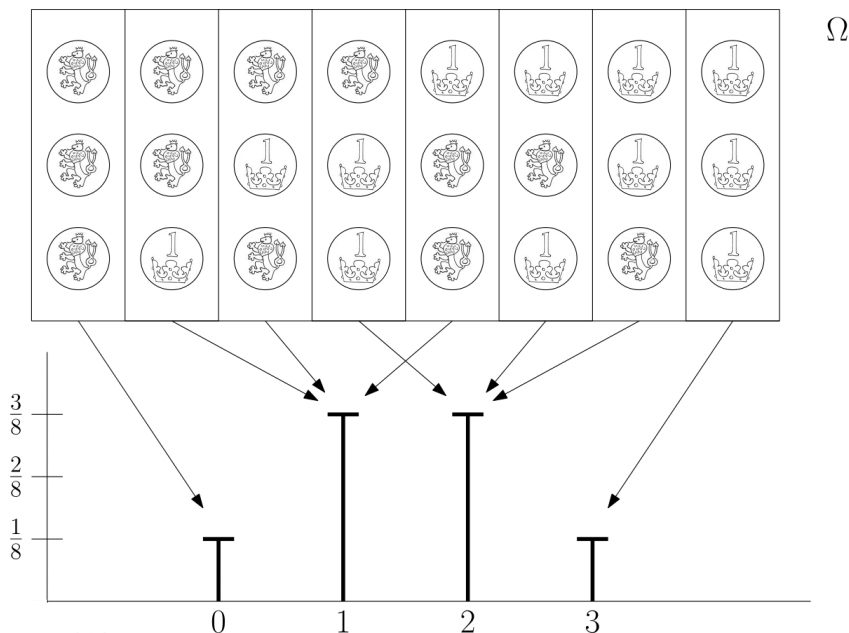
znají, nebo všichni neznají. Tomuto faktu se říká Ramseyova věta¹⁷.

Náhodné veličiny

Doufáme, že sis na předchozích příkladech osvěžil(a), jak fungují pravděpodobnostní prostory. Nyní je na čase předvést si nový koncept. Podobně jako u pravděpodobnostních prostorů či nezávislosti však vlastně nebudeme dělat nic jiného, než exaktně formulovat věci, které jsou Ti asi intuitivně docela jasné.

Výsledkem pravděpodobnostních pokusů je obvykle číslo. Proto i elementární jevy našeho prostoru jsou často čísla – kupříkladu v případě hodu kostkou byla naším prostorem množina čísel $\{1, 2, \dots, 6\}$. Pokud jsou skutečně prvky prostoru čísla, můžeme dále klást zvědavé otázky, třeba: „Jaký je průměrný výsledek pokusu?“ Třeba v našem příkladu s kostkou je aritmetický průměr možných výsledků roven $\frac{1+2+\dots+6}{6} = 3,5$ ok. Jinými slovy, při průměrném hodu padne 3,5 ok. Samozřejmě 3,5 ok nikdy padnout nemůže, ale intuice nám velí očekávat, že pokud hodíme kostkou stokrát, celkový počet ok se bude pohybovat okolo 350.

Ne vždy je ale náš prostor takto jednoduchý. Uvažme třeba prostor odpovídající hodu třemi mincemi. V takovém případě máme $2^3 = 8$ možných výsledků. Řekněme, že nás zajímá, kolikrát padla panna. Prostým výčtem možností zjišťujeme, že s pravděpodobností $\frac{1}{8}$ nepadla žádná a s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ padla jedna panna. Dále s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ padly dvě panny a s pravděpodobností $\frac{1}{8}$ padly tři panny.



Nyní nás opět může zajímat, kolik panen padne v průměru, hodíme-li třikrát minci. V takovém případě buď budeme počítat průměr ze všech osmi možných výsledků, nebo si ušetříme práci a použijeme vážený průměr, tedy každý možný výsledek vynásobíme jeho pravděpodobností. Dostáváme,

¹⁷Frank Ramsey (1903–1930) touto větou založil obor, kterému se dnes říká Ramseyova teorie.

že průměrný počet panen je $\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3+6+3}{8} = 1,5$. To je zcela v souladu s naší intuicí, protože v jednom hodu mincí průměrně padne 0,5 panny, takže ve třech hodech očekáváme $3 \cdot 0,5 = 1,5$ panny.

Ačkoli nás tento příklad na začátku předchozího dílu vedl k zavedení pravděpodobnosti, vlastně zatím nemáme žádný způsob, jak zformalizovat úvahu „třikrát hodíme mincí a pokaždé v průměru padne 0,5 panny, takže dohromady v průměru padne 1,5 panny“. Neboj, za chvíli se to změní!

Úloha 10.

- (1) Rozmysli si, že hodíme-li n mincemi, je pravděpodobnost, že padne k panen, stejná jako pravděpodobnost toho, že padne $n - k$ panen.
- (2) Na základě toho spočti průměrný počet panen, které padnou při hodu n mincemi.

Náhodné veličiny jsou způsob, jak se vypořádat se situacemi, kdy máme složitější prostor, ale vlastně nás z něj zajímá jen jeden jeho aspekt, tedy chceme každý elementární jev nahradit nějakým číslem.

Formálně je náhodná veličina funkce, která každému prvku prostoru přiřadí nějaké reálné číslo.

Definice. Mějme konečný pravděpodobnostní prostor Ω . Náhodná veličina X na prostoru Ω je libovolná funkce z Ω do $\mathbb{R}$.

Náhodné veličiny je zvykem značit velkými písmeny z konce abecedy, tedy X, Y, Z . V případě hodu třemi mincemi můžeme zavést náhodnou veličinu, která pro každou trojici hodů říká, kolik panen celkově padlo. Tento příklad možná působí až příliš jednoduše. Pravděpodobnostní prostory jsou ale často mnohem složitější. Představ si třeba, že zajdeš do knihovny a půjčíš si tam náhodnou knížku. Tomuto pokusu odpovídá nesmírně složitý prostor obsahující všechny knihy v knihovně. Třeba nás ale zajímá jen to, jaký je průměrný počet stránek půjčené knížky nebo kolik je v ní obrázků. Potom se hodí pro tento parametr zavést náhodnou veličinu.

Všimni si, že pokud se díváme na náhodnou veličinu na obrázku, jsou tyto tři elementární jevy $\omega_1 = (\text{panna, orel, orel})$, $\omega_2 = (\text{orel, panna, orel})$ a $\omega_3 = (\text{orel, orel, panna})$ nerozlišitelné – všechny dávají tu samou hodnotu. Vzhledem k tomu, že náhodná veličina je funkce, můžeme také psát $X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1$. Jakmile zavedeme náhodnou veličinu, nabízí se seskupit si myšlenkově elementární jevy daného prostoru podle toho, jaký pro ně dá naše náhodná veličina výsledek.

Jev, který je tvořen právě těmi elementárními jevy, pro které dává veličina X výsledek x , se značí prostě „ $X = x$ “. V našem případě s náhodnou veličinou X , jejíž hodnotou je celkový počet panen, jevem $X = 1$ myslíme přesně množinu trojic (panna, orel, orel), (orel, panna, orel) a (orel, orel, panna). Můžeme pak psát $P(X = 1) = \frac{3}{8}$. Zcela obdobně pak můžeme definovat jevy $X \geq x$ atd. V našem příkladě tak $P(X \geq 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, neboť jev $X \geq 2$ je sjednocením dvou disjunktních jevů $X = 2$ a $X = 3$.

Tento způsob práce s náhodnými veličinami přesně odpovídá histogramu na obrázku. Když pracujeme s náhodnou veličinou, často můžeme v jistém smyslu zapomenout na to, jak vypadá původní pravděpodobnostní prostor. Stačí umět spočítat pravděpodobnosti jevů typu $X = x$.

S náhodnými veličinami budeme později chtít pracovat podobně jako s normálními čísly, speciálně je budeme chtít počítat. Dvě náhodné veličiny můžeme sečíst pouze tehdy, jsou-li obě definovány pro stejný pravděpodobnostní prostor. Součtem $X_1 + X_2$ pak prostě myslíme veličinu, která pro každý elementární jev ω dává $X_1(\omega) + X_2(\omega)$. Třeba v našem případě s hodem kostkou, kde X značí počet ok, která padla (tedy jsou na horní stěně kostky), můžeme také definovat veličinu Y značící, kolik ok je na dolní stěně kostky. Obě jsou definované pro stejný pravděpodobnostní prostor, takže je můžeme sečíst. Výsledkem je poněkud nudná náhodná veličina $X + Y$, která pro každý možný jev dává hodnotu 7.

Stejně jako součet můžeme definovat i jiné operace jako $c \cdot X$ (hodnoty X vynásobíme konstantou c), $X_1 \cdot X_2$ nebo $1/X$. V našem příkladu z knihovny tak kupříkladu můžeme uvážit počet slov a počet kapitol v náhodně vybrané knize, což jsou dvě náhodné veličiny. Po jejich vydělení dostaneme

průměrný počet slov na kapitulu, což je opět náhodná veličina nabývající různých hodnot pro různé knížky.

Úloha 11.

- (1) Pro jaké náhodné veličiny X platí $X + X = 2 \cdot X$?
- (2) Pro jaké náhodné veličiny X platí $X \cdot X = X$?

Střední hodnota náhodné veličiny

Lottery: a tax on people who are bad at math.
Ambrose Bierce

Když jsme dávali příklady toho, k čemu jsou dobré náhodné veličiny, ukazovali jsme, jak spočítat vážený aritmetický průměr hodnot náhodné veličiny. Tomuto „průměru náhodné veličiny“ se říká **střední hodnota**¹⁸.

V případě klasického pravděpodobnostního prostoru (např. hodu kostkou) je střední hodnotou normální aritmetický průměr. Pokud ale pracujeme s obecným konečným prostorem (a obvykle i při práci s klasickým prostorem), používáme vážený aritmetický průměr, tedy sčítáme možné výsledky vynásobené jejich pravděpodobnostmi.

Definice. Mějme náhodnou veličinu X definovanou pro prostor $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.¹⁹ Potom střední hodnotou X myslíme výraz

$$E(X) = P(\omega_1) \cdot X(\omega_1) + P(\omega_2) \cdot X(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) \cdot X(\omega_n).$$

V případě klasického pravděpodobnostního prostoru tak speciálně dostáváme $E(X) = (X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n))/n$. Když jsme motivovali střední hodnotu tím, že jsme spočítali střední počet padlých panen při hodu třemi mincemi, bylo pro výpočet snazší elementární jevy seskupit podle toho, jaký výsledek dala náhodná veličina. Nabývá-li obecně náhodná veličina hodnot $x_1, x_2, \dots, x_m$, můžeme použít následující vzoreček:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \dots + P(X = x_m) \cdot x_m.$$

Úloha 12. Rozmysli si, že tento vzoreček opravdu plyne z definice střední hodnoty.

