Čtverce a krychle

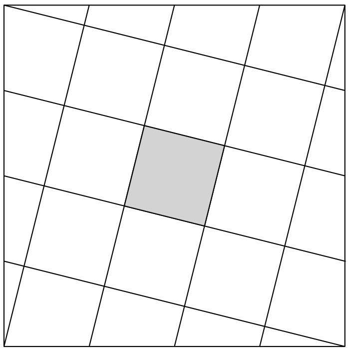
2. jarní série — Termín odeslání: 5. března 2018

Úloha 1. (3 body)

Zapište za sebe v nějakém pořadí čísla 1 až 16 tak, aby součet každých dvou sousedních čísel byl čtverec[1].

Úloha 2. (3 body)

Máme čtverec o straně délky jedna. Každou jeho stranu rozdělíme na čtyři stejné části a vzniklé body pospojujeme způsobem naznačeným na obrázku. Určete obsah malého šedého čtverečku.



Úloha 3. (3 body)

Kuba a Tonda hrají hru na tabulce velikosti 100×3 čtverečků. Střídavě na její políčka pokládají dominové kostičky 2×1. Začínající Kuba je pokládá tak, že strana domina o délce 2 je rovnoběžná s delší stranou tabulky, zatímco Tonda naopak. Nikdo z nich nesmí položit domino na již zabrané políčko. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Ukažte, že Kuba může vyhrát, ať hraje Tonda jakkoli dobře.

Úloha 4. (5 bodů)

Na šachovnici 8×8 je rozestavěno osm věží, které se vzájemně neohrožují. Pro každou dvojici věží změříme délku spojnice středů políček, na nichž tyto věže stojí. Dokažte, že některé dvě z těchto vzdáleností jsou nutně stejné.

Úloha 5. (5 bodů)

Kuba si chtěl hodit dvěma hracími kostkami, ale protože se nudil, tak nejdříve sundal z jejich stěn všechna čísla, dal je do klobouku a zamíchal. S jakou pravděpodobností hodil v součtu 7, pokud víme, že všech dvanáct čísel před hodem náhodně nalepil zpět na kostky (na každou stěnu jedno)?

[1] Čtvercem nazýváme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

Úloha 6. (5 bodů)

Na šachovnici 8×8 jsou zapsána čísla $1, \ldots, 64$, přičemž každá dvě po sobě jdoucí čísla leží na políčkách sousedících hranou. Jaký je nejmenší možný součet čísel na diagonále, která spojuje bílá rohová políčka?

Úloha 7. (5 bodů)

Mějme n-prvkovou množinu M a vyberme z ní n po dvou různých podmnožin. Dokažte, že existuje prvek $x \in M$ takový, že po jeho odebrání z každé z vybraných podmnožin, která ho obsahuje, získáme opět n různých množin.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme nekonečnou krychličkovou síť plnou neobarvených krychliček. Filip a Rado hrají hru. Filip začíná a oba hráči se střídají v tazích. Filipův tah spočívá v obarvení dosud nezabarvené krychličky na červeno. Rado ve svém tahu vybere celou rovinnou vrstvu krychliček (kolmou na jednu ze tří os prostoru), v níž žádná krychlička není červená, a obarví je všechny na modro. Rozhodněte, pro která n může Filip nezávisle na Radových tazích dosáhnout stavu, kdy bude existovat n červených sousedících krychliček ve směru některé z os prostoru.

Čtverce a krychle

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Zapište za sebe v nějakém pořadí čísla 1 až 16 tak, aby součet každých dvou sousedních čísel byl čtverec[1]*.*

(Michal Töpfer)

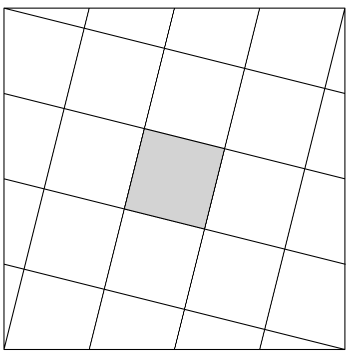
ŘEŠENÍ:
Řešením úlohy je například posloupnost: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8. Není těžké ověřit, že součet každých dvou sousedních čísel je opravdu druhou mocninou přirozeného čísla.

