Geometrie trojúhelníka 4 – Co se jinam nevešlo

Vítejte u posledního dílu seriálu. Zde si ukážeme několik dalších tvrzení o trojúhelnících. Většina z nich není příliš užitečná v MO, přesto jsou však zajímavá a myslíme si, že určitě stojí za to si je projít.

Než začneme, zopakujeme si značení z předchozích dílů, které zde budeme používat. Konkrétně to, že v trojúhelníku ABC značí I vepsiště; I_A, I_B a I_C připsiště; R, r, r_a, r_b a r_c poloměry kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnic připsaných; $\check{S}_A$, $\check{S}_B$ a $\check{S}_C$ Švrčkovy body; $\check{N}_A$, $\check{N}_B$ a $\check{N}_C$ antišvrky a A_0, B_0 a C_0 středy stran.

Středy středů

Ve druhém dílu jsme si mimo jiné řekli, že Švrčkův bod je středem úsečky spojující vepsiště a příslušné připsiště a že antišvrk je středem úsečky spojující příslušná připsiště. Díky této vlastnosti můžeme o některých dalších bodech prohlásit, že jsou „uprostřed“ mezi jinými, a některé vzdálenosti prohlásit za průměry jiných.

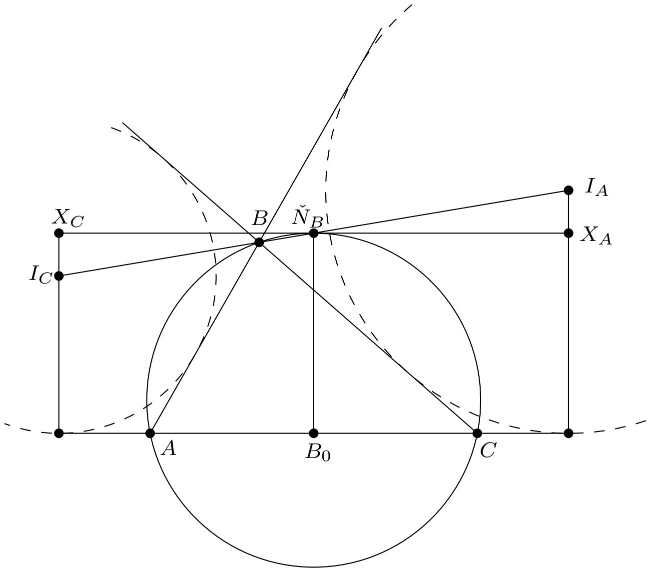
Tvrzení. *Platí* $|\check{N}_B B_0| = \frac{r_a + r_c}{2}$ *a* $|\check{S}_B B_0| = \frac{r_b - r}{2}$.

Toto tvrzení je lehce nahlédnutelné. Pokud si přímku AC nakreslíme vodorovně, pak velikost r_a, resp. r_c, popisuje, jak „vysoko“ je I_A, resp. I_C, nad přímkou AC. Protože $\check{N}_B$ je střed $I_A I_C$, bude nad AC „ve výšce“ $\frac{r_a + r_c}{2}$. Na druhou stranu $\check{N}_B B_0 \perp AC$, takže $|\check{N}_B B_0|$ opravdu vyjadřuje, jak „vysoko“ je $\check{N}_B$ nad AC. To nám dává první rovnost.

Druhou dokazovanou rovnost dostáváme analogicky díky tomu, že r a r_b popisují, jak vysoko jsou I nad a I_B pod AC, že $\check{S}_B$ je středem II_B a že $\check{S}_B B_0$ je úsečka, která měří příslušnou kolmou vzdálenost. Znaménko mínus se v rovnosti objevuje proto, že I je na opačné straně od AC než $\check{S}_B$ a I_B.