Úloha 13. Najdi náhodnou veličinu X nabývající kladných hodnot, pro kterou platí $E(X) \geq 2$ a zároveň $E(1/X) \geq 2$.

K čemu je střední hodnota dobrá v praxi? Abychom si odpověděli na tuto otázku, vraťme se do poloviny sedmáctého století, kdy byly základy teorie pravděpodobnosti poprvé zformulovány v korespondenci dvou věhlasných francouzských matematiků: Pierra de Fermata²⁰ a Blaise Pascala²¹. Teorii vymysleli, aby odpověděli na zvidavé otázky jistého francouzského šlechtice, který si vydělával hraním hazardních her. Jednou z her, která šlechtice zajímala, byla následující:

Hra. Hodíme 24krát dvěma kostkami. Pokud alespoň jednou padnou dvě šestky, vyhrajeme jeden livre²². Pokud ne, prohrájeme jeden livre.

Vyplatí se hrát tuto hru? To zjistíme, když porovnáme pravděpodobnost výhry s pravděpodobností prohry.

¹⁸V angličtině se používá *expected value*, což v doslovném překladu znamená očekávaná hodnota.

¹⁹Jinými slovy, náš pravděpodobnostní prostor Ω sestává z elementárních jevů $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

²⁰Pierre de Fermat (1601–1665) je znám jako autor Malé a Velké Fermatovy věty.

²¹Blaise Pascala (1623–1662) asi znáš hlavně z fyziky, ačkoli se Pascal věnoval i matematice nebo teologii. Také sestrojil jednu z prvních mechanických kalkulaček.

²²Jedná se o název historické měny, která byla ve Francii používána od 9. století do roku 1795.

Úloha 14. Vyjádři pravděpodobnost výhry v této hře.

Pravděpodobnost výhry činí v tomto případě asi 49 procent, takže se hru hrát nevyplatí, i když to na první pohled není vůbec jasné. Výherní částka však nemusí vždy být rovna proherní. Zamysli se nad následující hrou.

Hra. Hodíme si poctivou kostkou. Pokud padne 1, 2, 3 nebo 4, dostaneme 1 Kč. Jinak prohrajeme 10 Kč.

Chtl(a) bys hrát takovouto hru? Troufáme si tvrdit, že ne, intuice totiž říká, že i když je pravděpodobnost výhry dvakrát větší než pravděpodobnost prohry, při prohře zaplatíme desetkrát víc, než kolik vyděláme při výhře.

A přesně v této situaci vstupuje na scénu střední hodnota náhodné veličiny. Je-li náhodnou veličinou náš zisk (prohrajeme-li peníze, prostě to znamená, že zisk je záporný), střední hodnota nám říká, jaký je „očekávaný“ zisk jedné takové hry. Pokud bychom tedy danou hru hráli tisíckrát za sebou, očekáváme, že náš výdělek bude činit přibližně $1000 \cdot E(X)$. Dalo by se říct, že zajímavost i zálučnost hazardních her se skrývá v tomto vágním „přibližně“: sice si můžeš spočítat, jaký bude očekávaný výdělek, ale nikdo Ti nezaručí, že ho skutečně dosáhneš, protože mohou nastat i extrémně nepravděpodobné jevy.

Pro druhou z uvedených her tak prostě spočítáme, že střední hodnota výdělku X je $E(X) = = \frac{4}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot (-10) = \frac{-16}{6}$. Ačkoli je tedy pravděpodobnost výhry větší než pravděpodobnost prohry, lze očekávat, že budeme-li hrát dostatečně dlouho, ztratíme v průměru necelé 3 Kč každou hru.

Na zákonech pravděpodobnosti si postavila živobyť kupříkladu kasína. Pokud se v kasinu rozhodneš hrát nějakou hru založenou na náhodě, můžeš se spolehnout na to, že vypočítáš-li si střední hodnotu svého výdělku, bude vždy záporná.

Úloha 15. Při ruletě se kulička kutálí po obvodu kola, dokud neskončí v jedné z 37 přihrádek očíslovanými od 0 do 36 včetně. Uvažme zjednodušenou variantu rulety, kde sudá čísla kromě nuly jsou černá, lichá čísla jsou červená a nula zelená. Dají se s ní hrát kupříkladu následující hry:

- (1) Vsadíš si x Kč na to, že kulička skončí na černém políčku. Pokud se tak stane, vrátí se Ti $2 \cdot x$ Kč. Jinak se Ti nevrátí nic.
- (2) Vsadíš si x Kč na to, že kulička skončí na konkrétním políčku. Pokud se sázka vydaří, vrátí se Ti $36 \cdot x$ Kč. Jinak se Ti nevrátí nic.

Ověř, že v obou případech je střední hodnota výdělku záporná.

Právě díky principům pravděpodobnosti fungují i pojišťovny. Pojišťování se je totiž vlastně také forma hazardu. Můžeš si být jistý (jistá), že částka, kterou po Tobě bude chtít pojišťovna za pojištění proti povodni, bude zaručeně větší než pravděpodobnost povodně vynásobená škodou, která nastane, pokud povodeň opravdu přijde.

Přesto máme o pojišťování poněkud jiné smýšlení než o hazardu. Jeden důležitý rozdíl je v tom, že povodně nepřicházejí moc často, ale když přijdou, napáchají obvykle velké škody. Nám tak nevdá, že si platíme za to, že v případě nepravděpodobné události nepříjeme na mizinu.

Pokud se Ti někdy v budoucnu přihodí, že budeš vlastnit hotel, asi se Ti vyplatí jej pojistit proti živelné pohromě, vypuknutí nakažlivé nemoci apod. Pokud se Ti ale někdy v budoucnu přihodí, že budeš vlastnit tisíce hotelů po celém světě, vzpomeň si na tuto kapitolu²³ a uvědom si, že se nevyplatí pojišťovat jednotlivě každý hotel. Každým rokem sice pravděpodobně několik hotelů postihne nějaká pohroma, ale ušlý zisk bude více než vyvážen výdělkem zbylých hotelů. Kdybys místo toho každý hotel pojistil(a), sice by Ti pojišťovna v případě pohromy zaplatila ušlý zisk, ale dohromady bys zaplatil(a) víc, než kolik bys dostal(a).²⁴

Sumační notace

Dříve než budeme moci pokračovat ve zkoumání náhodných veličin, zavedeme si nové značení, které

²³A na nás.

²⁴Tomuto principu se říká samopojištění.

je k nezaplacení, jakmile je potřeba zapisovat složitější součty. To bude brzy i náš případ.

Celkem často se stává, že chceme sečíst nějaký velký počet čísel, třeba všechna přirozená čísla od 1 do 100. V takovém případě napíšeme prostě jen $1+2+\dots+100$ a předpokládáme, že každý pochopí, co tím myslíme. Někdy dokonce počet sčítanců ani neznáme předem; třeba když sčítáme čísla od 1 do n , zapíšeme to prostě jako $1+2+\dots+n$. V předchozím díle v kapitole o nekonečných prostorech jsme se dokonce setkali s nekonečnými součty, což vedlo k výrazům jako $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$.

Tento trojtečkový zápis je pohodlný a skvěle funguje pro jednoduché případy. Nicméně má i své problémy. Může stát, že existuje víc než jedna rozumná interpretace takového zápisu, což může vést k nedorozuměním: například $3 + 5 + 7 + \dots + 97$ může znamenat součet všech lichých čísel od 3 do 97, ale stejně tak dobře to může být součet všech lichých prvočísel menších než 100. Těžce spoléháme na lidskou intuici, protože vlastně neexistuje žádná jednoznačně správná interpretace tří teček, takže i nejjednodušší výrazy jako $1 + 2 + \dots + 100$ oplývají jistou nejednoznačností.

Taky se nám může stát, že místo posloupnosti budeme sčítat čísla v nějaké tabulce. Pak začíná být intuitivní zápis nepřehledný a komplikovaný, protože tam těch trojteček zkrátka je trochu moc. V úplně obecném případě však ani nevíme, jestli se množina čísel, která sčítáme, dá pěkně představit jako posloupnost, tabulka nebo něco úplně jiného. Příkladem je třeba naše definice střední hodnoty náhodné veličiny. Tu spočteme tak, že sečteme výrazy $P(\omega) \cdot X(\omega)$ pro všechna $\omega \in \Omega$.

Hodil by se tedy nějaký elegantnější zápis pro „podívej se na všechny $\omega \in \Omega$, spočti, kolik je $P(\omega) \cdot X(\omega)$, a všechna tahle čísla sečti“.

Takový zápis si teď představíme. Základním kamenem nové notace je velké řecké písmeno sigma: Σ .²⁵ Výrazu, který s jeho pomocí vytvoříme, pak říkáme **suma**. Notaci používáme následovně: pokud chceme prostě sečíst čísla od a do b včetně, napíšeme

$$\sum_{i=a}^b i.$$

Tím myslíme: Představ si, že proměnná i je na začátku a a my k ní v každém kroku přičteme jedna, než se dostaneme na b . V každém kroku (včetně toho, kdy $i = b$) si navíc připočteme i k výslednému součtu. Pokud bychom tak chtěli sečíst lichá čísla od 3 do 97, napíšeme prostě $\sum_{i=1}^{48} (2i+1)$. Tato notace totiž znamená součet $(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots + (2 \cdot 48 + 1) = 3 + 5 + \dots + 97$. Pokud chceme sčítat hodnoty nějaké obecné funkce f , napíšeme prostě $\sum_{i=a}^b f(i)$.

Novou proměnnou, kterou jsme zavedli v Σ notaci, je zvykem značit i , j nebo k . Samozřejmě ji můžeš značit jak chceš, pokud se tak nejmenuje nějaká jiná proměnná, kterou už používáš. Pozor, tato nová proměnná má význam pouze „uvnitř sumy“!

Úloha 16. Rozmysli si, že

- (1) $\sum_{i=a}^b (f(i) + g(i)) = \sum_{i=a}^b f(i) + \sum_{i=a}^b g(i)$,
- (2) $\sum_{j=a}^b c \cdot f(j) = c \cdot \sum_{j=a}^b f(j)$,
- (3) $\sum_{k=a}^b c = (b - a + 1) \cdot c$.

Nová notace na první pohled může působit zbytečně složitě, ale její výhoda se dostaví, hned jak se rozhodneme sčítat něco složitějšího než posloupnost, třeba tabulku. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Úloha 17. V tabulce 10×10 jsou napsána přirozená čísla tak, že v políčku na i -tém řádku a j -tém sloupečku je napsáno číslo $i + 2 \cdot j$. Jaký je součet čísel v tabulce?

Úloha se dá vyřešit různými způsoby. My si ukážeme přístup „prostě to sečtu“, který je velice snadný, pokud ses již se sumami trochu zžil(a).

²⁵V řecké abecedě Σ odpovídá „S“, jež je počátečním písmenem latinského *summa*. Mimochoodem, jestli ses už někdy setkal(a) se znakem pro integrál $\int$, asi už tušíš, proč připomíná protáhlé písmeno S.

