Čtverce a krychle

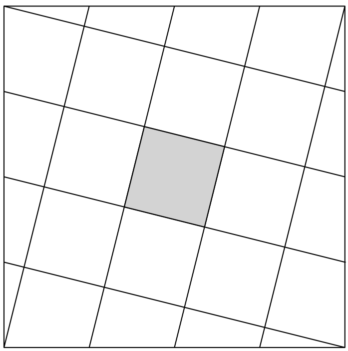
2. jarní série — Termín odeslání: 5. března 2018

Úloha 1. (3 body)

Zapište za sebe v nějakém pořadí čísla 1 až 16 tak, aby součet každých dvou sousedních čísel byl čtverec[1].

Úloha 2. (3 body)

Máme čtverec o straně délky jedna. Každou jeho stranu rozdělíme na čtyři stejné části a vzniklé body pospojujeme způsobem naznačeným na obrázku. Určete obsah malého šedého čtverečku.



Úloha 3. (3 body)

Kuba a Tonda hrají hru na tabulce velikosti 100×3 čtverečků. Střídavě na její políčka pokládají dominové kostičky 2×1. Začínající Kuba je pokládá tak, že strana domina o délce 2 je rovnoběžná s delší stranou tabulky, zatímco Tonda naopak. Nikdo z nich nesmí položit domino na již zabrané políčko. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Ukažte, že Kuba může vyhrát, ať hraje Tonda jakkoli dobře.

Úloha 4. (5 bodů)

Na šachovnici 8×8 je rozestavěno osm věží, které se vzájemně neohrožují. Pro každou dvojici věží změříme délku spojnice středů políček, na nichž tyto věže stojí. Dokažte, že některé dvě z těchto vzdáleností jsou nutně stejné.

Úloha 5. (5 bodů)

Kuba si chtěl hodit dvěma hracími kostkami, ale protože se nudil, tak nejdříve sundal z jejich stěn všechna čísla, dal je do klobouku a zamíchal. S jakou pravděpodobností hodil v součtu 7, pokud víme, že všech dvanáct čísel před hodem náhodně nalepil zpět na kostky (na každou stěnu jedno)?

[1] Čtvercem nazýváme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

Úloha 6. (5 bodů)

Na šachovnici 8×8 jsou zapsána čísla $1, \ldots, 64$, přičemž každá dvě po sobě jdoucí čísla leží na políčkách sousedících hranou. Jaký je nejmenší možný součet čísel na diagonále, která spojuje bílá rohová políčka?

Úloha 7. (5 bodů)

Mějme n-prvkovou množinu M a vyberme z ní n po dvou různých podmnožin. Dokažte, že existuje prvek $x \in M$ takový, že po jeho odebrání z každé z vybraných podmnožin, která ho obsahuje, získáme opět n různých množin.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme nekonečnou krychličkovou síť plnou neobarvených krychliček. Filip a Rado hrají hru. Filip začíná a oba hráči se střídají v tazích. Filipův tah spočívá v obarvení dosud nezabarvené krychličky na červeno. Rado ve svém tahu vybere celou rovinnou vrstvu krychliček (kolmou na jednu ze tří os prostoru), v níž žádná krychlička není červená, a obarví je všechny na modro. Rozhodněte, pro která n může Filip nezávisle na Radových tazích dosáhnout stavu, kdy bude existovat n červených sousedících krychliček ve směru některé z os prostoru.