Kdybychom chtěli tyto myšlenky převést do formálnější podoby, mohli bychom to udělat takto:

Důkaz. Buď ℓ přímka skrze $\check{N}_B$ rovnoběžná s AC. Nechť X_A a X_C jsou paty kolmic z I_A a I_C na ℓ. BÚNO nechť I_C leží v pásu mezi přímkami AC a ℓ. Protože $I_A X_A \perp \ell \perp I_C X_C$ a $|I_A \check{N}_B| = |I_C \check{N}_B|$, jsou trojúhelníky $I_A X_A \check{N}_B$ a $I_C X_C \check{N}_B$ dle věty *usu* shodné. Proto $|I_A X_A| = |I_C X_C|$. Ale protože vzdálenost mezi přímkami ℓ a AC je $|\check{N}_B B_0|$, platí $|I_A X_A| = r_a - |\check{N}_B B_0|$ a $|I_C X_C| = |\check{N}_B B_0| - r_c$. Z toho už dostaneme první část zkoumaného tvrzení. Druhá část se provede analogicky.



Důsledek. *Platí* $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Důkaz. Úsečka $\check{N}_B\check{S}_B$ obsahuje B_0 a tvoří průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Platí tedy

$$4R = 2 \cdot |\check{N}_B\check{S}_B| = 2 \cdot \left(|\check{N}_B B_0| + |B_0\check{S}_B|\right) = 2 \cdot \left(\frac{r_a + r_c}{2} + \frac{r_b - r}{2}\right) = r_a + r_b + r_c - r.$$

Cvičení. Ukažte, že obvod šestiúhelníku $A\check{S}_C B\check{S}_A C\check{S}_B$ je alespoň $4(R + r)$.

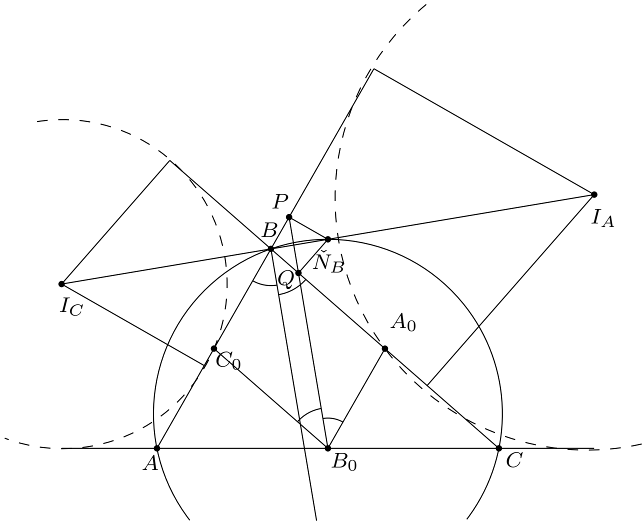
Návod. Uvědomte si, že $|A\check{S}_B| + |\check{S}_B C| = |II_B|$, a použijte $|II_B| \geq r + r_b$ spolu s předchozím důsledkem.

Průměrovat různé délky však lze i jinými způsoby. Příkladem budiž následující tvrzení.

Tvrzení. *Potenční střed kružnic připsaných trojúhelníku ABC je vepsištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$.*

Důkaz. Označme si kružnice připsané jako ω_A, ω_B a ω_C. Dále si označme Simsonovy přímky bodů $\check{N}_A$, $\check{N}_B$ a $\check{N}_C$ vzhledem k trojúhelníku ABC jako ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C. Začneme pozorováním, že ℓ_B je chordálou kružnic ω_A a ω_C.

Proč tomu tak je? Přímky AB, BC i CA jsou společné tečny ω_A a ω_C. Vyberme si libovolnou z nich a spusťme na ni kolmice z I_A, $\check{N}_B$ a I_C. Ty ji protnou v bodech X, Y a Z. Protože $\check{N}_B$ je střed I_AI_C, dá se lehce nahlédnout (a dokázat podobně jako v předchozím tvrzení), že Y je střed XZ. Ovšem X a Z jsou doteky ω_A a ω_C s naší vybranou přímkou, takže mocnost bodu Y k ω_A, resp. ω_C, je $|XY|^2$, resp. $|YZ|^2$. Ale protože Y je střed XZ, jedná se o stejnou hodnotu, a tedy Y má k oběma kružnicím stejnou mocnost, neboli leží na jejich chordále. Toto platí pro patu kolmice z $\check{N}_B$ na libovolnou stranu trojúhelníka, takže ℓ_B skutečně splývá s chordálou ω_A a ω_C.



Nyní potřebujeme ukázat, že ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C skutečně procházejí vepsištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Zjevně to stačí ukázat jen pro ℓ_B.

