

Rovnostranné trojúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. PROSINCE 2017

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Je dán rovnostranný trojúhelník. Dokreslete do obrázku dvě přímky tak, aby se v něm pak nacházely čtyři rovnostranné trojúhelníky (mohou se překrývat).

ÚLOHA 2. (3 BODY)

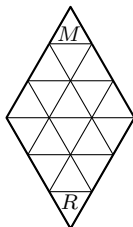
Je dán čtverec $ABCD$. V něm je vyznačený bod P takový, že je trojúhelník ABP rovnostranný. Mimo čtverec zvolme bod Q tak, aby byl trojúhelník ADQ rovnostranný. Dokažte, že body Q , P a C leží na jedné přímce.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

V rovině leží pět shodných rovnostranných trojúhelníků, které mohou být různě natočené. Dokažte, že pro každý z nich lze zbylé trojúhelníky bez otáčení posunout tak, aby ho celý zakrývaly. Trojúhelníky se mohou překrývat.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Michal a Rado hráli hru. Nejprve k sobě stranou slepili dva rovnostranné trojúhelníky a potom na ně nakreslili pravidelnou trojúhelníkovou síť tak, že políčka měla n -krát kratší stranu než původní trojúhelníky. Následně si stoupli do protilehlých vrcholových políček. V každém tahu si každý z kluků vybral nějaké políčko, které sousedilo stranou s políčkem, na němž právě stál, a posunul se na něj. Hráči se střídali po tahu a Michal začínal. Předem se dohodli, že zvítězí ten, kdo bude jako první stoupat na políčko, kde už stojí ten druhý, nebo jako první dorazí na místo, odkud ten druhý vyrážel. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii¹.



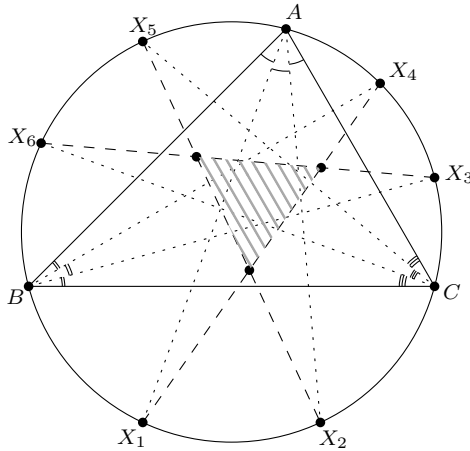
Situace na začátku hry pro $n = 3$

¹Hráč má vyhrávající strategii, pokud umí vyhrát nezávisle na tom, jak táhne jeho protivník.

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC . Přímky procházející vrcholem A , které dělí úhel $\sphericalangle BAC$ na třetiny, protínají kružnici k podruhé v bodech X_1 a X_2 . Body X_3 až X_6 jsou definované podobně pomocí vrcholů B a C . Navíc body X_1, X_2, \dots, X_6 leží na k v tomto pořadí proti směru hodinových ručiček. Dokažte, že přímky X_1X_4, X_2X_5 a X_3X_6 určují rovnostranný trojúhelník.



ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P . Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímk AP, BP, CP se stranami trojúhelníku ABC . Ukažte, že $|PX| + |PY| + |PZ| < |AB|$.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

V sešitě je nakreslený trojúhelník ABC , pro který platí, že úhel při vrcholu A je dvojnásobkem úhlu při vrcholu B . Anička v něm vyznačila bod P a pak si všimla, že vzdálenosti bodu P od bodů A a B jsou stejné. Navíc je délka úsečky AC stejná jako délka úsečky CP . Dokažte, že přímka CP dělí úhel při vrcholu C v poměru $2 : 1$.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

V různoramém trojúhelníku ABC platí $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Osy úhlů CAB, BCA protínají protější strany v bodech X, Y a sebe navzájem v I . Nad úsečkou XY sestrojíme dva rovnostranné trojúhelníky XYP a XYQ . Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku BPQ . Ukažte, že $OI \perp AC$.