POZNÁMKY:
Jak na to přijít? K číslům 16 a 8 existuje jen jedno další číslo z rozsahu 1 až 16 tak, aby součet byl čtvercem. Tudíž tato čísla musí být na jednom z konců posloupnosti. Poté již není těžké doplnit zbytek posloupnosti. Většina řešení byla naprosto správně, někteří řešitelé našli všechna řešení (jedná se jen o výše zmíněnou posloupnost a převrácenou) a dokázali, že žádná další nejsou. Cením si toho, ale v této úloze to nebylo nutné (zadání říká pouze „napište").

(Lucien Šíma)

Úloha 2.

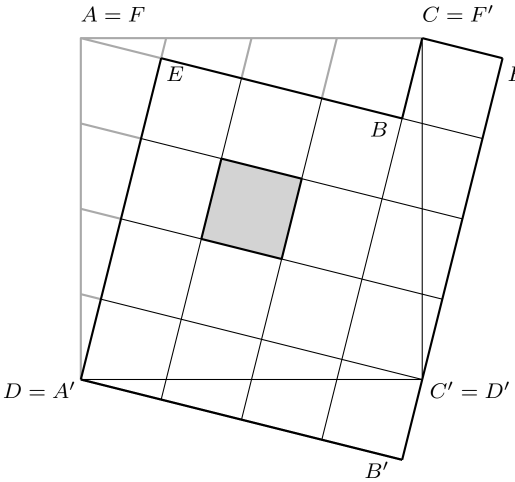
Máme čtverec o straně délky jedna. Každou jeho stranu rozdělíme na čtyři stejné části a vzniklé body pospojujeme způsobem naznačeným na obrázku. Určete obsah malého šedého čtverečku.



(Kuba Krásenský)

[1] Čtvercem nazýváme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

Řešení:
Nejprve si útvar trochu upravíme tak, abychom nezměnili jeho celkový obsah: trojúhelník ABC přesuneme na místo $A'B'C'$, trojúhelník DEF na $D'E'F'$, viz obrázek.



Výsledný útvar je tvořený sedmnácti shodnými čtverečky, a jelikož je jeho obsah roven jedné, je obsah každého čtverečku roven $\frac{1}{17}$.

Poznámky:
Úloha byla snadná, drtivá většina řešení byla správná. V několika případech řešitelé počítali délku hrany vnitřního čtverečku přes úhel odpovídající úhlu BAC pomocí goniometrických funkcí, což však vedlo na jejich nepříjemné skládání. V případě takového řešení je poté třeba dospět k výsledku použitím správných úprav, což bylo v této úloze poměrně náročné.

(Tomáš Novotný)

Úloha 3.

Kuba a Tonda hrají hru na tabulce velikosti 100×3 čtverečků. Střídavě na její políčka pokládají dominové kostičky 2×1. Začínající Kuba je pokládá tak, že strana domina o délce 2 je rovnoběžná s delší stranou tabulky, zatímco Tonda naopak. Nikdo z nich nesmí položit domino na již zabrané políčko. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Ukažte, že Kuba může vyhrát, ať hraje Tonda jakkoli dobře.

(Honza Krejčí)

Řešení:
Tabulku rozdělíme na 50 částí o velikosti 2×3. Pokud do prostřední řady některé z takových částí Kuba umístí své domino, znemožní tím Tondovi kamkoliv do této části položit své domino. Zároveň si tím Kuba vytvoří dvě pozice, do kterých bude moci později neohroženě zahrát.

V prvních 25 tazích si Kuba může tímto způsobem zabrat 25 částí nezávisle na tom, jak zahraje Tonda. Ten totiž každým svým dominem protne vždy právě jednu část tabulky, takže ať zahraje jakkoliv, každý jeho tah má šanci Kubovi znemožnit zabrání maximálně jedné části.