Bod B_0 je patou kolmice z $\check{N}_B$ na AC, takže ℓ_B bodem B_0 prochází. Takže (protože trojúhelník $A_0B_0C_0$ je jen obraz ABC ve stejnolehlosti) stačí ukázat, že přímka ℓ_B je rovnoběžná s osou úhlu ABC.

Nechť P a Q jsou paty kolmic z $\check{N}_B$ na AB a BC. Protože $\check{N}_B$ je středem přímky I_AI_C, platí $|\check{N}_BP| = \frac{|r_a - r_c|}{2} = |\check{N}_BQ|$. (To nahlédneme podobným způsobem jako předchozí tvrzení.) Dále $|\sphericalangle BP\check{N}_B| = 90° = |\sphericalangle BQ\check{N}_B|$, takže z věty *Ssu* jsou trojúhelníky $B\check{N}_BP$ a $B\check{N}_BQ$ shodné. To ale znamená, že $PQ \perp \check{N}_BB$. Protože přímka PQ splývá s přímkou ℓ_B, přímka $\check{N}_BB$ je osou vnějšího úhlu ABC a osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou kolmé, dostáváme to, co jsme chtěli.

Cvičení. Pomocí úvah tohoto typu si uvědomte, proč se na sebe body dotyku kružnice vepsané a připsané vzájemně zobrazují přes střed strany.

Návod. Využijte toho, že se jedná o projekce z vepsiště, připsiště a Švrčkova bodu mezi nimi.

Cvičení. Ukažte, že pokud $r + r_a = |BC|$, pak je trojúhelník ABC pravoúhlý. (MO 2016)

Návod. BÚNO zvolte $|AB| < |AC|$ a označte X jako patu kolmice z $\check{S}_A$ na AB. Podívejte se na čtyřúhelník $BX\check{N}_BB_0$ a všimněte si, že má protější strany stejně dlouhé. Za pomoci tětivovosti a kolmostí pak ukažte, že se jedná o obdélník.

Sondatova věta

V této kapitolce si ukážeme nejjednodušší část takzvané Sondatovy věty. Ta se ve skutečnosti skládá ze tří dílčích tvrzení, ale pro důkaz zbylých dvou bychom museli vybudovat další arzenál, čítající mimo jiné Newtonovu–Gaussovu větu o čtyřúhelníku a Desarguesovu větu. I s nimi by důkaz byl velmi dlouhý a náročný, rozhodli jsme se tedy druhou a třetí část věty neuvádět. První část si však můžete vychutnat v její plné kráse.

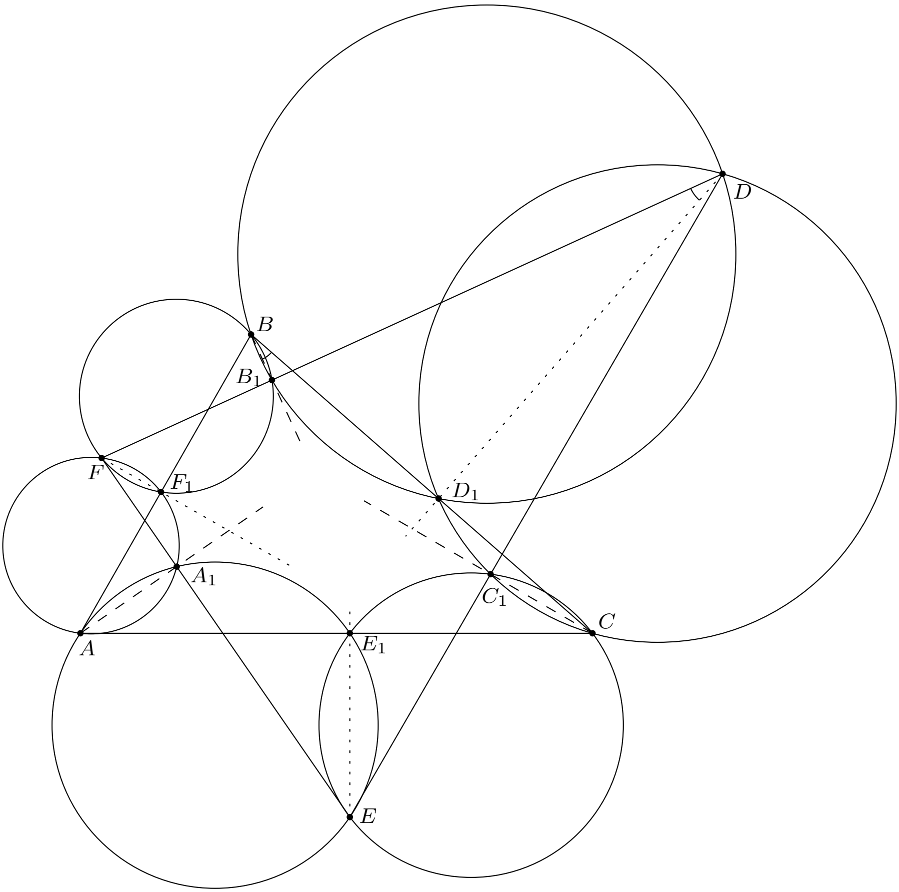
Budeme říkat, že trojúhelník ABC je *kolmý na trojúhelník* DEF, pokud platí, že kolmice z A na EF, kolmice z B na FD a kolmice z C na DE se protínají v jednom bodě. Uvědomme si, že výrok

„trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník DEF“ je ekvivalentní s „trojúhelník BCA je kolmý na trojúhelník EFD“, ale ne s „trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník EFD“.

Věta. (Sondatova) *Trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník DEF právě tehdy, když je trojúhelník DEF kolmý na trojúhelník ABC.*

Důkaz. Paty kolmic z A, B, C, D, E a F na EF, FD, DE, BC, CA a AB označme A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 a F_1. Chceme ukázat, že AA_1, BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě právě tehdy, když se DD_1, EE_1 a FF_1 protínají v jednom bodě.

Pro jednoduchost předpokládejme, že konfigurace odpovídá našemu obrázku (pro obecnost bychom zavedli orientované úhly). Potom jsou čtyřúhelníky AA_1F_1F, FF_1B_1B, BB_1D_1D, DD_1C_1C, CC_1E_1E a EE_1A_1A tětivové, protože pravé úhly nám dávají Thaletovy kružnice. To znamená, že $|\sphericalangle B_1BC| = |\sphericalangle B_1BD_1| = |\sphericalangle B_1DD_1| = |\sphericalangle FDD_1|$. Analogicky dostaneme rovnost dalších pěti dvojic úhlů.



To, že se přímky AA_1, BB_1 a CC_1 protínají v jednom bodě, je podle goniometrické Cevovy věty ekvivalentní vztahu

$$\frac{\sin|\sphericalangle A_1AB|\sin|\sphericalangle B_1BC|\sin|\sphericalangle C_1CA|}{\sin|\sphericalangle A_1AC|\sin|\sphericalangle B_1BA|\sin|\sphericalangle C_1CB|} = 1.$$

Analogicky to, že se přímky DD_1, EE_1 a FF_1 protínají v jednom bodě, je ekvivalentní

$$\frac{\sin|\sphericalangle D_1DF|\sin|\sphericalangle E_1ED|\sin|\sphericalangle F_1FE|}{\sin|\sphericalangle D_1DE|\sin|\sphericalangle E_1EF|\sin|\sphericalangle F_1FD|}=1.$$

Ovšem díky našim vztahům mezi úhly je

$$\frac{\sin|\sphericalangle A_1AB|\sin|\sphericalangle B_1BC|\sin|\sphericalangle C_1CA|}{\sin|\sphericalangle A_1AC|\sin|\sphericalangle B_1BA|\sin|\sphericalangle C_1CB|}=\frac{\sin|\sphericalangle D_1DF|\sin|\sphericalangle E_1ED|\sin|\sphericalangle F_1FE|}{\sin|\sphericalangle D_1DE|\sin|\sphericalangle E_1EF|\sin|\sphericalangle F_1FD|},$$

neboli levé strany uvedených vztahů jsou si rovny. Tím je důkaz dokončen.

