Algebra

3. jarní série | Termín odeslání: 9. dubna 2018

Úloha 1. (3 body)
Želvičce Zuzce se o jejích 28. narozeninách vylíhlo z vajíčka první želvátko a další potomci se jí líhli postupně o každých dalších narozeninách – tedy druhé želvátko o 29. narozeninách, třetí o 30. narozeninách atd. Pomozte jí zjistit, zda (a případně kdy) bude mít na narozeninovém dortu stejně svíček jako všechna její želvátka dohromady.

Úloha 2. (3 body)
Marian našel dvě reálná čísla x, y, pro která platí následující vztahy:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 900,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 45.$$

Jaký je součin těchto čísel?

Úloha 3. (3 body)
Pro kladná reálná čísla x, y platí $xy \geq x + y$. Ukažte, že pak $x + y \geq 4$.

Úloha 4. (5 bodů)
Kuba má kladná reálná čísla a, b, c. V závislosti na nich by chtěl najít všechna reálná řešení x rovnice

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{bx+c} + \sqrt{cx+a} = \sqrt{a-bx} + \sqrt{b-cx} + \sqrt{c-ax}.$$

Ukojte jeho zvědavost.

Úloha 5. (5 bodů)
Na rovném telegrafním drátu sedí n holubů a n holubic. Dokažte, že součet všech vzdáleností mezi ptáky různého pohlaví je větší nebo roven součtu všech vzdáleností mezi ptáky stejného pohlaví.[1]

Úloha 6. (5 bodů)
Madam Verča si do řady napsala celá čísla, která tvoří nekonečnou nekonstantní aritmetickou posloupnost[2]. Mezi některá z nich pak Lucien napsal středníky. Následně vytvořil novou nekonečnou posloupnost, přičemž první člen získal sečtením čísel od začátku aritmetické posloupnosti po první středník, druhý člen sečtením čísel mezi prvním a druhým středníkem a tak dále. Může tato nově vzniklá posloupnost být geometrická[3]?

[1] Vzdálenost dvou konkrétních opeřenců započítáváme právě jednou.

[2] Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost, pokud existuje d takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$. Posloupnost je nekonstantní, pokud $d \neq 0$.

[3] Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří geometrickou posloupnost, pokud existuje q takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = q \cdot a_n$.

Úloha 7. (5 bodů)

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna **iracionální čísla** x, y vztah

$$f(xy) = f(x+y).$$

Úloha 8. (5 bodů)

Jsou dána tři různá nenulová reálná čísla a, b a c. Dále víme, že polynomy

$$ax^3 + bx + c,$$
$$bx^3 + cx + a,$$
$$cx^3 + ax + b$$

mají společný kořen. Dokažte, že alespoň jeden z těchto polynomů má tři reálné kořeny, počítáme-li je včetně násobnosti.