Nyní si můžeme všimnout, že pokud takto Kuba zahraje, Tonda má v celé hře k dispozici jen 50 tahů (dva v každé z 25 částí, které mu Kuba nechal), kdežto Kuba má celkem k dispozici alespoň 75 neohrozitelných tahů (tři v každé z 25 částí, které si zabral pro sebe). Kuba tak může donutit Tondu prohrát po 50 tazích a stále mít kam hrát. Může tedy vyhrát, ať Tonda hraje jakkoliv dobře.

Poznámky:

Tato úloha byla celkem jednoduchá na pochopení, ale naopak složitější na správné sepsání. Většina řešitelů se kromě Kubovy strategie nějak pokoušela formulovat, jak by měl hrát Tonda. To pak ale často vedlo k tomu, že řešitelé neprozkoumali všechny možnosti, jak se mohla hra vyvíjet. Obecně je v podobných úlohách zdlouhavé, nebo až nemožné, probrat všechny možnosti tahů, takže doporučuji vyvarovat se toho. Můžete si všimnout, že v autorském řešení všechno, co platí o Tondově tahu, platí o kterémkoliv Tondově tahu, ne jenom o některé možnosti.

Jedna věc mě při opravování pobavila: čtyři z celkem osmi řešitelů, kteří uvažovali rozdělení tabulky na 50 částí (jako vzorové řešení), udělali numerickou chybu. Stejnou numerickou chybu. Nechali jak Kubu, tak Tondu zabrat 50 částí (i když je jich 50 celkem). Na kvalitu řešení to nemělo vliv, ale že se to stane tolika lidem, to jsem nečekal.

(Jáchym Solecký)

Úloha 4.

Na šachovnici 8×8 je rozestavěno osm věží, které se vzájemně neohrožují. Pro každou dvojici věží změříme délku spojnice středů políček, na nichž tyto věže stojí. Dokažte, že některé dvě z těchto vzdáleností jsou nutně stejné.

(Lucien Šíma)

Řešení:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že políčka šachovnice mají rozměry 1×1. Potom vzdálenost dvou věží spočítáme z Pythagorovy věty jako $\sqrt{r^2 + s^2}$, kde r je jejich řádková a s sloupcová vzdálenost.

Abychom na šachovnici 8×8 měli osm věží, které se vzájemně neohrožují, musí v každém sloupci stát právě jedna. Zaměříme se nyní na dvojice věží ležící v sousedních sloupcích. Těchto dvojic je zřejmě celkem sedm. Máme však pouze sedm možných různých vzdáleností mezi nimi: jsou to čísla ve tvaru $\sqrt{r^2 + 1}$, kde r je řádková vzdálenost z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (nemůže být nulová, jelikož pak by se ohrožovaly). Aby se vzdálenosti neopakovaly, musíme použít každou vzdálenost právě jednou – speciálně tedy existuje dvojice věží v sousedních sloupcích, které jsou od sebe vzdáleny $\sqrt{7^2 + 1^2}$.

Obdobné argumenty platí i pro řádky, tudíž dokážeme najít dvojici věží v sousedních řádcích mající sloupcovou vzdálenost sedm. Vzdálenost této dvojice věží je však také $\sqrt{1^2 + 7^2}$. Tudíž se nám podařilo najít dvě dvojice věží se stejnou vzdáleností. Tyto dvojice ale nemůžou být stejné, neboť věže z první dvojice leží v sousedních sloupích a věže z druhé v sloupcích, které jsou od sebe vzdálené sedm. Tím pádem jsme s důkazem hotovi.

Poznámky:

Úlohu vyřešili skoro všichni zcela správně. Většina řešitelů dokázala, že je více dvojic věží než možných vzdáleností, tudíž se musí nějaká vzdálenost z Dirichletova principu zopakovat.

(Lucien Šíma)

Úloha 5.