Řešení. Pro i -tý řádek si napíšeme součet čísel na tomto řádku jako $\sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j)$. Celkový součet všech čísel v tabulce je tak

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j).$$

Z předešlé úlohy už víme, že vnitřní sumu můžeme upravit jako

$$\sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j) = 10 \cdot i + 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j.$$

Snadno spočteme, že $\sum_{j=1}^{10} j = 55$. Můžeme tak dosadit do výrazu s dvojitou sumou a spočítat

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i + 2 \cdot j) = \sum_{i=1}^{10} (2 \cdot 55 + 10 \cdot i) = 10 \cdot 2 \cdot 55 + 10 \cdot \sum_{i=1}^{10} i = 1100 + 10 \cdot 55 = 1650.$$

Všimni si, že nezáleží na tom, jestli se rozhodneme čísla v tabulce počítat po řádcích, nebo po sloupečcích (my počítali po řádcích). To zní jako nevinny a zcela triviální fakt, ale jedná se o jeden z největších triků v matematice²⁶, který zanedlouho také nejdou použijeme.

Sumy se navíc na rozdíl od trojtečkové notace dají použít i ve chvíli, kdy počítáme přes netradiční množiny, jako třeba lichá prvočísla menší než 100. V takovém případě se obvykle prostě napíše

$$\sum_{\substack{p \text{ je prvočíslo,} \\ 3 \leq p \leq 100}} p.$$

Jak jsme již naznačili, pro nás budou sumy nesmírně užitečné při počítání s náhodnými veličinami, například střední hodnota se spočítá tak, že pro všechny elementární jevy ω našeho prostoru sečteme $P(\omega) \cdot X(\omega)$. V naší notaci pak prostě píšeme

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Tím myslíme, že daný výraz sečteme pro úplně všechny ω , pro která platí $\omega \in \Omega$.

Jak víš, střední hodnotu také můžeme počítat tak, že seskupíme elementární jevy podle toho, jaký dávají výsledek, a spočítáme vážený průměr. Označíme-li obor hodnot X jako $H(X)$, můžeme psát $E(X) = \sum_{x \in H(X)} P(X = x) \cdot x$.

Linearita střední hodnoty

Náhodné veličiny jsou nesmírně užitečným nástrojem, ale aby se projevily v plné síle, musíme jim obvykle mít vícero. V této kapitole si ukážeme, jak pracovat s několika náhodnými veličinami. Základním nástrojem je takzvaná linearita střední hodnoty, což není nic jiného než pozorování, že střední hodnota součtu několika veličin je rovna součtu jejich středních hodnot.

Vraťme se nyní k našemu pravděpodobnostnímu prostoru odpovídajícímu třem hodům mincí. Uvažovali jsme náhodnou veličinu X , která odpovídá počtu panen, které padly. Spočetli jsme, že střední hodnota X je 1,5.

Jak jsme si také řekli, výsledek 1,5 je velice přirozený: pokud si totiž hodíme jen jednou mincí, střední hodnota počtu panen bude 0,5. Při hodu třemi mincemi tak očekáváme, že střední hodnota bude třikrát větší.

²⁶ A také v účetnictví před příchodem počítačů: chceš-li si být opravdu jistý (jistá), že jsi správně sečetl(a) výplaty deseti zaměstnanců za dvanáct měsíců, sečti nejprve výplaty v tabulce po zaměstnancích a pak po měsících.

To je velice intuitivní myšlenka, ale i takové se musejí dokázat. Z definice náhodné veličiny nic takového totiž neplyne! Veličina „počet panen při hodu třemi mincemi“ je dokonce definovaná na jiném prostoru než veličina „počet panen při hodu jednou mincí“. Ukažme si nyní jednoduchý důkaz této myšlenky řečený v jazyce náhodných veličin.

Zavedeme si na našem osmiprvkovém prostoru tři náhodné veličiny X_1 , X_2 a X_3 , kde X_i říká, kolik panen padlo v i -tém kroku. Například X_1 je rovno jedné pro čtyři elementární jevy (panna, panna, panna)²⁷, (panna, panna, orel), (panna, orel, panna) a (panna, orel, orel). Jinak je X_1 rovno nule.

Všimni si, že pro každý jev ω platí $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$. Například pro jev $\omega = (\text{panna}, \text{orel}, \text{panna})$ je $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 0$, $X_3(\omega) = 1$ a $X(\omega) = 1 + 0 + 1 = 2$. To v našem zápisu zapisujeme jako $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Ω								
								
								
X_1 :	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2 :	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3 :	0	1	0	1	0	1	0	1
$X = X_1 + X_2 + X_3$:	0	1	1	2	1	2	2	3

Dále si všimni, že $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 0,5$. A teď přijde trik: Protože $X = X_1 + X_2 + X_3$, můžeme vyjádřit střední hodnotu X jako součet středních hodnot veličin X_1 , X_2 a X_3 , který ale snadno spočítáme:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot (X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)) \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X_1(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X_2(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X_3(\omega) \\
 &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5.
 \end{aligned}$$

Faktu, že předchozí výpočet funguje, se říká **linearita střední hodnoty**. Pojďme si ho nyní zformulovat jako obecné tvrzení.

Tvrzení. (linearita střední hodnoty) *Pro libovolnou náhodnou veličinu X a reálné číslo c platí $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$. Dále necht' $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované pro stejný pravděpodobnostní prostor Ω . Potom $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$.*

Důkaz. V prvním případě chceme dokázat, že

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot cX(\omega) = c \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega),$$

²⁷Tedy v prvním, druhém i ve třetím kroku padla panna.

což je ale pouhé vytknutí čísla c před sumu.

Přepíšeme-li druhý bod tvrzení v jazyce sum, chceme dokázat, že výraz

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n P(\omega) X_i(\omega)$$

je rovný výrazu

$$E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X_i(\omega).$$

To je ale pouhé přehození sum (chceš-li, sčítáme prvky po řádcích a po sloupečích).

Poznamenejme, že ačkoli jsme si linearitu střední hodnoty ukázali na příkladu hodu třemi mincemi, které jsou na sobě nezávislé, linearita střední hodnoty vůbec žádnou nezávislost nevyžaduje, funguje vždy!

Úloha 18. Viki si hodil deseti kostkami a Jáchym si dvacetkrát hodil falešnou mincí, na které padá panna s pravděpodobností 0,2. Potom od celkového počtu ok, která padla Vikimu, odečetli dvojnásobek celkového počtu panen, které padly Jáchymovi. Jaká je střední hodnota výsledku?

Dej si pozor na to, že předchozí tvrzení funguje pouze pro součet náhodných veličin a obecně neplatí pro jiné operace.

Úloha 19. Najdi dvě náhodné veličiny X_1, X_2 takové, že $E(X_1) \cdot E(X_2) \neq E(X_1 \cdot X_2)$.

Linearita střední hodnoty je nesmírně užitečný nástroj. Pojdme si ukázat jeho použití na následující úloze.

Úloha 20. Na celostátní kolo matematické olympiády dorazilo n soutěžících, přičemž každý dostal visačku. Visačky se nicméně nedopatřením zamíchaly a byly rozdány náhodně – každé možné rozdělení má stejnou pravděpodobnost. Jaký je střední počet soutěžících, kteří dostali visačku se svým jménem?

Spočítejme nejprve, jaký je výsledek pro nějaké malé n , řekněme $n = 4$. Označme si čtyři účastníky písmeny A, B, C, D . Každé možné rozdělení visaček odpovídá nějaké permutaci čtyř písmenek A, B, C, D . My máme pro každou permutaci spočítat, kolik účastníků dostalo svoji visačku – takové účastníky budeme nazývat spokojenými. V následující tabulce každá permutace odpovídá jednomu sloupečku a spokojení účastníci jsou vyznačeni tučně. My máme spočítat průměrný počet spokojených účastníků, tedy máme sečíst hodnoty pro všechny sloupečky, což jsme udělali v poslední řádce. Následně máme vydělit $4! = 24$, abychom dostali pravděpodobnost.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Σ
$A:$	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D	6
$B:$	B	B	C	C	D	D	A	A	C	C	D	D	A	A	B	B	D	D	A	A	B	B	C	C	6
$C:$	C	D	B	D	B	C	C	D	A	D	A	C	B	D	A	D	A	B	B	C	A	C	A	B	6
$D:$	D	C	D	B	C	B	D	C	D	A	C	A	D	B	D	A	B	A	C	B	C	A	B	A	6
$\Sigma:$	4	2	2	1	1	2	2	0	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	0	1	1	2	0	0	24

Označíme-li X počet spokojených účastníků, pohledem na poslední řádku vidíme, že $P(X = 0) = \frac{9}{24}$, $P(X = 1) = \frac{8}{24}$, $P(X = 2) = \frac{6}{24}$, $P(X = 3) = \frac{0}{24}$ a $P(X = 4) = \frac{1}{24}$. Tedy

$$E(X) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{8 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{24} = 1.$$

Tento způsob je dost pracný a vůbec není jasné, jak ho zobecnit pro libovolné n . Co kdybychom ale spokojené účastníky sčítali po řádcích a ne po sloupečích? Vidíme, že v každé řádce je přesně šest spokojených účastníků (poslední sloupeček tabulky), což vůbec není náhoda. Všechny visačky jsou totiž stejné a pro libovolného účastníka proto musí být pravděpodobnost, že dostane danou

visačku, stejná pro všechny visačky. Jinými slovy, když se podíváš na sloupcečky, ve kterých je A na svém místě, zjistíš, že odpovídají $3! = 6$ permutacím písmenek B, C, D . Tento postup je velice snadné zobecnit pro libovolné n a sepsat na jeho základě čistě kombinatorické řešení. My si ukážeme, jak se dá důkaz elegantně zformulovat s využitím linearit střední hodnoty, jejíž podstata, jak víme, je přesné sčítání prvků tabulky po řádcích a po sloupcečkách.

Řešení. Zavedme si n náhodných veličin X_i , přičemž $X_i = 1$, pokud i -tý soutěžící dostal svou visačku, a $X_i = 0$ jinak. Povšimněme si, že pro náhodnou veličinu X „počet soutěžících, kteří dostali svou visačku“ platí $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Povšimněme si, že pravděpodobnost, že i -tý soutěžící dostal svou visačku, je přesně $\frac{1}{n}$, neboť pravděpodobnost, že dostal danou visačku, musí být stejná pro všech n visaček, protože se všechny chovají stejně. Pro náhodnou veličinu X_i tak platí $E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot 1 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{1}{n}$. Z linearit střední hodnoty tak plyne

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

V předchozím důkazu jsme použili náhodné veličiny, které nabývaly pouze hodnoty nula, nebo jedna. Taková veličina se dá plně popsat tím, pro které elementární jevy našeho prostoru dává výsledek jedna. Odpovídá tak vlastně přesně nějakému jevu. Proto se náhodné veličiny, které nabývají pouze hodnoty 0, nebo 1, nazývají **indikátory**, neboť indikují, zda nastal nějaký jev.

