# Cifry

3. jarní série — Termín odeslání: 10. dubna 2017

*Pokud není řečeno jinak, pro zápis čísel používáme desítkovou soustavu. V celé sérii jsou proměnné $k$ a $n$ přirozená čísla.*

Úloha 1. (3 body)
Nechť $S(k)$ značí ciferný součet čísla $k$. Nalezněte číslo $n$ takové, že[1] $(S(n) + 2017) \mid n$.

Úloha 2. (3 body)
Existuje přirozené číslo, které má právě deset přirozených dělitelů, přičemž tito dělitelé mají navzájem různé poslední cifry?

Úloha 3. (3 body)
Nechť $S(k)$ stále ještě značí ciferný součet čísla $k$. Najděte číslo $n$, pro které jsou $S(n)$ i $S(n+1)$ dělitelná sedmi.

Úloha 4. (5 bodů)
Dokažte, že pro každé číslo $n$ nesoudělné[2] s deseti existuje číslo složené ze samých jedniček, které je dělitelné $n$.

Úloha 5. (5 bodů)
Matěj s Bárou čekali na přednášku a oba se nudili. Matěj napsal na tabuli přirozené číslo. Potom každých pět minut Bára z čísla na tabuli vybrala nenulovou cifru, číslo smazala a místo něj napsala součet tohoto čísla se zvolenou cifrou. Dokažte, že se časem na tabuli muselo objevit sudé číslo.

Úloha 6. (5 bodů)
Na sto hřebících jsou popořadě zavěšená „dvojciferná“ čísla $00, 01, 02, \ldots, 10, \ldots, 99$. Áďa je mezi sebou přeskládala tak, aby se sousední čísla lišila právě v jedné cifře, a to o jedničku (tj. vedle 19 může být 09, 29 a 18, ale například 10 ne). Kolik nejvíce čísel mohlo zůstat na svém místě?

Úloha 7. (5 bodů)
Přirozené číslo nazveme *$k$-kruté*, pokud každý souvislý úsek jeho ciferného zápisu v soustavě o základu $k$ je prvočíslo (zapsané v téže soustavě). Dokažte, že pro každé $k \geq 2$ existuje jen konečně mnoho $k$-krutých čísel.

Úloha 8. (5 bodů)
Pepa se Štěpánem vymysleli čistě matematické kouzlo. Pepa požádá diváka, aby husím brkem napsal na kus pergamenu jakýkoliv řetězec $N$ arabských číslic. Potom Pepa zakryje některou dvojici sousedních cifer dalším kusem pergamenu. Teprve nyní přichází na scénu Štěpán, podívá se na neschované číslice a oznámí, které dvě cifry Pepa zakryl (včetně jejich pořadí). Pro jaké nejmenší $N$ je takový trik možné provést?

---

[1] O celých číslech $a$ a $b$ řekneme, že *$a$ dělí $b$*, píšeme $a \mid b$, pokud existuje celé číslo $l$ takové, že $b = al$.

[2] O $k$, $n$ řekneme, že jsou *nesoudělná*, pokud jejich největší společný dělitel je jedna.