Kuba si chtěl hodit dvěma hracími kostkami, ale protože se nudil, tak nejdříve sundal z jejich stěn všechna čísla, dal je do klobouku a zamíchal. S jakou pravděpodobností hodil v součtu 7, pokud víme, že všech dvanáct čísel před hodem náhodně nalepil zpět na kostky (na každou stěnu jedno)?

(Kuba Krásenský)

Řešení:

Zkusme celý proces provést naopak – nejprve kostkami hodíme, a až poté na jejich stěny náhodně nalepíme čísla. Hledaná pravděpodobnost na pořadí těchto dvou podprocesů nezáleží, protože se navzájem nijak neovlivňují.

V tuto chvíli už jde skutečně jenom o to, jaká dvě čísla budou vylosována na vrchní stěny hozených kostek. Pokud na první kostku vylosujeme číslo a, tak mezi losovanými čísly je právě jedno číslo b, které s a dává součet 7. Toto b je různé od a, a tak se objeví ve zbytku čísel dvakrát. Tedy dvě z jedenácti možností jsou úspěšné, proto je výsledná pravděpodobnost $\frac{2}{11}$.

Poznámky:
S velmi originálním řešením přišla *Lenka Kopfová*, která nejprve určila pravděpodobnost, že padnou dvě jedničky, a z ní pak trikem určila hledanou hodnotu. Její postup byl složitější než ten náš, ale zase představoval jiný úhel pohledu. Příklad se dal i různými (ale značně pracnými) způsoby spočítat přes rozbor všech možností, jak se nalepí čísla a co na polepených kostkách padne.

(Zuzka Svobodová)

Úloha 6.

Na šachovnici 8×8 *jsou zapsána čísla* $1, \dots, 64$, *přičemž každá dvě po sobě jdoucí čísla leží na políčkách sousedících hranou. Jaký je nejmenší možný součet čísel na diagonále, která spojuje bílá rohová políčka?*

(Honza Krejčí)

Řešení:
Představme si, že čísla zapisujeme na šachovnici postupně od 1 do 64. Vzhledem k tomu, že s políčkem jedné barvy sousedí hranou pouze políčka druhé barvy, musejí se barvy na cestě tvořené posloupností $1, \dots, 64$ střídat. Tudíž všechna lichá čísla budou zapsána na jedné barvě a sudá na druhé. Součet nejmenších sedmi čísel zapsaných na bílou diagonálu tedy nemůže být menší než $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$.

Zbývá odhadnout číslo největší. Všimněme si, že v okamžiku, kdy je zapsáno poslední číslo na bílou diagonálu, musí být již všechna pole na jedné její straně vyplněna. Pokud však spočteme počet polí na jedné straně bílé diagonály (včetně), zjistíme, že je tvoří 20 bílých a 16 černých polí. Jelikož se musejí barvy při vyplňování střídat, pro vyplnění 20. bílého pole jsme již museli vyplnit alespoň 19 černých, a tudíž je na tomto poli napsáno číslo větší nebo rovné $20 + 19 = 39$.

Pokud tedy spojíme oba odhady, dostáváme, že hledaný součet nemůže být menší než $39 + 49 = 88$. Tohoto součtu však lze dosáhnout – jedním z netradičních řešení je například následující vyplnění:

39	40	41	44	45	46	47	48
38	1	42	43	62	61	50	49
37	2	3	64	63	60	51	52
36	35	4	5	6	59	58	53
33	34	21	20	7	8	57	54
32	23	22	19	18	9	56	55
31	24	25	26	17	10	11	12
30	29	28	27	16	15	14	13

Poznámky:
Velká většina řešitelů přišla na jedno z mnoha optimálních řešení, nicméně důkaz toho, že neexistuje vyplnění lepší, byl pro většinu problém. Obvykle se objevovaly argumenty typu, že jednička musí být v rohu, že při vyplňování prvních třinácti čísel musíme pravidelně střídat strany podél diagonály, jinak by zbytek nešel vyplnit, apod. Vzorové řešení tyto domněnky vyvrací.