Na první pohled se může zdát, že jsou indikátory směšně jednoduché. Linearita střední hodnoty ale ukazuje, že mohou být nesmírně užitečné, neboť i komplikovanější náhodné veličiny se často dají vyjádřit jako součet indikátorů (i počet padlých panen jsme tak ostatně zapsali). Hlavní výhodou této metody je, že nás vůbec nemusí zajímat, jestli jsou jednotlivé jevy nezávislé, protože i kdyby mezi sebou byly provázány nějakými složitými vztahy, tak se jejich střední hodnota stále bude chovat pěkně díky linearitě střední hodnoty.

Tvrzení. *Nechť I_A je indikátor jevu A , tedy náhodná veličina, která nabývá hodnoty 1, nastal-li jev A , a jinak je 0. Potom platí $E(I_A) = P(A)$.*

Důkaz. Indikátor dá jedničku pro všechny elementární jevy, které leží v A , takže z definice střední hodnoty platí $E(I_A) = 0 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} P(\omega) + 1 \cdot \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A)$.

S indikátorovým trikem po ruce se již můžeš pustit do řešení následujících úloh!

Úloha 21. Na stole leží balíček 32 hracích karet. Otočíme prvních pět z nich. Jaká je střední hodnota počtu otočených srdcových karet?

Úloha 22. Na sluníčku se v kroužku hrálo 2018 tuleňátek. Jelikož jsou tuleňátka malá a neposedná, každé z nich v jednu chvíli šťouchlo do náhodně zvoleného souseda (do každého s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Jaká je střední hodnota počtu šťouchnutých tuleňátek?

Úloha 23. Pomocí střední hodnoty nahlédni, že $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot k = \frac{n}{2} \cdot 2^n$.

Následující úloha ukazuje, jak moc je užitečná linearita střední hodnoty. Zatímco spočítat $E(X)$ a $E(Y)$ je jednoduché, zbylé tři části úlohy ukazují, že se zkoumané náhodné veličiny X a Y chovají v různých ohledech velmi rozdílně.

Úloha 24. Kuba a Rado si n -krát hodili mincí. Za každé dva po sobě jdoucí orly dostane Kuba bod (dvojice, za které dostává body, se mohou překrývat). Za každého orla následovaného pannou dostane jeden bod Rado. Označme X a Y náhodné veličiny udávající počet bodů, které dostane Kuba, respektive Rado.

- (1) Kolik je $E(X)$ a kolik $E(Y)$?
- (2) Jaké jsou maximální možné hodnoty X a Y ?
- (3) Řekněme, že Kuba získá bod za dvojici hodů $i, i+1$. Jaká je pravděpodobnost, že získá bod za dvojici hodů $i+1, i+2$? A kolik to vyjde pro Rada?
- (4) (těžší) Dokaž, že pro $n \geq 4$ je $P(X = 0)$ větší než $P(Y = 0)$.

Počítání s indikátory se také dobře chová vůči základním množinovým operacím, jak ukazují následující příklady:

Úloha 25.

- (1) Rozmysli si, že jsou-li I_X, I_Y indikátory jevů X, Y , tak $I = I_X I_Y$ je indikátor jevu $X \cap Y$.
- (2) Se stejnou notací jako v první části dokaž, že $I' = 1 - (1 - I_X)(1 - I_Y)$ je indikátor $X \cup Y$.
- (3) (těžká, princip inkluze a exkluze) Ukaž, že pro libovolnou n -tici jevů $A_1, \dots, A_n$ platí (v sumě dole sčítáme přes všechny neprázdné podmnožiny S množiny $\{1, \dots, n\}$)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{S=\{s_1, \dots, s_k\}} (-1)^{k-1} P(A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \dots \cap A_{s_k}).$$

Diskrétní prostory*

Nejprve poznamenejme, že Σ notace, kterou jsme si zavedli, se dá zobecnit i na nekonečné součty. Chceme-li „sečíst“ hodnoty nějaké funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pro všechna přirozená čísla, můžeme místo $f(1) + f(2) + \dots$ psát $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$. Všimni si uvozovek v předchozí větě: v přímém smyslu totiž není možné doslova sečíst nekonečně mnoho čísel.²⁸ S dostatečně krotkými součty, což bude i náš případ, nicméně můžeme zacházet úplně stejně jako s těmi konečnými. Speciálně stále můžeme používat úpravy pro konečné součty, které známe z Úlohy 16. To mimo jiné znamená, že se naše definice náhodné veličiny a střední hodnoty dají velmi snadno zobecnit z konečných pravděpodobnostních prostorů i na nekonečné diskrétní.

Vraťme se nyní k příkladu z minulého dílu, kde jsme uvažovali prostor odpovídající pokusu, kdy házíme mincí tak dlouho, než nám padne panna. V našem příkladě byla mince falešná a panna padla v každém pokusu nezávisle s pravděpodobností p . Přirozená otázka je, jaký je průměrný počet hodů, po kterém nám panna padne. Jinými slovy chceme znát střední hodnotu náhodné veličiny, která pro všechna přirozená i nabývá hodnoty i s pravděpodobností $p \cdot (1-p)^{i-1}$ – to je totiž přesně pravděpodobnost, že panna padne poprvé v i -tém kroku. Potřebujeme tedy znát hodnotu nekonečného součtu $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p(1-p)^{i-1}$. Ta se dá spočítat pěkným trikem, který si nyní ukážeme.

Tvrzení. *Házíme-li mincí, na které padá panna s pravděpodobností $p > 0$, než poprvé padne panna, je střední hodnota počtu hodů rovna $1/p$.*

Ověřme, že výsledek dává smysl – čím menší pravděpodobnost, že padne panna, tím déle se v průměru musíme snažit. Speciálně dostáváme, že je-li mince férová, tedy $p = 1/2$, v průměru jsou potřeba dva hody na to, aby padla panna.

Důkaz. Označme X náhodnou veličinu odpovídající prvnímu kroku, ve kterém padne panna. Uvažme nyní první krok. Pokud padne panna (to se stane s pravděpodobností p), máme $X = 1$. Co když panna nepadne? Jednotlivé hody jsou nezávislé (mince nemá paměť), takže střední počet hodů, než padne panna, je pořád $E(X)$. K tomu je potřeba přičíst právě vykonaný krok. Dostáváme tak rovnici

$$E(X) = p \cdot 1 + (1-p)(E(X) + 1),$$

jejímž řešením je $E(X) = \frac{1}{p}$.

Úloha 26. Zkus najít alternativní důkaz předešlého tvrzení podle následujícího návodu:

- (1) Rozmysli si, že pro libovolnou náhodnou veličinu X , která může nabývat pouze kladných celočíselných hodnot, platí $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$.
- (2) Uvědom si, kolik je $P(X \geq i)$ v našem případě, a sečti řadu.

²⁸Pročez neexistuje smysluplná odpověď na otázky typu: „Kolik je $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$?“

Náhodné veličiny na spočetných prostorech se ovšem někdy mohou chovat poněkud záludně, speciálně se může stát, že střední hodnota náhodné veličiny vyjde nekonečno. Můžeme si například vymyslet náhodnou veličinu, která má s pravděpodobností 2^{-i} hodnotu 2^i . Potom je střední hodnota takové veličiny rovna součtu $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \dots = \infty$.²⁹ To je také zdrojem následujícího paradoxu:

Úloha 27. (Petrohradský paradox) Uvažme následující hru – nejprve zaplatíš 1000 Kč a pak si budeš házet mincí, než Ti padne panna. Pokud padla v i -tém kroku, dostaneš 2^i Kč. Vyplatí se Ti hru hrát?

Dostaneme, že hru se vyplatí hrát, ať už je vkladní částka jakákoli, neboť očekávaný zisk bude vždy nekonečno. Problém je v tom, že jak jsme si řekli na příkladě pojišťování, pro velké částky a značně nepravděpodobné jevy už občas nemá valný smysl vyvozovat ze střední hodnoty nějaké závěry. A v tomto případě už pro $n = 100$ pracujeme s neskutečně malými pravděpodobnostmi, pro které získáme nepředstavitelné bohatství.

Úloha 28. Vyplatilo by se Ti předchozí hru hrát, pokud by byla velikost výhry shora omezena HDP Česka za rok 2017, tj. $5 \cdot 10^{12}$ Kč? Jinými slovy, ve chvíli, kdyby panna v dalším hodu mohla vést k výhře převyšující tuto mez, tak se už ve hře nepokračuje a prostě dostaneš tyto peníze.

Pravděpodobnostní metoda a střední hodnota

Pamatuješ si ještě, jak jsme na začátku seriálu s pravděpodobnostní metodou řešili příklady, které na první pohled s pravděpodobností vůbec nesouvisely? Se střední hodnotou se tato metoda stává ještě silnější! Motto našeho přístupu na začátku bylo, že pokud má náhodné zvíře ze ZOO rypáček s nenulovou pravděpodobností, existuje v ZOO zvíře, které má rypáček. Nyní budeme používat následující: pokud má náhodné zvíře ze ZOO v průměru 4,1 nohou, tak v ZOO existuje zvíře, které má alespoň 4,1 nohou, a stejně tak existuje zvíře, které má nejvýše 4,1 nohou. Vzhledem k tomu, že zvířata mají celočíselný počet nohou, musí dokonce existovat zvíře s alespoň pěti nohama a zvíře s nejvýše čtyřma nohama. Síla tohoto přístupu spočívá v tom, že díky linearitě střední hodnoty umíme průměrné počty lečého počítat neuvěřitelně snadno.

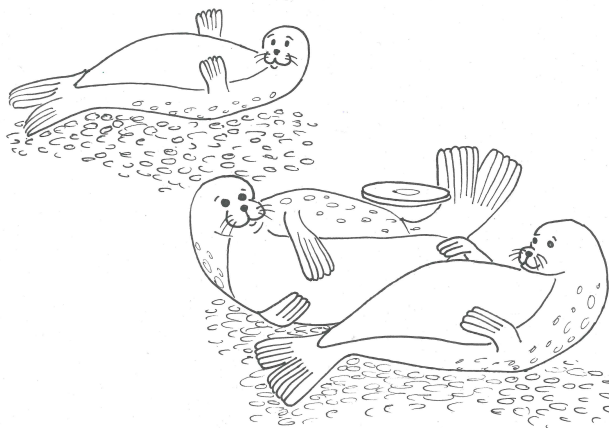
Úloha 29. Na každoroční turnaj ve frisbee dorazilo n tuleňů. Víme, že m dvojic tuleňů se kamarádí. Ukaž, že je možné rozdělit do dvou (ne nutně stejně velkých) týmů tak, aby dvojic, které se mají rády a jsou spolu ve stejném týmu, bylo alespoň $\frac{m}{2}$.