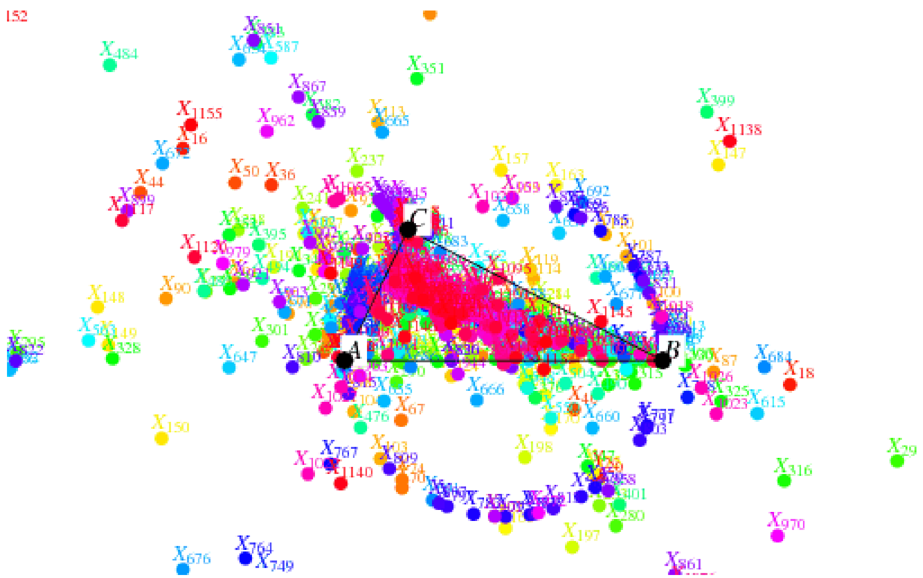
Cvičení. Buď ABC trojúhelník a D, E a F body takové, že $|BD|=|DC|$, $|CE|=|EA|$ a $|AF|=|FB|$. Ukažte, že kolmice z A, B a C na EF, FD a DE se protínají v jednom bodě.

Návod. Použijte Sondatovu větu.[1] Potom si uvědomte, že chcete ukázat, že se osy stran protínají v jednom bodě.

Cvičení. V trojúhelníku ABC si označme paty výšek jako D, E a F. Označme X, Y a Z středy úseček AD, BE a CF. Dokažte, že kolmice z D, E a F na YZ, ZX a XY se protínají v jednom bodě. (EMC 2013)

Podivné přátelství mezi středy

V průběhu seriálu jsme si ukázali několik středů trojúhelníka. Známých středů existuje opravdu nezměrné množství; encyklopedie středů trojúhelníka[2] jich v době psaní tohoto dílu vedla 13390. Zde je vykresleno několik prvních:[3]



[1]Vřele doporučujeme si úlohu vyřešit i bez použití Sondatovy věty. Cvičení se tím stane o dost obtížnějším, ale řešení je velmi pěkné. Návod zní (a pozor, přicházejí spoilery), že si chcete dokreslit tři vhodné kružnice a všimnout si, že se vlastně jedná o tvrzení o potenčním středu.

[2]Viz *http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html*.

[3]Na adrese *http://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html* najdete tento obrázek v duhově barevné formě.

Zajímavým cvičením v matematické výřečnosti je úkol formulovat, co vlastně slovní spojení „střed trojúhelníka“ přesně znamená. Zkuste teď na chvíli přestat číst a zamyslet se nad tím. (Varujeme, že následující dva odstavce a výsledná definice možná budou někomu připadat nehezké, některým mohou až působit pocity nevolnosti. V případě silné alergické reakce na algebru je možné příslušný úsek přeskočit, pro pochopení dalšího textu není příliš důležitý.)

Máte? Pokud ano, pravděpodobně jste došli k lehce neintuitivnímu poznání, že střed trojúhelníka vlastně není bod, ale funkce, která vrcholům každého trojúhelníka daný bod přisuzuje. A to ještě relativně specifickým způsobem. Zaprvé by střed měl být přiřazen symetricky, bez ohledu na pojmenování bodů. Takže připsiště není střed. Navíc asi platí, že při zmenšení/posunutí/otočení/překlopení by se střed měl stejným způsobem zmenšit/posunout/otočit/překlopit. A nezapomeňte na to, že naše funkce není nutně definovaná úplně pro všechny trojice bodů v rovině – pro degenerované trojúhelníky mnoho středů přestává existovat. A když už jsme u toho definování, možná není úplně od věci zamyslet se, co je to vlastně bod v rovině. Většinou se k pořádné definice roviny používají kartézské souřadnice a tam je opravdu nemotorné mluvit o obecném otáčení, překlápění a podobných zobrazeních.