Dalším častým argumentem bylo tvrzení, že při vyplňování prvních sedmi polí diagonály musíme navštívit alespoň tři pole na každé její straně. To je sice pravda, ovšem toto tvrzení obvykle nebylo korektně zdůvodněno.

(Tomáš Novotný)

Úloha 7.

Mějme n-prvkovou množinu M a vyberme z ní n po dvou různých podmnožin. Dokažte, že existuje prvek $x \in M$ takový, že po jeho odebrání z každé z vybraných podmnožin, která ho obsahuje, získáme opět n různých množin.

(Kuba Löwit)

Řešení:

Aby po odebrání nějakého prvku nevzniklo n různých množin, tak se nějaké dvě množiny musely lišit právě o tento prvek a zbylé prvky musely mít stejné.

Předpokládejme pro spor, že existuje nějaká n-prvková množina M a jejích n po dvou různých podmnožin s vlastností, že pro libovolný prvek $x \in M$ existují dvě podmnožiny A, B takové, že A získáme z B odebráním prvku x.

Nakreslíme si graf, kde každou z uvažovaných množin reprezentujeme vrcholem a kde hrany nakreslíme následujícím způsobem: pro každý prvek $x \in M$ si vybereme právě jednu dvojici vrcholů, jejichž příslušné množiny se liší právě v x, a mezi ně nakreslíme hranu. Žádný vrchol jsme zcela jistě nespojili hranou se sebou samým. Dále jsme jednu dvojici podmnožin mohli spojit pouze jednou hranou (pokud se dvě množiny liší pouze o jeden prvek, pak je vyloučeno, aby se ještě lišily o nějaký jiný prvek). Jelikož má právě vyrobený graf n vrcholů a n hran, musí v něm již nutně existovat cyklus (na kterém leží alespoň tři vrcholy).

Nyní si na tomto cyklu vezměme dva sousední vrcholy X, Y. Protože jsme mezi ně nakreslili hranu, jim příslušné podmnožiny se liší o nějaký prvek a. BÚNO $a \in X$ a $a \notin Y$. Protože X, Y leží na jednom cyklu, vede mezi nimi ještě jedna cesta (která neobsahuje hranu mezi X a Y). Tato cesta přitom sestává z hran, z nichž žádná neznázorňuje odebrání či přidání prvku a – pro každý prvek z M jsme do grafu zakreslili právě jednu hranu a pro prvek a je tato hrana mezi již umístěna mezi vrcholy X a Y. Proto narážíme na spor – při průchodu z X do Y touto cestou jsme nemohli odebrat prvek a, přestože se o něj mají množiny příslušející vrcholům X, Y lišit.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámky:

Původní autorské řešení (a řešení *Matěje Doležálka*) využívalo n-rozměrnou hyperkrychli a tím naplňovalo souvislost úlohy s názvem série. Grafové řešení bylo nicméně elegantní a navíc o něco rychlejší.

(Marian Poljak)

Úloha 8.

Mějme nekonečnou krychličkovou síť plnou neobarvených krychliček. Filip a Rado hrají hru. Filip začíná a oba hráči se střídají v tazích. Filipův tah spočívá v obarvení dosud nezabarvené krychličky na červeno. Rado ve svém tahu vybere celou rovinnou vrstvu krychliček (kolmou na jednu ze tří os prostoru), v níž žádná krychlička není červená, a obarví je všechny na modro. Rozhodněte, pro která n může Filip nezávisle na Radových tazích dosáhnout stavu, kdy bude existovat n červených sousedících krychliček ve směru některé z os prostoru.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Úloha se na první pohled tváří, že Filip nemá šanci obarvit více než pár krychliček a že je Rado vždy schopen zablokovat jeho libovolný pokus pomocí svých šesti tahů, které by Filipovu konstrukci omezily ze všech stran. Ukážeme ale, že situace pro Filipa není tak bezvýchodná a že dovede obarvit n sousedících krychliček pro libovolné n.