Řešení. Rozdělme tuleňe do týmů náhodně, tedy pro každého se rozhodneme, do jakého týmu přijde, nezávisle na ostatních s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Zavedme indikátorovou náhodnou veličinu X_i , $1 \leq i \leq m$, pro každou dvojici tuleňů, kteří se kamarádí. Pravděpodobnost, že konkrétní dvojice bude ve stejném týmu, je přesně $\frac{1}{2}$, neboť s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ skončí oba tuleňi v prvním týmu a se stejnou pravděpodobností skončí oba v druhém týmu.

Nechť X je náhodná veličina udávající počet kamarádkých dvojic ve stejném týmu. Máme $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$. Z linearity střední hodnoty tak dostáváme, že $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_m) = m \cdot \frac{1}{2}$.

To ale nutně znamená, že existuje rozdělení tuleňů, pro které je počet kamarádkých dvojic ve stejném týmu alespoň $\frac{m}{2}$. Kdyby totiž pro každé rozdělení byl počet takových dvojic menší než $\frac{m}{2}$, i střední hodnota by musela být menší než $\frac{m}{2}$, neboť se jedná o průměr počtu kamarádkých dvojic ve stejném týmu pro všechna možná rozdělení.

²⁹Nelekej se symbolu nekonečna, ten tady neznamená nic jiného, než že tento součet roste nad všechny meze.



Jak už se to u ukázkových úloh občas stává, použili jsme zde kanón na vrabce³⁰. Existuje totiž i mnohem jednodušší řešení, které na první pohled s tím pravděpodobnostním vůbec nesouvisí.

Úloha 30. Vyřeš předchozí příklad bez použití pravděpodobnosti.

Nyní si zkus tento postup aplikovat sám (sama) na následující příklady. Stejně jako u klasické pravděpodobnostní metody existuje následující recept:

- (1) Přečti si v zadání, co máš zvolit, a udelej to náhodně. Rozmysli si, jaký pravděpodobnostní prostor odpovídá této volbě.
- (2) Musíš dokázat, že pro danou volbu je počet něčeho nabývá alespoň/nejvýše nějaké hodnoty. Stačí dokázat, že střední hodnota veličiny při náhodné volbě je rovna alespoň/nejvýše této hodnotě.
- (3) Spočítej střední hodnotu pro svou náhodnou volbu. Může se hodit rozložit danou veličinu na součet jednoduchých veličin a pak použít linearitu střední hodnoty.

Úloha 31. Máme opět n tulenů a m kamarádkých dvojic. Dokaž, že je můžeme rozdělit do tří (ne nutně stejně velkých) týmů tak, aby počet kamarádkých dvojic ve stejném týmu byl *nejvýše* $m/3$.

Úloha 32. Do soutěže Česko hledá Superstar se přihlásilo a soutěžících. Posuzují je čtyři porotci, přičemž každý z nich hodnotí soutěžícího pouze slovy „dobrý“, „ucházející“ nebo „špatný“. Dokaž, že existují dva porotci, kteří se shodli na alespoň šestině soutěžících.

Úloha 33. V turnaji hrálo n hráčů, přičemž každý hrál s každým. Po skončení turnaje bychom rádi soutěžící seřadili tak, že první porazil druhého, druhý třetího atd. Dokaž, že turnaj mohl dopadnout tak, aby počet způsobů, jak soutěžící seřadit, byl alespoň $\frac{n!}{2^n - 1}$.

Úloha 34. Rozmysli si, že pokud vyřešíš nějaký příklad (např. z první sekce tohoto dílu) s použitím nerovnosti $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$, místo použití této nerovnosti můžeš zavést vhodné indikátory a použít linearitu střední hodnoty. Nová metoda je tedy do jisté míry zobecněním základní pravděpodobnostní metody.

Úloha 35. Na společenském večeru se sešlo n účastníků a n účastnic, kteří si spolu chtějí zatancovat. Předpokládejme, že existuje alespoň $n^2 - n + 1$ párů (tvořených osobami opačného pohlaví),

³⁰V tomto případě spíš tuleně.

které by spolu chtěly tancovat. Ukaž, že umíme všech $2n$ tanečníků popárovat tak, aby každý tancoval se člověkem, se kterým tancovat chce.

Úloha 36. (těžká) Mějme $n > 1$ reálných čísel, jejichž součet je nula, a zároveň je alespoň jedno z nich nenulové. Ukažte, že je můžeme označit $a_1, \dots, a_n$ tak, aby platilo $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 < 0$.

Úloha 37. (těžká a se spojitými prostory) Tulák má kabát o povrchu 1 a na něm pět záplat o obsahu $\frac{1}{2}$. Ukaž, že se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti s obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Závěr

Možná že jistě ale určitě snad.

Jiří Suchý

Hurá! Dočetl(a) jsi až na konec druhého dílu. Doufáme, že ses už šzil(a) s pravděpodobnostními prostory a ani náhodné veličiny Tě dnes nebudou strašit ve spánku. V tomto díle jsme si ukázali, jak aplikovat naše znalosti k řešení příkladů, ale do příštího dílu si hlavně zapamatuj, co to jsou náhodné veličiny, k čemu se může hodit znát jejich střední hodnotu a jak ji vypočítat s použitím linearity střední hodnoty. Těšíme se na Tebe u příštího dílu a do té doby přejeme hodně zdaru při řešení soutěžních úloh!



Návody k úlohám

2. (1) Nic. (2) Nic. (3) Jeden tým může být hodně malý. (4) Pravděpodobnost, že zakázaná skupina je celá v jednom týmu, teď nebude $2 \cdot \frac{2^{18}}{2^{24}}$, ale $2 \cdot \binom{18}{6} / \binom{24}{12}$.

3. Rozděl PraSátka náhodně a pak pokračuj jako ve vzorovém příkladu.

4. Zvol náhodnou uspořádanou dvojici studentů (záleží na pořadí a v obou náhodných výběrech můžeš zvolit téhož studenta). Jaká je pravděpodobnost, že ani jeden z nich nevyřeší první úlohu?

5. Učitel(ka) nejspíš bude říkat, že sis měl(a) dojít o přestávce, ale nakonec Tě pravděpodobně pustí.

6. Náhodně zvol 14 jazyků nezávislými náhodnými výběry; pravděpodobnost, že jeden z učitelů mluví náhodně zvoleným jazykem, je alespoň $\frac{1}{2}$. A ano, konstantu 14 jde výrazně zlepšit.
7. Když děti rozdělíme náhodně, bude pravděpodobnost, že dané dítě nemá ve své skupince žádného kamaráda, rovna nejvýše $\frac{\binom{59}{29}}{\binom{89}{29}}$.
8. Náhodně zvol permutaci a podívej se na jednotlivé za sebou jdoucí dvojice prvků. Chtěli bychom použít odhad na sjednocení pravděpodobností, jenže náš odhad pomocí součtu odhaduje na druhou stranu. Platí ale, že když od součtu pravděpodobností navíc odečteme součet pravděpodobností všech dvojic jevů, otočí se odhad na druhou stranu.
9. Zvol známosti náhodně. Jaká je pak pravděpodobnost, že z daných n lidí se všichni znají?
10. Co se stane, pokud prohodíme orla a pannu? Ve druhé části můžeš popárovat jevy, které mají stejnou pravděpodobnost, vyjde $\frac{n}{2}$.
15. Prostě to dosaď do vzorečku.
16. První dvě části plynou ze základních vlastností aritmetických operací; pro třetí část uvědom, kolik sčítanců tam je.
22. Zaveď si indikátory jevů „ k -té tuleňátko bylo šfouchnuté“.
23. Vyber si z n prvků náhodnou podmnožinu a podívej se na střední hodnotu její velikosti.
25. (1) Plyne z definice indikátoru.
(2) Vzpomeň na to, jak se průniky a sjednocení operace chovají vůči doplňkům.
(3) Zaveď si indikátory a zkus trochu zobecnit poznatky z prvních dvou částí; na konci kombinatoricky nahlédni, jak se ronásobí jeden výraz.
26. Použij, že $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, atd. Následně sečti tu řadu.
31. Postupuj stejně jako s rozdělováním do dvou týmů.
32. Podívej se na náhodné dva porotce a pro každého soutěžícího zaveď indikátor, že se na něm porotci shodli. Co můžeme říct o pravděpodobnosti toho, že se na daném soutěžícím náhodní dva porotci shodlí?
33. Řekněme, že každý zápas skončil náhodně. Jaká je pravděpodobnost toho, že pro dané seřazení hráčů každý porazil toho po své pravici?
35. Jaká je střední hodnota hodnota počtu „dobrých“ párů, popárujeme-li účastníky s účastnicemi náhodně?
36. Označ je náhodně a spočítej $E(a_1 a_2)$. Může se hodit roznásobit si výraz $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.
37. Uniformně náhodně zvol bod na kabátu, nechť se nachází uvnitř D záplat. Zkus nějak interpretovat a odhadnout výraz $E\left(\binom{D}{2}\right)$.

Podrobné návody k úlohám

2. (1) Nic, prostě by pravděpodobnost jevů A_i nebyla přesně 2^{-5} , ale nejvýše 2^{-5} .
(2) Nic, počet účastníků překvapivě vůbec nehraje roli. Samozřejmě, pokud máme podmínky pro šestice, musí být počet účastníků alespoň 6.
(3) Jsou-li všichni účastníci v jednom, nebo všichni v druhém týmu, určitě bude všech deset požadavků porušeno. To ale znamená, že pro 32 podmínek máme $P(A_1 \cup \dots \cup A_{32}) < P(A_1) + \dots + P(A_{32})$. I pro 32 podmínek tak stejným postupem dostaneme ostrou nerovnost $P(A_1 \cup \dots \cup A_{32}) < 1$. Bez tohoto pozorování bychom dostali pouze neostrou nerovnost, která ale nestačí.
(4) V tomto případě už není pravda, že vybrat šestici znamená udělat šest nezávislých rozhodnutí. Vybrat dvanáct účastníků tak, že tato dvanáctice obsahuje danou šestici účastníků,

znamená, že musíme zvolit 6 zbylých účastníků z celkového počtu $24 - 6 = 18$. Máme tedy $P(A_i) = 2 \cdot \frac{\binom{18}{6}}{\binom{24}{12}}$. Zbývá ověřit, že $10 \cdot P(A_i) < 1$, což přenecháme kalkulačkám.

3. Rozdělíme PraSátka do týmů náhodně. Musíme odhadnout pravděpodobnost, že daná skupinka nebude mít reprezentanta v jednom týmu. Zafixujeme jednu z podmínek ze zadání a označme jevem T to, že daná skupinka PraSátek nemá reprezentanta v nějakém jednom týmu, a jevy T_i , $1 \leq i \leq 4$ to, že daná skupinka nemá žádného reprezentanta v i -tém týmu. Máme $P(T_i) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, neboť pro každé PraSátko se rozhodujeme nezávisle. Dále $P(T) = P(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \leq P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T_4) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$, neboť pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností. Máme tedy méně než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ jevů, z nichž každý nastane s pravděpodobností nejvýše $4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Víme, že pravděpodobnost sjednocení nějakých jevů je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, ten je ale menší než $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$.

