Finální myš-maš

4. jarní série Termín odeslání: 9. května 2017

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

Anička o prázdninách navštívila muzeum, ve kterém byla vystavena starodávná tabulka o n řádcích a 2017 sloupcích vyplněná reálnými čísly. Součty čísel ve všech jejích sloupcích byly navzájem různé. Anička tabulku omylem shodila a všechna políčka z ní vypadala. Teď by ráda čísla vrátila zpátky tak, aby součty nejen ve všech sloupcích, ale i ve všech řádcích byly navzájem různé.[1] Podaří se jí to pro jakákoliv čísla v tabulce, pokud

(a) $n = 2$, (2 body)

(b) $n = 2017$? (3 body)

Úloha 2.

(a) Tonda narazil na n po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součtem je prvočíslo. Určete všechny možné hodnoty n. (2 body)

(b) Orgové PraSátka na schůzce debatovali o tom, kam se půjde na PraSečí výlet. Zaznělo několik nápadů a každý z nich podporovalo právě k organizátorů z celkově $2k$ přítomných. Ukázalo se, že pro libovolnou $(k-1)$-člennou skupinu organizátorů existuje právě jeden návrh, který podporuje celá skupina. Dokažte, že potom $(k+1)$ je prvočíslo. (3 body)

Úloha 3.

(a) Na bleším trhu si Honza koupil hodinový ciferník s obvykle umístěnými čísly od jedné do dvanácti. Zvláštní je ale tím, že se s čísly dá hrát. Honza každé ráno buď vyměnil dvě protilehlá čísla, nebo dvě sousední o jedna zvýšil. Kdyby žil dost dlouho, mohl by po konečně mnoha dnech mít na ciferníku dvanáct stejných čísel?

(2 body)

(b) Na ostrově je n nor a v každé z nich žije jeden ptakopysk. Je známo, že každému ptakopyskovi se líbí jedna nora, a ta se nelíbí žádnému jinému. Po velkém ptakopyscím zasedání bylo rozhodnuto, že se všichni ptakopysci přestěhují do nor, které se jim líbí. Probíhá to následovně: Během jednoho dne si může každý ptakopysk vyměnit noru s jediným dalším. Určete nejmenší počet dní, který jim ke stěhování stačí, ať už je situace sebezapeklitější. (3 body)

Úloha 4.

(a) Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y splňující

$$f(x+y) < f(xy).$$

(2 body)

[1] Součet čísel v nějakém řádku se ale může rovnat součtu čísel v některém sloupci.

(b) Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \langle -1, 1\rangle \to \langle -1, 1\rangle$ splňující pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ vztah

$$f(f(x)) = -x.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) Na skalní římse leží tři hromádky o 51, 49 a 5 kamenech. V každém kroku můžeme buď sloučit dvě hromádky, nebo rozdělit hromádku se sudým počtem kamenů na dvě stejně velké. Můžeme takto vytvořit 105 hromádek po jednom kameni? (2 BODY)

(b) Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři. (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Kuba našel pravidelný čtyřstěn s hranou délky jedna. Nelenil a hned na jeho povrch nakreslil devět bodů. Dokažte, že mezi nakreslenými body vždy najdeme nějaké dva, jejichž vzdálenost v prostoru je nejvýše $\frac{1}{2}$. (2 BODY)

(b) Čtyřboký jehlan $SABCD$ má podstavu tvořenou lichoběžníkem $ABCD$ s rovnoběžnými stranami AD a BC, přičemž $|AD| > |BC|$. Středy úseček AB a SD označme po řadě M a N, průsečík roviny ABN s přímkou SC nazvěme E. Dokažte, že přímky BE a MN jsou rovnoběžné.

(3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Existuje přirozené číslo a takové, že součet počtů cifer a a a^3 je roven 2017? (2 BODY)

(b) Nechť $S(k)$ značí ciferný součet přirozeného čísla k. Pro které nejmenší přirozené n platí

$$S(n) = S(2n) = \cdots = S(2017n)?$$

(3 BODY)