Finální myšmaš

4. jarní série   Termín odeslání: 14. května 2018

Úloha 1.

(a) David má doma v řadě za sebou položených pět krabic. Každou noc spí v jedné z nich, ale odmítá komukoli říct ve které. David moc rád vstává brzo, a protože jak známo *ranní ptáče dál doskáče*, každé ráno přeskočí do sousední krabice, ve které zůstane až do následujícího rána. Kačka by ráda Davida zase spatřila. Každé poledne se může podívat do jedné z krabic a zjistit, jestli v ní David je. Nalezněte strategii, díky níž Kačka časem otevře krabici, ve které se David zrovna schovává. (2 body)

(b) Bitevní pole má tvar tabulky $n \times n$, kde n je přirozené číslo. Na každém políčku před bitvou stojí jeden vojín. Vojáci se nepohybují, v průběhu bitvy ale můžeme opakovaně provádět následující taktickou operaci – vybereme si libovolné políčko a na všech políčkách sousedících s ním hranou (ale ne v něm samotném) všechny vojíny povýšíme na generály a všechny generály naopak degradujeme na vojíny. Určete, pro která n lze docílit toho, aby *po bitvě byl každý generálem.* (3 body)

Úloha 2.

(a) Rado vyhrál v tombole několik tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Pro každé dvě jeho množiny A a B, které nejsou stejné, platí $|A \cap B| \leq 1$. Dokažte, že Rado nemá víc než $\frac{n(n-1)}{6}$ množin. (2 body)

(b) Od své výhry v tombole Rado nepřestal o oné množině $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ přemýšlet. Proto se jeho rodiče rozhodli, že mu její co největší podmnožinu X zakážou. Zároveň mu ale nechtěli zkazit radost z výhry, a tak se dohodli, že zakážou jen takové prvky, aby žádná z Radových tříprvkových podmnožin neměla všechny své prvky zakázané. Dokažte, že mohou vybrat podmnožinu X s alespoň $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ prvky.[1] (3 body)

Úloha 3.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a bod Q uvnitř něj. Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu Q na strany BC, AC, AB. Ukažte, že obě trojice trojúhelníků AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ a P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ

(a) *mají stejný součet obsahů,* (2 body)

(b) *mají stejný součet poloměrů kružnic vepsaných.* (3 body)

Úloha 4.

(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla a součin třetí mocninou přirozeného čísla. (2 body)

(b) Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takových, že $n^2 + 3m$ i $m^2 + 3n$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. (3 body)

[1] Pro $x \in \mathbb{R}$ značíme $\lfloor x \rfloor$ dolní celou část čísla x, tedy největší přirozené číslo, které není větší než x.

Úloha 5.

(a) Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro žádná dvě přirozená čísla $i \neq j$ nejsou zároveň $a_i + j$ a $a_j + i$ dělitelná 2017? (2 body)

(b) Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro každá dvě přirozená čísla $i \neq j$ jsou $a_i + j$ a $a_j + i$ nesoudělná? (3 body)

Úloha 6.

(a) Na rovině leží krychle o hraně délky jedna. V dané výšce h nad touto rovinou ($h > 1$) je zdroj světla. Jakou nejmenší plochu může mít stín, který krychle vrhá na rovinu? Do plochy stínu počítáme i spodní podstavu krychle. (2 body)

(b) Slunce svítí rovnoběžnými paprsky kolmo na rovinu. Nad touto rovinou se v prostoru vznáší krychle o hraně délky jedna, kterou je možné libovolně otáčet. Určete, jaký největší stín může tato krychle na rovinu vrhat. (3 body)

Úloha 7.

(a) Na kružnici o poloměru jedna leží naproti sobě body A a B. Zároveň je na ní začerveněno několik dalších bodů. Nechť a je geometrický průměr[2] délek všech úseček vedených z A do červených bodů a b je geometrický průměr délek všech úseček z B do červených bodů. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a, b je menší nebo rovno $\sqrt{2}$. (2 body)

(b) Určete nejmenší kladné reálné číslo t takové, že pro všechna kladná reálná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \geq t\sqrt{ab} + (1-t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(3 body)

[2] Geometrický průměr nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je definován jako $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$.