4. Zvolme dvakrát po sobě náhodného studenta z 200. Dokážeme, že s nenulovou pravděpodobností tato dvojice vyřešila všechny příklady. Může se stát, že vybereme dvakrát stejného studenta, ale to nevadí, neboť pokud jeden student vyřešil všechno, přidáme k němu prostě do dvojice libovolného jiného studenta; tato dvojice pak opět vyřešila všechno.

Zavedme jevy $U_1, U_2, \dots, U_6$, kde jev U_i znamená „žádný ze zvolených studentů nevyřešil i -tou úlohu“. Nejvýše 80 studentů nevyřešilo první úlohu, takže pravděpodobnost toho, že ji nevyřešil první student, je nejvýše $\frac{80}{200} = \frac{2}{5}$. Pro druhého to vyjde stejně a díky nezávislosti dvou voleb tedy platí $P(U_i) \leq \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Pravděpodobnost, že některá ze šesti úloh nebyla vyřešena ani jedním ze zvolených studentů, odhadneme součtem pravděpodobností, neboli $P(U_1 \cup \dots \cup U_6) \leq P(U_1) + \dots + P(U_6) \leq \frac{24}{25} < 1$. Některá dvojice proto musela vyřešit všechny úlohy.

5. Tak, a teď se můžeš s chutí pustit do dalších příkladů!

6. Pro $n \leq 7$ stačí zvolit všechny jazyky. Předpokládejme dále, že se vyučuje alespoň 14 jazyků. Pro náhodně zvolený jazyk je pravděpodobnost toho, že jím bude pevně zvolený učitel mluvit, rovna alespoň jedné polovině, neboť každý učitel ovládá alespoň polovinu všech vyučovaných jazyků.

Zvolme nezávisle náhodně 14 jazyků (jeden jazyk tedy možná zvolíme vícekrát). Nazvěme A_i jev „ i -tý učitel nemluví žádným ze zvolených jazyků“. Pravděpodobnost, že první učitel nemluví prvním z nich, je rovna nejvýše $\frac{1}{2}$, stejně tak pro každý z jazyků; jelikož jsme jazyky volili nezávisle na sobě, dostáváme $P(A_1) \leq 2^{-14}$. Analogickou úvahu můžeme provést i pro ostatní učitele. Teď už stačí odhadnout pravděpodobnost sjednocení pomocí součtu pravděpodobností, tedy $P(A_1 \cup \dots \cup A_{500}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{500}) \leq 500 \cdot 2^{-14} < 1$, takže musí existovat volba, pro níž každý učitel umí alespoň jeden zvolený jazyk.

7. Řekněme, že se jedno z dětí jmenuje Fíla. Pak existuje celkem $\binom{89}{29}$ 30členných skupin, ve kterých je Fíla; je-li počet Fílových kamarádů k , tak $\binom{89-k}{29}$ z nich neobsahuje žádného z Fílových kamarádů. Pro $k \geq 30$ je $\binom{89-k}{29} \leq \binom{59}{29}$. To znamená, že pokud zvolíme náhodné rozdělení do tří skupinek, je pravděpodobnost, že Fíla nebude mít ve skupině kamaráda, rovna nejvýše $\frac{\binom{59}{29}}{\binom{89}{29}} = \frac{59 \cdot 58 \cdot \dots \cdot 31}{89 \cdot 88 \cdot \dots \cdot 61} = \frac{59}{89} \cdot \frac{58}{88} \cdot \dots \cdot \frac{31}{61}$. Každý z těchto zlomků je roven nejvýše $\frac{2}{3}$. Dále pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu jednotlivých pravděpodobností, takže je při náhodném rozdělení pravděpodobnost, že nějaké dítě nemá žádného kamaráda ve své skupince, rovna nejvýše $90 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{29} < 1$. Proto musí existovat nějaké vyhovující rozdělení.

8. Pro libovolné množiny S_i platí: $|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| \geq |S_1| + \dots + |S_n| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - \dots - |S_{n-1} \cap S_n|$. V prvních n členech totiž započteme každý prvek ze sjednocení k -krát, pokud se vyskytuje v k různých množinách S_i ; tentýž prvek se ale bude nacházet i v průsečíku libovolné dvojice řečených množin, takže ho pak odečteme $\binom{k}{2}$ -krát. Je tedy dohromady započten přesně $\left(k - \frac{k(k-1)}{2}\right)$ -krát. Tento výraz je roven nejvýše jedné pro libovolné nezáporné k , takže na pravé straně započteme každý člen z levé strany nejvýše jednou, čímž je nerovnost dokázána.

Uvažme náhodnou permutaci π a označme pro $1 \leq i \leq 2n-1$ jako X_i jev „ $|\pi(i) - \pi(i+1)| = n$ “. Stačí nám ukázat, že platí $P(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{2n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Spočítáme, že $P(X_i) = \frac{1}{2n-1}$ a $P(X_i \cup X_j) = 0$ pro $|i - j| = 1$ a $P(X_i \cup X_j) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}$ jinak. Nakonec použijeme dokázanou nerovnost, kterou ještě před tím vydělíme velikostí celého pravděpodobnostního prostoru, aby se z velikostí množin staly pravděpodobnosti: $P(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{2n-1}) \geq P(X_1) + \dots + P(X_n) - P(X_1 \cap X_2) - P(X_1 \cap X_3) - \dots - P(X_{2n-2} \cap X_{2n-1}) = (2n-1) \frac{1}{2n-1} - \left(\binom{2n-1}{2} - (2n-2) \right) \frac{1}{(2n-1)(2n-3)} = 1 - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$.

9. Pro každou dvojici se náhodně rozhodneme, zda se zná, nebo nezná. Pravděpodobnost, že daných n lidí se navzájem zná, je $2^{-\binom{n}{2}}$, neboť pro každý z $\binom{n}{2}$ párů se s pravděpodobností jedna polovina rozhodneme, že se daní dva lidé budou znát. Stejně tak $2^{-\binom{n}{2}}$ je pravděpodobnost, že daných n lidí se navzájem nezná. Počet způsobů, jak z $2^{n/2}$ lidí vybrat n , je $\binom{2^{n/2}}{n}$. Pravděpodobnost, že bude existovat n lidí, kteří se navzájem buď všichni znají, nebo všichni neznají, je tedy nejvýše $\binom{2^{n/2}}{n} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{n}{2}}$ (zde používáme, že pravděpodobnost sjednocení je nejvýše rovna součtu pravděpodobností). Nakonec spočítáme, že tento výraz je menší než jedna, což Ti přenecháme jako ne tak docela jednoduché cvičení.

11. (1) Platí to pro všechny veličiny, neboť pro všechny elementární jevy platí $X(\omega) + X(\omega) = 2 \cdot X(\omega)$.

(2) Pro všechny elementární jevy ω musí být $X(\omega) \cdot X(\omega) = X(\omega)$, tedy $X(\omega) = 0$, nebo $X(\omega) = 1$; naopak každá náhodná veličina s touto vlastností zřejmě splňuje zadanou rovnici.

12. Rozdělme elementární jevy do m skupin podle toho, jaký výsledek pro ně dává X . Součet pravděpodobností jevů, pro které je X rovné x_i , je z definice $P(X = x_i)$. Formulí pak dostaneme jako součet příspěvků všech m skupin.

13. Hodíme si spravedlivou mincí a padne-li panna, položíme $X = 4$, a padne-li orel, definujeme $X = \frac{1}{4}$. Potom je $E(X) = E(1/X) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} > 2$.

14. Pravděpodobnost, že v nějakém kole hodíme dvě šestky, je $\frac{1}{36}$. Pravděpodobnost, že v daném kole nehodíme dvě šestky je tak $\frac{35}{36}$. Pravděpodobnost prohry je tak z nezávislosti jednotlivých pokusů rovna $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, takže pravděpodobnost výhry je $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0,49$.

15. Nehraj ruletu o peníze. ;)

18. Nechť X značí celkový počet ok a Y celkový počet panen. Střední hodnota počtu ok při hodu jednou kostkou je 3,5, takže z linearity střední hodnoty máme $E(X) = 35$. Obdobně $E(Y) = 20 \cdot 0,2 = 4$. Nakonec opět z linearity střední hodnoty máme $E(X - 2Y) = E(X + (-2) \cdot Y) = E(X) + (-2) \cdot E(Y) = 27$.

19. Uvažme kupříkladu hod férovu mincí a náhodnou veličinu X , která dává 1, padne-li orel, a 0, padne-li panna. Máme $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Jak už víme, platí $X \cdot X = X$, takže zvolíme-li $X_1 = X_2 = X$, máme $E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{1}{4}$, ale $E(X_1 \cdot X_2) = E(X) = \frac{1}{2}$.

21. Pro $1 \leq k \leq 5$ uvažme jevy A_k „ k -tá karta je srdcová“. Dále pro každý jev A_k zavedme jeho indikátor I_k . Máme $E(I_k) = P(A_k) = \frac{1}{4}$. Pro celkový počet srdcových karet X platí $X = I_1 + \dots + I_5$ a z linearity střední hodnoty tak máme $E(I_1 + \dots + I_5) = E(I_1) + \dots + E(I_5) = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

22. Pro každé $1 \leq k \leq 2018$ zavedeme indikátor I_k pro jev A_k „ k -té tuleňátko bylo šfouchnuté“. Platí $E(I_k) = P(A_k) = \frac{3}{4}$, neboť tuleňátko nebude šfouchnuto jen tehdy, když oba jeho sousedi šfouchnou svého druhého souseda. Pro počet šfouchnutých tuleňátek X pak máme z linearity střední hodnoty $E(X) = E(I_1 + \dots + I_{2018}) = E(I_1) + \dots + E(I_{2018}) = 2018 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3027}{2}$.

23. Uvažme náhodně vybranou podmnožinu n objektů. Pro každý jev A_i „ i -tý prvek byl vybrán“ si zavedeme indikátor I_i , pro nějž platí $E(I_i) = P(A_i) = \frac{1}{2}$. Střední hodnota počtu vybraných objektů je tedy $\frac{n}{2}$. Na druhou stranu ji můžeme vyjádřit jako $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} / 2^n \cdot k$.

