Přísloví a pořekadla

1. podzimní série Termín odeslání: 2. října 2017

Úloha 1. (3 body)

Rado dostal od Davida 50 krabiček. Uvnitř některých z nich je schováno po jednom kousku bronzu, ostatní jsou prázdné. Rado by rád zjistil, kolik kousků bronzu je ve všech krabičkách dohromady. Protože *mluviti stříbro, ale mlčeti zlato*, zkusil to jinak. Když ukáže na libovolné tři různé krabičky, David mu prozradí, zda je v nich dohromady sudý, nebo lichý počet kousků. Ukažte, že Radovi za všech okolností stačí osmnáctkrát ukázat, aby zjistil, zda je celkem kousků bronzu sudý, či lichý počet.

Úloha 2. (3 body)

Na kruhovém stole o průměru jeden metr sedí 97 much. Honza by svou čtvercovou plácačkou o hraně 10 centimetrů rád zabil alespoň *dvě mouchy jednou ranou*. Ukažte, že se mu to může povést bez ohledu na to, jak si mouchy posedaly.

Úloha 3. (3 body)

Aničce každý den se železnou pravidelností přijde do e-mailové schránky právě jedna nevyžádaná reklama na zdravou výživu. Jednoho dne si řekla, že zítřkem počínaje si koupí zmrzlinu každý den, kdy bude ciferný součet počtu těchto reklam dělitelný sedmi. *Kdo si počká, ten se dočká*, pomyslela si a od toho dne ze své schránky nesmazala žádnou zprávu. Ukažte, že si během následujících třinácti dnů koupila zmrzlinu alespoň jednou, ať už bylo počáteční množství zpráv o zdravé výživě ve složce jakékoliv.

Úloha 4. (5 bodů)

Marta se jednoho dne rozhodla, že si od zítřka bude každý den zapisovat počet střelených nápadů, který ten den měla. Aby se jí to nepopletlo, pro přehlednost si číslo získané i-tý den označuje jako a_i. Trpělivě teď každý den počítá součin všech rozdílů $a_i - a_j$ pro $i < j$. Hned první den se se svým počínáním neprozřetelně svěřila Honzovi. Ten sice neměl tušení, kolik hloupostí Martu který den napadne, ale přesto za ní jednoho dne přišel a sebejistě jí oznámil, že jí večer vyjde číslo dělitelné 481. Věděl, že bude mít pravdu, protože podobně jako *host a ryba třetí den smrdí*, jsou n-tý den součiny rozdílů dělitelné 481. Určete nejmenší možné n, pro které tato moudrost vždy platí.

Úloha 5. (5 bodů)

Kolem kulatého stolu sedělo v nepravidelných kladných rozestupech 2017 nerozlišitelných ptakopysků. Přišel k nim Viki a po jednom z nich hodil své slovo. Protože *na koho to slovo padne, ten musí jít z kola ven*, určený ptakopysk od stolu odešel. Po chvíli za nimi přišel i Kuba, podíval se na pozice zbylých ptakopysků a pak na hraniční kružnici stolu vyznačil půlkružnici. Potom prohlásil, že chybějící ptakopysk určitě seděl na této půlkružnici[1]. Dokažte, že se Viki s Kubou mohli předem domluvit tak, aby se Kuba vždy trefil bez ohledu na to, jak si ptakopysci na začátku kolem stolu posedali.

[1] Krajní body rovněž považujeme za součást půlkružnice.

Úloha 6. (5 bodů)

Tonda vytesal dřevěnou tabulku o rozměrech $n \times n$ a do každého políčka vypálil reálné číslo v absolutní hodnotě menší než jedna. Všiml si, že v každém jejím čtverci 2×2 je součet čísel nulový. Jednoho dne všechna čísla v tabulce sečetl a vyšlo mu číslo v absolutní hodnotě větší než n. Dokažte, že *i mistr tesař se někdy utne* a že Tonda čísla nesečetl správně.

Úloha 7. (5 bodů)

Dokažte, že *kdo hledá,* ten pro každé přirozené n *najde* n různých přirozených čísel takových, že

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

je nezáporné celé číslo.

Úloha 8. (5 bodů)

Na papíře je nakreslený ostroúhlý trojúhelník ABC. Osa úhlu ABC protíná stranu AC v bodě D a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě E. Bodem D vede přímka ℓ, která protíná polopřímky EA a EC v bodech F a G. Martin by si rád vyříznul nějaký velký úhel. Ví ovšem, že má vždy *dvakrát měřit*, než začne *řezat*. Proto si změřil velikosti úhlů ABC a FBG. Ukažte, že úhel FBG je alespoň tak velký jako úhel ABC.