K tomu se nám bude hodit nad hrou Filipa a Rada uvažovat trochu jinak. Zavedeme takzvanou *osovou variantu* hry – jejím hracím plánem budou pouze samotné číselné osy x, y, z. Filipův tah, v němž obarví krychličku (i, j, k), odpovídá v osové variantě obarvení bodu i na ose x, j na ose y a k na ose z, přičemž žádný z těchto bodů nesmí být už obarvený na modro (tzn. musí být buď neobarvený, nebo již červený) a alespoň jeden musí být nezabarvený. Při znovuobarvení tří červených bodů by totiž tah odpovídal obarvení již červené krychličky, což odporuje zadání. Také to ale nedává smysl pro Filipovu strategii – uvidíme, že snaha o obarvování dosud nezabarveného bodu na každé z os (což odpovídá obarvení krychličky, která neleží v žádné rovinné vrstvě s dosud obarvenými červenými krychličkami) přinese Filipovi ovoce. Radův tah v osové hře vypadá překvapivě skromně – kdykoliv se Rado rozhodne obarvit rovinu kolmou na některou z os protínající tuto osu v její i-té krychličce, v osové variantě to odpovídá obarvení bodu i na této ose. Rado nesmí vybrat rovinnou vrstvu krychliček, ve které je nějaká krychlička červená – přeloženo do osové hry, Rado smí během svého tahu obarvovat modře jen dosud neobarvené body.

Snadným postřehem nyní je, že pokud Filip zvládne v osové hře docílit stavu, kdy je na nějaké ose (říkejme, že je *obsazená*) n po sobě jdoucích bodů obarvených načerveno, nemůže jej již nic zastavit od výhry v původní hře. Rado v tomto případě totiž nemůže v onom červeném pásmu obarvit žádnou rovinu kolmou na obsazenou osu. Filipovi tedy stačí vybrat libovolnou červenou krychličku příslušející červenému pásmu a barvit ve směru obsazené osy až ke koncům pásma. Tím docílí n červených sousedících krychliček a zvítězí.

Jinými slovy můžeme říct, že dosáhne-li Filip posloupnosti n po sobě jdoucích červených bodů v osové hře, pak vyhraje. Navíc vidíme, že v osové hře Filip dělá při každém tahu až tři obarvení dosud neobarvených bodů, zatímco Rado jen jedno. To dává dobrou intuici, že díky této nerovnoměrnosti tahů Filip dokáže červeně obarvit sekvenci n po sobě jdoucích bodů.

Hlavní část důkazu, že se Filipovi povede vyhrát pro libovolné n, provedeme matematickou indukcí. Nejdříve zadefinujme pojem *k-sekvence* označující posloupnost k bezprostředně po sobě jdoucích červeně obarvených bodů na nějaké jedné ose v osové hře. Dále každou takovou k-sekvenci po sobě jdoucích červených bodů nazveme *neomezenou*, pokud není modře obarvený žádný bod na této ose ve vzdálenosti až do $2n + 1$ od obou jejích konců. Aneb je-li nějaká k-sekvence neomezená, tak má šanci být Filipem rozšířena na n-sekvenci, nezasáhne-li do tohoto rozšiřování Rado. Říkejme, že Rado svým tahem *omezí* nějakou k-sekvenci, pokud obarví modře nějaký bod, kterým poruší její neomezenost.

Lemma. *Pro libovolná přirozená čísla m, ℓ, kde $m \leq n$, Filip dovede vytvořit v osové hře ℓ neomezených m-sekvencí ležících na jedné ose.*