24. Panny budeme označovat jako P a orly jako O .

- (1) Zavedeme indikátor pro každou z $n - 1$ dvojic. Z linearity střední hodnoty pak vyjde $\frac{n-1}{4}$.
- (2) Je to $n - 1$ pro sekvenci $OOOO \dots$ a $\lfloor n/2 \rfloor$ pro sekvenci $OPOP \dots$
- (3) Vyjde $\frac{1}{2}$ pro Kubu a 0 pro Rada.
- (4) Potřebujeme spočítat počet řetězců tvořených písmeny O a P takových, že a) neobsahují podřetězec OO a b) neobsahují podřetězec OP . a) Řekněme, že a_n je počet řetězců na n prvcích neobsahující OO . Potom platí $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Dále uvažme libovolný řetězec na $n \geq 3$ prvcích neobsahující OO . Takový řetězec buď končí na písmeno P , nebo O . V prvním případě může být prvních $n - 1$ znaků řetězce libovolným řetězcem neobsahujícím OO . V druhém případě musí být předposlední znak P , ale prvních $n - 2$ znaků zase může být libovolný řetězec neobsahující OO . Dostáváme tak rovnici $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, z které může počítat další členy: 2, 3, 5, 8, 13, $\dots$. Této posloupnosti se také říká Fibonacciho. b) Jestliže posloupnost neobsahuje OP , platí, že jakmile je v posloupnosti nějaké O , napravo od něj už musí být samá O čka. Každá taková posloupnost nejdřív obsahuje nějaký počet P ček (klidně nulový) a pak nějaký počet O ček (také klidně nulový). Takových posloupností je $n + 1$. Stačí dokázat $a_n \geq n + 1$, což Ti přenecháme jako snadné cvičení na matematickou indukci.

25. (1) Součin dvou indikátorů bude roven jedné právě tehdy, pokud budou oba z nich nenulové, takže pro ty jevy, které jsou součástí X i Y , neboli pro jejich průnik, jinak bude roven nule, takže rovnost plyne z definice indikátoru.

(2) Stačí všimnout, že platí $I_{\overline{X}} = 1 - I_X$ a $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, načež pouze použijeme výsledek z první části a dostaneme kžénou rovnost.

(3) Definujeme si pro všech n jevů A_i jejich indikátorové veličiny I_i a pro sjednocení těchto jevů indikátorovou veličinu I . Jelikož platí $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$, vyplývá z minulého cvičení vyplývá rovnost $1 - I = (1 - I_1)(1 - I_2) \dots (1 - I_n)$. Roznásobíme-li pravou stranu, tak po odečtení jedničky a vynásobení -1 dostáváme $I = \sum_{j=1}^n I_j - \sum_{1 \leq j < k \leq n} I_j I_k + \dots + (-1)^{n-1} I_1 I_2 \dots I_n$. Uvážením střední hodnoty obou stran dostaneme dokazovanou rovnost.

26. (1) Máme $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots$, $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \dots$ atd. V sumě $\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$ se po takovémto vyjádření všech $P(X \geq i)$ vyskytuje každý výraz $P(X = j)$ přesně j -krát. Proto $\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(X = j) = E(X)$.

(2) V případě s mincí je $P(X \geq i) = (1 - p)^{i-1}$, neboť se to stane právě tehdy, padne-li během prvních $i - 1$ hodů pokaždé orel, takže $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i = \frac{1}{p}$, kde jsme sečetli geometricku řadu.

28. Střední hodnota vyjde nula, jen když můžeme udělat alespoň sto hodů, což vede na částku 2^{100} Kč, jež je zásadně větší než HDP Česka.

30. Budeme tuleně do týmů přidávat po jednom. Pokaždé když přidáváme nového tuleně, uvažíme přátelské vztahy mezi tímto tuleněm a tuleni, které jsme už do týmů rozdělili. Aktuálního tuleně pak prostě dáme do týmu, kde je více jeho kamarádů. Protože v každém kroku byl počet přidávaných vztahů uvnitř týmů alespoň roven polovině celkového počtu přidávaných vztahů, musí na konci platit, že počet vztahů uvnitř týmů je alespoň poloviční oproti počtu všech vztahů.

31. Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu se dvěma týmy. Rozdělíme tuleně náhodně a pro každou dvojici zavedeme veličinu X_i indikující, zda je ve stejném týmu. Dostáváme $E(X_i) = \frac{1}{3}$. Z linearity střední hodnoty je střední počet dvojic ve stejném týmu roven $m \cdot \frac{1}{3}$, takže existuje rozdělení, kde je takových dvojic nejvýše $m \cdot \frac{1}{3}$.

32. Nechť X je náhodná veličina značící počet soutěžících, na kterých se shodli náhodní dva porotci. Stačí dokázat $E(X) \geq \frac{a}{6}$. Dále pro každé i označme A_i jev „náhodní dva porotci se shodli

na i -tém soutěžícím“. Povšimněme si, že pro každého soutěžícího existují alespoň dva porotci, kteří mu dali stejné hodnocení. Možných dvojic porotců je $\binom{4}{2} = 6$, takže máme $P(A_i) \geq \frac{1}{6}$.

Pro všechna $1 \leq i \leq a$ budíž X_i indikátor jevu A_i . Máme $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_a) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_a) \geq a \cdot \frac{1}{6}$.

33. Představme si, že turnaj dopadnul náhodně, tj. každý hráč vyhrál každý ze svých zápasů s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Existuje celkem $n!$ různých seřazení všech hráčů, protože očíslováme-li hráče čísly od 1 do n , tak každé seřazení můžeme ztotožnit s nějakou permutací π . Můžeme si tedy zavést indikátor I_π , který je roven jedné právě tehdy, když hráč $\pi(i)$ porazil hráče $\pi(i+1)$ pro $i = 1, \dots, n-1$, jelikož jsou všechny výsledky zápasů nezávislé, tak $E(I_\pi) = 2^{1-n}$. Z linearit y střední hodnoty je proto průměrný počet vyhovujících seřazení roven (sčítáme přes všechny permutace) $\sum_\pi E(I_\pi) = \frac{n!}{2^{n-1}}$.

34. Pro jevy $A_1, \dots, A_n$ zavedeme indikátory $I_1, \dots, I_n$. Poté náhodná veličina $X = I_1 + \dots + I_n$ odpovídá „počtu jevů A_i , které nastaly“. Nyní z linearit y střední hodnoty dostáváme $E(X) = E(I_1) + \dots + E(I_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$. Při použití původní metody bychom se snažili dokázat $P(A_1) + \dots + P(A_n) < 1$ a interpretovali to tak, že pravděpodobnost, že nenastane žádný z jevů A_i je větší než nula. Nyní se snažíme dokázat to samé, ale nakonec řekneme, že pokud je střední počet jevů A_i , které nastaly, ostře menší než jedna, musí nastat případ, kdy počet nastávších jevů je přesně nula, neboť tento počet je vždy nezáporné celé číslo.

35. Popárujeme tanečníky náhodně a pro každý pár zavedeme indikátor X_i , který dá jedničku, právě když lidé z i -tého páru spolu chtějí tancovat. Existuje celkem n^2 dvojic účastník-účastnice a alespoň $n^2 - n + 1$ z nich spolu chce tancovat, takže $E(X_i) \geq \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$. Z linearit y střední hodnoty dostaneme $E(\sum_{i=1}^n X_i) = nE(X_1) \geq \frac{n^2 - n + 1}{n} > n - 1$, takže musí existovat nějaké popárování, ve kterém bude všech n párů spokojených.

36. Označme si čísla nějakým pevně zvoleným způsobem jako $a_1, \dots, a_n$. Chceme ukázat, že existuje permutace $\{1, \dots, n\}$ π taková, že $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)} < 0$ (na permutaci se díváme jako na funkci). Pro náhodnou permutaci platí $E(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, neboť se $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}$ musí rovnat jednomu z těchto součinů a ze symetrie je každý z nich stejně pravděpodobný. Z linearit y střední hodnoty (a symetrie) tedy je $E(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)}) = nE(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Zároveň však platí $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, takže pro čísla s nulovým součtem je díky nezápornosti čtverců $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 0$ a kvůli tomu, že aspoň jedno číslo je nenulové, bude nerovnost dokonce ostrá. Proto $E(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} + a_{\pi(2)}a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(n)}a_{\pi(1)}) < 0$.

37. Pokud máme dvě náhodné veličiny X, Y na Ω a pro libovolný jev $\omega \in \Omega$ je $X(\omega) \geq Y(\omega)$, tak ze vzorečku pro střední hodnotu plyne $E(X) \geq E(Y)$. Vyberme uniformně náhodně bod na kabátu, necht D je počet záplat, které jej pokrývají. Z linearit y střední hodnoty je $E(D) = 5 \cdot \frac{1}{2}$. Pro celá čísla $0 \leq d \leq 5$ platí $\frac{d(d-1)}{2} \geq 2d - 3$, takže $E(\binom{D}{2}) \leq E(2D - 3) = 2E(D) - 3 = 2$. Kombinatoricky můžeme výraz $E(\binom{D}{2})$ interpretovat jako průměrný počet dvojic záplat, v nichž leží uniformně náhodně zvolený bod, což se díky naší geometrické interpretaci pravděpodobnosti rovná součtu obsahů průniků dvojic různých záplat. Dvojic záplat je celkem $\binom{5}{2} = 10$, takže předpokládáme-li, že libovolné dvě záplaty mají průnik s obsahem menším než $\frac{1}{5}$, dostáváme $E(\binom{D}{2}) < 2$, což je spor s výše odvozenou nerovností. Proto se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti s obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Výsledky po 3. podzimní sérii

Detailní výsledky jednotlivých sérií nalezneš na našem webu: mks.mff.cuni.cz/vysledky