Kdybychom opravdu chtěli střed definovat formálně, bylo by asi nejvhodnější si body zavést pomocí komplexních čísel[4], kde se se zobrazeními obvykle pracuje vcelku dobře. Nejlepší definice, se kterou autoři přišli, je následující:

Definice. Nechť T je množina všech trojic $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, kde $A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A} \neq \overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A$.[5] Potom jako *střed trojúhelníka* označujeme jakoukoliv symetrickou funkci $f : T \to \mathbb{C}$, která pro každé $(A, B, C) \in T$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $\alpha \neq 0$ splňuje $f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \overline{f(A, B, C)}$ a $f(\alpha A + \beta, \alpha B + \beta, \alpha C + \beta) = \alpha f(A, B, C) + \beta$.

Některé z vás určitě tato podivná a pro naše účely zbytečně formální definice vyděsila nebo odradila. Nic si z toho nedělejte. Pro naše účely je důležité primárně to, že na střed spíš než jako na konkrétní bod budeme koukat jako na způsob, jak trojúhelníku bod přiřadit. A s touto vědomostí se můžeme vrátit zpátky ke geometrii.

Některé dvojice středů nyní budeme označovat jako *přátele*[6] (pozor, neplést s kamarády). O dvojici středů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ řekneme, že $\mathcal{P}$ je přítel $\mathcal{Q}$, pokud platí následující výrok: Když v libovolném trojúhelníku ABC sestrojíme čtverce nad stranami A_BBCA_C, B_CCAB_A a C_AABC_B neprotínající ABC a když si označíme jako P^A, P^B a P^C postupně $\mathcal{P}$-středy trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C, pak se přímky AP^A, BP^B a CP^C protínají v jednom bodě Q, který je $\mathcal{Q}$-středem trojúhelníka ABC.

Zmatení? Ukažme si to na příkladu.

Tvrzení. *Opsiště je přítel Lemoinova bodu.*

Důkaz. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC a příslušné čtverce. Označíme si jako O^A, O^B a O^C opsiště trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C. Abychom ukázali, že opsiště je přítel Lemoinova bodu, je třeba ukázat, že AO^A, BO^B a CO^C se protínají v Lemoinově bodě K trojúhelníku ABC, neboli že se jedná o symediány.

Jak uděláme toto?

