Být, či nebýt

1. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ÚNORA 2018

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Dánsko a Anglie spolu hrály fotbal. Dánský tým dal celkem osm gólů, kdežto anglický pět. Musel během utkání existovat okamžik, kdy se počet gólů, které již Anglie dala, rovnal počtu gólů, které Dánsko ještě dá?

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Na tabuli je napsáno číslo 42. Pokud je na tabuli napsané přirozené číslo n, může Honza zvolit dvě přirozená čísla a, b se součtem n a nahradit číslo na tabuli číslem ab. Existuje posloupnost tahů, kterou se Honzovi povede vytvořit na tabuli číslo 2018?

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Existuje čtveřice bodů v rovině taková, že každá z ní vybraná trojice bodů je osově symetrická[1], ale celá čtveřice žádnou osu symetrie nemá?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Na matfyzu od 8 do 16 hodin pracuje n lidí. Každý z nich je během pracovní doby buď na matfyzu, nebo v kavárně. Přechod mezi těmito místy netrvá žádný čas a na každém z nich může člověk zůstat libovolně krátkou dobu. Matfyzáci spolu nechtějí trávit moc času. Pro která n umíme zařídit, aby spolu žádní dva zaměstnanci za celou pracovní dobu nestrávili více než čtyři hodiny (sčítá se čas na pracovišti i v kavárně)?

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Na kružnici leží několik hrobů. Do každého z nich dal Hamlet několik lebek (klidně žádnou), k nějakému neprázdnému se postavil a začal si hrát podle následujících pravidel. Pokud u sebe nemá žádné lebky, vezme si všechny z hrobu, u kterého právě stojí, a hned se posune o jeden dál. V opačném případě dá jednu lebku do hrobu, u něhož se nachází, a pokud ještě nějakou drží, přejde opět k dalšímu hrobu. Dokažte, že ať Hamlet rozmístí lebky jakkoli a postaví se kamkoli, budou po nějaké době počty lebek v jednotlivých hrobech stejné jako na začátku.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Existuje nekonečná posloupnost kladných reálných čísel $x_0, x_1, x_2, \ldots$ taková, že pro každé přirozené $n \geq 2$ platí $x_n = \sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{x_{n-2}}$?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Rozhodněte, zda mohou být (či nebýt) dva překrývající se konvexní čtyřúhelníky A a B a bod X ležící v obou z nich[2] tak, aby byly splněny následující dvě podmínky:

(i) Pro každou přímku vedenou bodem X platí, že její část v A je kratší než její část v B.
(ii) Obsah A je alespoň 1,9krát větší než obsah B.

[1] Skupinu bodů považujeme za osově symetrickou, i když všechny leží na jedné přímce.
[2] Bod X může ležet i na hranici čtyřúhelníku.

Úloha 8. (5 bodů)

Buď $S = \{-1; 1\}$. Funkce $\mathrm{sg} : \mathbb{R} \to S$ dává $\mathrm{sg}(x) = 1$ pro $x \geq 0$ a $\mathrm{sg}(x) = -1$ pro $x < 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ mějme čísla $a_{i,j}, b_i \in S$, $1 \leq i, j \leq n$ a pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ definujme

$$y_i = \mathrm{sg}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) \qquad \text{a} \qquad z = \mathrm{sg}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i y_i\right).$$

Rozhodněte, zda pro každé liché n existují taková $a_{i,j}, b_i \in S$, $1 \leq i, j \leq n$, že pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ platí $z = x_1 x_2 \cdots x_n$.