	Jméno	Příjmení	r.	Škola	1p	2p	3p	1s	celkem	hist
1.	Matěj	Doležálek	4	G Humpolec	25	25	25	15	90,00	721
2.	Eva	Feldbabelová	1	KG Třebíč	22	25	24	13	84,36	84
3.	Magdaléna	Mišinová	2	GKepleraPH	24	25	24	11	83,79	291
4.	Michal	Beránek	1	GVoděraPH	23	22	24	15	83,52	537
5.	Lucia	Kvasničková	0	GFGLorBA	22	24	23	13	82,10	82
6.	Klára	Churá	2	GNerudCheb	23	22	21	15	81,13	264
7.	Radek	Olšák	4	GMensaPH	21	25	20	15	80,97	744
8.	Adam	Křivka	3	CMGPgBrno	22	25	23	10	80,70	268
9.	Matej	Hanus	3	G PošKošice	25	22	22	11	80,57	81
10.	Kryštof	Pravda	1	GMensaPH	23	25	23	9	79,42	79
11.	Ondřej	Mišina	4	SGFryčovPH	22	23	23	10	78,54	79
12.	Josef	Minařík	4	GJarošeBO	25	25	13	15	78,44	481
13.	Zdeněk	Pezlar	1	GJarošeBO	24	21	23	10	78,12	78
14.	Adéla Karolína	Žáčková	2	GZborovPH	21	24	21	11	77,17	283
15.	Tomáš	Sourada	4	G Žamberk	21	23	23	10	77,00	77
16.	Dominik	Stejskal	4	G Krnov	25	22	20	9	75,88	252
17.	Ondřej	Krabec	4	G KomHavíř	23	19	19	15	75,86	428
18.	Vašek	Janáček	2	GJarošeBO	23	16	22	15	75,76	76
19.	Tomáš	Flidr	1	G Kojetín	22	15	24	15	75,75	201
20.	Lucia	Krajčoviechová	3	GJHroncaBA	25	22	19	8	73,53	680
21.	Lenka	Kopfová	4	MendelG OP	20	21	17	15	72,69	733
22.	Jonáš	Havelka	3	G Jírov ČB	22	19	21	9	71,93	270
23.	Petr	Khartskhaev	2	PORG PH	22	21	20	7	68,76	267
24.	Mikuláš	Brož	2	GNadŠtolPH	21	19	21	7	67,63	242
25.	Klára	Pernicová	2	GJarošeBO	19	19	21	9	67,62	226
26.	Jan	Kaifer	3	GKepleraPH	19	14	19	13	66,46	262
27.	Kateřina	Panešová	3	G Teplice	22	17	22	6	65,93	204
28.	Martin Albert	Gbúr	3	G PošKošice	18	18	18	11	65,68	66
29.	Petr	Hladík	1	GMikul23PL	22	23	19	–	65,13	65
30.	Jakub	Parada	3	G Gröss BA	22	24	15	3	64,11	403
31.	Viktor	Materna	3	GJarošeBO	19	14	17	14	63,75	121
32.	Tomáš	Hulla	2	GTajBanBys	21	21	19	–	61,20	119
33.	Michal	Vosyka	2	GUKlafárŽR	22	15	15	7	58,98	59
34.	Denisa	Hanušková	1	G VelMeziř	22	19	18	–	58,10	58
35.	Alan	Hübsch	1	GKepleraPH	19	22	16	–	57,60	58
36.	Markéta	Hanušková	1	G VelMeziř	21	19	18	–	57,52	58
37.	Darian	Poljak	2	GJŠkodyPŘ	22	11	18	7	57,14	57
38.	David	Klement	3	GNadAlejPH	21	18	19	–	56,95	314

39.	Jakub	Polák	1	GNPražačPH	20	18	19	–	56,22	56
40.	Daniel	Perout	2	GJarošeBO	15	13	19	7	54,78	55
41.	Michal	Kupec	3	G Písek	20	13	14	6	54,17	54
42.	Robin	Palán	1	GJarkovPH	14	13	18	9	53,27	53
43.	Diana	Procházková	2	PORG PH	19	14	18	–	51,19	51
44.	Martin	Hubata	3	GMikul23PL	21	13	14	3	51,11	268
45.	Josef	Král	4	MendelG OP	20	13	18	–	51,09	182
46.	Dominik	Majkus	4	GNVPlániPH	23	13	11	4	50,93	102
47.	Jan	Vavřín	2	PORG PH	10	9	19	11	49,74	273
48.	Vojtěch	Gaďurek	2	PORG PH	14	14	17	4	49,16	204
49.	Bartomiej	Lewandowski	4	LicOSSWa	24	22	–	–	46,27	46
50.	Peter	Školník	3	GLSaruBA	13	13	11	7	45,80	46
51.	Lenka	Poljaková	0	GJŠkodyPŘ	22	10	13	–	44,78	45
52.	Ludmila Hana	Houfková	2	GMHS	19	15	9	–	43,35	73
53.	Ondřej	Macháč	3	GStrážnice	18	10	15	–	42,69	95
54.	Karolina	Šedová	0	GJNerudyPH	17	10	14	–	41,74	42
55.	Klára	Hloušková	3	G Kolín	17	15	9	0	40,85	215
56.	Nikol	Krejčí	3	PORG PH	17	13	11	–	40,83	96
57.	Samuel	Krajčí	4	GAlejKošic	21	20	–	–	40,25	299
58.	Martin	Zimen	4	GJMasar JI	18	21	–	–	39,41	507
59.	Timea	Szöllsová	3	G Gröss BA	18	13	7	–	37,95	111
60.	Radomír	Mielec	1	GVolgogrOS	11	19	7	–	37,45	37
61.	Miroslav	Horský	4	GČeskoliPH	10	14	13	–	37,00	37
62.	Jan	Šurán	1	GŠpitálsPH	19	18	–	–	36,98	37
63.	Klára	Zemanová	2	PORG PH	9	9	18	–	36,44	95
64.	Matěj	Holubička	3	G Hořice	15	6	14	–	35,41	91
65.	Matěj	Krátký	3	PORG PH	18	17	–	–	34,90	182
66.	Kateřina	Charvátová	4	GBNěmcovHK	13	8	13	–	34,44	324
67.	Alžběta	Manová	4	G UherBrod	13	12	4	3	32,36	186
68.	Marek	Pišťák	4	GHeyrovPH	12	12	8	–	32,00	32
69.	David	Beinhauer	4	MendelG OP	15	15	–	–	30,50	189
70.	Daniel	Novotný	2	PORG PH	7	8	15	–	29,98	30
71.	Anna	Musilová	3	PORG PH	3	6	12	8	29,68	215
72.	Veronika	Borýsková	4	GJarošeBO	19	7	3	–	29,00	29
73.	Vojtěch	Lejsek	4	GČeskoliPH	15	–	12	–	27,00	27
74.	Erika	Kojdová	2	GNámetovo	12	7	8	0	26,82	27
75.	Johana	Dvořáková	4	G Trutnov	11	7	8	–	26,78	82
76.	Václav	Verner	0	PORG PH	–	8	10	8	26,77	27
77.	Kateřina	Pazderová	3	SŠMŠLit	11	8	7	0	26,18	26
78.	Matěj	Jerhot	3	GJirsíkaČB	–	–	15	10	25,79	26
79.	Agáta	Štrosová	1	GZborovPH	14	11	–	–	25,19	25
80.	Petr	Sochor	4	GJarošeBO	19	6	–	–	25,00	25
81.	Karel	Balej	4	G Rokycany	19	5	–	–	24,89	80
82.	Jáchym	Mierva	2	GUKlafárŽR	–	–	12	12	23,82	24
83.	Jakub	Devát	1	GJarošeBO	15	8	–	–	23,37	23
84.	Alexandra	Rosenbergová	1	GJarošeBO	14	–	8	–	22,29	22
85.	Václav	Pavlíček	3	SPŠElek PA	13	8	–	–	21,47	21
86.–87.	Suzan	Catay	4	GHeyrovPH	18	3	–	–	21,00	21
86.–87.	Tomáš	Cepko	4	GAnMeTr	8	10	3	–	21,00	21
88.	Aleš	Papáček	2	G Třeboň	15	5	–	–	20,32	20
89.	Júlia	Sirotiaková	2	GRimSob	5	9	5	–	20,02	20
90.	František	Bujnovský	1	MendelG OP	11	8	–	–	19,86	20

91.	Dominika	Hájková	4	GPísnickPH	15	5	–	–	19,74	75
92.	Vladimír	Urban	4	GHeyrovPH	12	7	–	–	19,00	19
93.	Alexandra	Falvey	1	MSŠChem PH	19	–	–	–	18,52	19
94.	Jan	Hrubeš	4	GČKrumlov	18	–	–	–	18,20	93
95.	Patrik	Trefil	3	MatičnickGOS	7	11	–	–	18,18	18
96.	František	Knjěč	3	GBrandýs	–	–	18	–	18,15	18
97.	Václav	Zvoníček	3	GJarošeBO	–	8	10	–	17,67	60
98.	Vojtěch	Šára	4	PORG PH	5	6	5	–	16,94	83
99.	Ondřej	Dulanský	1	GJŠkodyPŘ	17	–	–	–	16,83	17
100.	Jan	Vondra	3	G TýnNVlt	3	8	6	–	16,60	79
101.	Aleš	Horák	2	SPŠ Třebíč	9	7	–	–	16,04	32
102.–103.	Vojtěch	Dašek	2	PORG PH	9	7	–	–	16,00	36
102.–103.	Agáta	Žižková	2	PORG PH	–	–	16	–	16,00	16
104.	Michal	Chudoba	4	GLitoměřPH	9	4	4	–	15,74	246
105.	Tomáš	Koutný	4	SPŠEROžnov	15	–	–	–	15,00	15
106.	Veronika	Příbylová	1	GKepleraPH	15	–	–	–	14,89	15
107.	Jan Antonín	Musil	2	PORG PH	–	6	8	–	14,22	74
108.	Ondřej	Tkaczyszyn	4	GKepleraPH	12	–	–	–	11,90	91
109.	Magdalena	Šlaufová	2	G Semily	12	–	–	–	11,89	12
110.	Bálint	Tóth	4	GMadDStred	11	–	–	–	11,49	44
111.	Kamila	Houšková	3	GNadAlejPH	11	–	–	–	11,39	11
112.–113.	Jan	Poláček	1	G Břeclav	–	11	–	–	11,38	11
112.–113.	Alena	Skvanova	1	GPísnickPH	11	–	–	–	11,38	11
114.	Anna	Jerhotová	3	GJosefskPH	11	–	–	–	11,23	31
115.	Jan	Nekarda	3	GUHradiště	–	11	–	–	10,54	109
116.	Jonáš	Stoilov	3	PORG PH	11	–	–	–	10,52	111
117.	Klára	Chobotová	0	GJNerudyPH	–	–	10	0	10,11	10
118.	Dalibor	Kramář	4	GTNovákBO	–	10	–	–	10,00	10
119.	Jan	Škurek	4	GÚstavníPH	–	–	5	4	9,00	9
120.	Jiří	Machyán	4	G Vlašim	9	–	–	–	8,84	20
121.	Petr	Zahradník	4	GŠmejkalÚL	9	–	–	–	8,68	228
122.	Vojtěch	Turland	3	GJarošeBO	–	4	4	–	8,46	8
123.	Jolana	Štraitová	0	GBudějovPH	–	8	–	–	8,34	8
124.	Martin	Melišik	2	PORG PH	–	–	8	–	8,17	8
125.–126.	Eliška	Vítková	3	GZborovPH	8	–	–	–	8,00	8
125.–126.	Michaela	Zbudilová	4	GLŠtúraTN	–	4	4	–	8,00	8
127.	Kristýna	Prokopová	3	G FrýdČTěš	8	–	–	–	7,95	15
128.–130.	Annemarie	Černohorská	1	ArcibisGPH	–	7	–	–	6,79	7
128.–130.	Martin	Černý	1	G HavlBrod	–	7	–	–	6,79	7
128.–130.	Eliška	Krejčí	3	OA Tábor	7	–	–	–	6,79	7
131.–132.	Filip	Oliva	4	GUHradiště	–	6	–	–	6,00	6
131.–132.	Alena	Smutná	4	GKepleraPH	–	6	–	–	6,00	6
133.	Veronika	Vlková	4	GPísnickPH	–	4	–	–	4,00	4
134.	Tomáš	Vondrák	4	GMLerchaBO	3	–	–	–	3,00	3

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *<http://mks.mff.cuni.cz/>*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*