Důkaz. Indukcí podle m. Nejdříve uvažujme základní případ $m = 1$. Filip udělá $\lceil 1{,}5\ell \rceil$ obarvení, přičemž si bude dávat pozor, aby každé dva červené body v osové hře oddělovala dostatečně velká vzdálenost, např. $1000n + 1000$. Jinak řečeno, bude tahy obarvovat body velmi daleko od sebe, aby později při rozšiřování těchto 1-sekvencí na více-sekvence nedal Radovi možnost omezit více než jednu z nich za tah. Takhle umístí v osové hře celkem $3 \cdot \lceil 1{,}5\ell \rceil$ červených bodů (1-sekvencí), přičemž Rado dovede vzhledem k jejich „velkým“ vzdálenostem omezit nejvýše $\lceil 1{,}5\ell \rceil$ z nich. Tím Filipovi zbude alespoň 3ℓ neomezených 1-sekvencí, přičemž z Dirichletova principu musí na nějaké z os ležet alespoň ℓ z nich. Tím je základní případ dokončen.

Nyní dokážeme indukční krok – předpokládejme, že umíme docílit stavu, kdy je na nějaké z os (BÚNO na ose x) $\left\lceil \frac{3\ell(m+1)}{2} \right\rceil$ neomezených m-sekvencí, a dokažme, že pomocí nich dovedeme vytvořit ℓ neomezených $(m + 1)$-sekvencí. To může Filip zajistit opakováním následujících $m + 1$ tahů – vždy se pokusí v libovolném směru prodloužit stávající neomezenou m-sekvenci na $(m + 1)$-

sekvenci, přičemž zároveň bude těmito tahy postupně stavět nové sekvence na osách y, z. Během provedení těchto $m+1$ tahů tedy Filip (ignorujme na chvíli Radovo barvení) vytvoří $m+3$ nových $(m+1)$-sekvencí. Každým svým tahem totiž vytvořil novou sekvenci délky $m+1$ na ose x a pomocí všech $m+1$ tahů postavil na osách y, z dvě zbrusu nové $(m+1)$-sekvence. Rado může ve svých $m+1$ tazích (vzhledem k dostatečným vzdálenostem m-sekvencí od sebe) omezit nejvýše $m+1$ z nich. Proto během těchto $m+1$ tahů Filip vytvoří i přes Radovu snahu dvě nové neomezené $(m+1)$-sekvence na některé z os. Díky indukčnímu předpokladu začínáme s $\left\lceil \frac{3\ell(m+1)}{2} \right\rceil$ neomezenými m-sekvencemi. Proto může Filip zahrát $3\ell/2$-krát těchto $m+1$ tahů, čímž vytvoří na osách dohromady 3ℓ neomezených $(m+1)$-sekvencí, a tudíž opět z Dirichletova principu můžeme říct, že alespoň ℓ z nich je na společné ose. Tím je důkaz lemmatu ukončen.

Nyní je již důkaz zřejmý – pomocí postupu v lemmatu jsme schopní pro každé zadané n vytvořit libovolně mnoho sekvencí délky menší nebo rovné n na některé z os. Filipovi k vítězství v osové hře stačí jediná n-sekvence. A již víme, že po vyhrání osové hry Rado nemůže Filipovi nijak zabránit ve vítězství celé hry. Tím je hotovo.

Poznámky:
Ačkoliv správná řešení dorazila pouze od *Matěje Doležálka* a *Josefa Minaříka*, gratuluji všem, kteří se tohoto těžkého příkladu nezalekli. Pro vyřešení úlohy bylo potřeba se odpoutat od strategie, při které si Filip postupně staví kompaktní útvar z kostiček blízko u sebe a kterou Rado dovede zničit v šesti tazích. Představíme-li si takovou strategii v osové hře, je rychle vidět, že blízkost kostiček hraje Radovi do karet a že nebude potřebovat mnoho tahů na omezení takové celistvé struktury. Naopak, čím větší vzdálenost kostiček od sebe Filip zvolí, tím méně dovolí Radovi omezovat naráz více než jednu sekvenci a tím více si bude tvořit nových neomezených sekvencí, namísto toho aby „plýtval" kostičky do těch již omezených. Nutno také poznamenat, že hodně číselných výrazů v důkazu se dá nahradit slovy „dostatečně daleko" (např. $5n$ a $2n+1$ u definice omezenosti).

(Marian Poljak)