Kombinatorické počítání

2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. LISTOPADU 2017

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Štěpán vytvořil posloupnost cifer tak, že za sebe napsal čísla $1, 2, 3, \dots, 99$ v tomto pořadí. Pak náhodně ukázal na jednu z osmiček. Jaká je pravděpodobnost, že oba její sousedé jsou čtyřky?

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Napište na stěny dvou šestistěnných kostek přirozená čísla tak, aby při všech možných hodech byl součet padlých čísel mezi 2 a 13 (včetně) a aby všechny tyto součty padaly stejně často.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Kuba zapomněl svůj PIN. Samozřejmě ví, že je složený ze čtyř číslic. Jinak si ale vzpomíná jen na to, že součet cifer je dělitelný třemi. Kolik kombinací musí v nejhorším případě vyzkoušet?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Kolika způsoby lze na šachovnici 9×9 obarvenou klasickým způsobem rozmístit devět věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly a všechny stály na stejné barvě?

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Dva prváci Pavel a Filip se zúčastnili šachového turnaje druháků. V turnaji hrál každý s každým právě jednou. Za každou výhru dostal hráč jeden bod a za prohru žádný. V případě remízy dostali oba hráči po půlbodu. Turnaj dopadl tak, že druháci měli všichni stejně bodů a Filip s Pavlem měli dohromady osm bodů. Kolik druháků se mohlo zúčastnit turnaje?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Verča si do sešitu vypsala všechny uspořádané dvojice (A, B) podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 2017\}$. Následně si pro každou takovou dvojici zapsala velikost množiny $A \cap B$ a všechny tyto velikosti sečetla. Kolik jí vyšlo?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Jinému Kubovi na zahrádce roste strom[1], který má ve svých 2017 vrcholech napsaná čísla 1 až 2017. Kuba přitom umí čarovat – když ukáže na nějakou hranu stromu, čísla v jejích vrcholech se prohodí. Jednoho dne se Kuba rozhodl postupně v nějakém pořadí ukázat na všechny hrany stromu (na každou právě jednou) a rozmyslel si, že v závislosti na zvoleném pořadí mu takto může nakonec vzniknout m různých očíslování. Kolik nejméně prvočíselných dělitelů počítaných včetně násobnosti[2] může mít m?

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Nechť $a_1, a_2, \dots$ je posloupnost celých čísel, která pro každé přirozené n splňuje $\sum_{d|n} a_d = 2017^n$. Ukažte, že $n \mid a_n$ pro každé přirozené n.

[1] Viz http://mks.mff.cuni.cz/archive/34/serial.pdf, kapitola *Stromy*.

[2] Tedy například u 12 bychom získali tři – jednu trojku a dvě dvojky.