Teorie grup II – Procitnutí symetrií

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ÚNORA 2018

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Kolika způsoby můžeme nabarvit krychli, máme-li k dispozici padesát odstínů šedi? Stěnu natřeme vždy celou stejným odstínem a použité odstíny nemusejí být různé; dvě obarvení, která se liší pouze natočením v prostoru, považujeme za totožná.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Ukažte, že pokud existuje nějaká funkce $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{Z}_n$ vztahy

(i) $f(x) \neq x$,
(ii) $f(f(x)) = x$,
(iii) $f(f(f(x+1)+1)+1) = x$,

potom n dává zbytek dva po dělení čtyřmi.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Nechť G je konečná grupa taková, že pro každou její vlastní podgrupu H (tj. $H \neq G$) existuje podgrupa K, která splňuje $H \leq K \leq G$ a má v G prvočíselný index. Označme jako p největší prvočíslo, které dělí $|G|$. Dále ať je P libovolná sylowovská p-podgrupa grupy G. Ukažte, že je P normální v G.