Mnohoúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. PROSINCE 2016

Mnohoúhelník o n vrcholech je omezená část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čarou, která samu sebe neprotíná a je složená z n úseků (a n zlomů). Konvexní mnohoúhelník je takový mnohoúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší než $180°$. Pokud má úsečka krajní body uvnitř konvexního mnohoúhelníku, pak je v něm obsažena celá.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Nalezněte takový mnohoúhelník, aby každá jeho strana prodloužená na přímku protínala právě jednu další stranu v jejím vnitřním bodě.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Červenáčkovi došly omalovánky, a tak vzal svůj oblíbený pravidelný 2016úhelník a začal jeho vrcholy barvit načerveno. Dokažte, že když jich obarvil 1010, některé čtyři červené body tvořily vrcholy obdélníku[1].

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Najděte šestiúhelník, který lze rozdělit rovným řezem na čtyři shodné trojúhelníky.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Rozhodněte, zda pro nějaký stoúhelník platí, že pro žádné $n < 100$ není možné vybrat n jeho stran a složit z nich n-úhelník.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Upovídaná ovečka se každý den pase na některém vrcholu daného 2017úhelníku. Zlý vlk chce ovečku sežrat. Aby to mohl udělat, musí být nějaký den ve stejném vrcholu 2017úhelníku jako ovečka, přičemž i-tou noc se musí přesunout po obvodu mnohoúhelníku o právě i vrcholů, počínaje první nocí. Naštěstí pro vlka je ovečka upovídaná, a tak všechna zvířátka (včetně vlka) dopředu vědí, kde se který den bude pást. Kolik nejméně dní potřebuje vlk, aby byl ovečku vždy schopen chytit nezávisle na tom, ve kterém vrcholu se sám první den nachází?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Dva shodné pravidelné n-úhelníky se překrývají tak, že jejich průnik je $2n$-úhelník (ne nutně pravidelný), jehož hrany postupně dokola očíslujeme čísly 1 až $2n$. Dokažte, že součet délek jeho sudě očíslovaných stran je stejný jako součet délek jeho stran s lichým číslem.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Pro $n \geq 3$ je dán konvexní n-úhelník K, jehož žádné čtyři vrcholy neleží na jedné kružnici. Trojúhelník daný trojicí vrcholů n-úhelníku K nazveme *pokrývací*, pokud jemu opsaný kruh pokrývá K. Dokažte, že pokrývacích trojúhelníků je přesně $n - 2$.

[1] Obdélníkem je i čtverec.

Úloha 8. (5 bodů)

Rado a kaktus hrají logickou hru s pravidelným $(2n+1)$-úhelníkem, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Hrají střídavě, přičemž Rado začíná a každý z nich ve svém tahu začerní jeden dosud nezačerněný vrchol. Vyhraje ten, po jehož tahu na papíře nezbude žádný ostroúhlý trojúhelník s vrcholy v nezačerněných vrcholech původního $(2n+1)$-úhelníku. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.