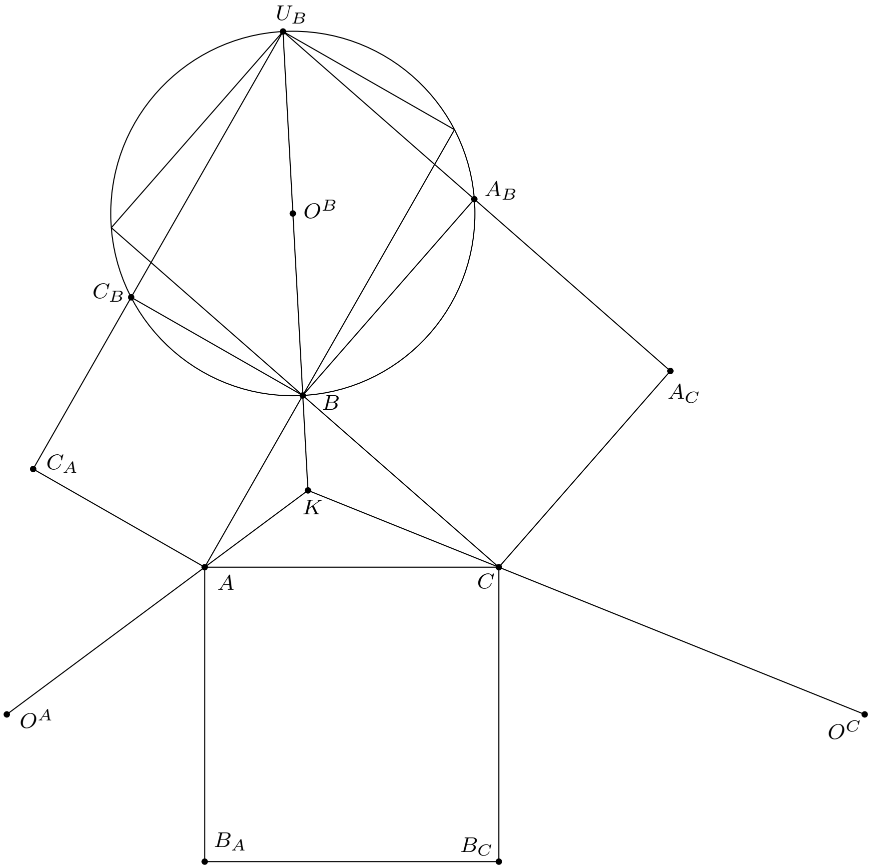
Buď U_B obraz bodu O^B ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem 2. Zjevně stačí ukázat, že BU_B je symediána v ABC. Protože O^B je střed trojúhelníku C_BBA_B, platí $|\sphericalangle U_BA_BB| = |\sphericalangle U_BC_BB| = 90^\circ$. Tedy U_B je průsečík přímek C_AC_B a A_BA_C. Protože se jedná o rovnoběžky se stranami AB a BC, dostáváme, že vzdálenost bodu U_B od přímek AB a BC je (díky pravým úhlům ve čtverci) rovna $|C_BB|$ a $|A_BB|$, což je zase rovno $|AB|$ a $|BC|$. Ale symediána je tvořena právě

[4] Pokud jste komplexní čísla v životě nepotkali, následující definici zcela beze studu přeskočte.

[5] Jak asi chápete, toto jsou přesně trojice tvořící nedegenerované trojúhelníky.

[6] Anglická literatura využívá termínu *friends*. V české literatuře tento termín vzhledem ke své obskurnosti nemá ustálený překlad.

body, které mají poměr vzdáleností ke stranám trojúhelníku roven poměru délek těchto stran.[7] Takže U_B leží na B-symediáně a jsme hotovi.



Je jasné, že každý střed $\mathcal{P}$ má nanejvýš jednoho přítele – střed, který případně můžeme zadefinovat právě jako průsečík zmíněných přímek AP^A, BP^B, CP^C. Na druhou stranu kupříkladu střed Feuerbachovy kružnice přítele nemá, protože se příslušná trojice přímek neprotne. O tom se můžeme rychle přesvědčit například rychlým nákresem v nějakém kreslicím programu. (Tady pozor, kreslicí program nás o tomto sice může rychle přesvědčit, to však samozřejmě není pořádný důkaz. Ten by však byl vcelku technický, proto ho zde nebudeme provádět.)

Je asi zjevné, že když vztah nazýváme přátelstvím, měl by být symetrický. Tak si dokažme, že vskutku je.

Tvrzení. *Pokud je $\mathcal{P}$ přítel $\mathcal{Q}$, pak je $\mathcal{Q}$ přítel $\mathcal{P}$.*

Důkaz. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC a k němu příslušné body A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B. Označme jako Q^A, Q^B a Q^C postupně $\mathcal{Q}$-středy trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C.

[7] Viz Cvičení 58 v druhém dílu.

Dále si jako P označme $\mathcal{P}$-střed trojúhelníku ABC. Chceme ukázat, že Q^AA, Q^BB a Q^CC se protínají v bodě P.

Zaměřme se na trojúhelník C_BBA_B. Čtverce C_BBAC_A a A_BBCA_C jsou čtverce i nad jeho stranami a ABC je trojúhelník příslušející vrcholu B v C_BBA_B. Proto použitím skutečnosti, že $\mathcal{P}$ je přítel $\mathcal{Q}$, na trojúhelník C_BBA_B dostaneme, že PB prochází Q^B. To ale znamená, že Q^BB prochází P. Analogicky dokážeme tvrzení pro zbylé dvě přímky.

Uvědomme si, čím se přátelství liší od kamarádství. Kamarádství je závislé na trojúhelníku a pojí dvojice bodů v rovině. Přátelství je daleko abstraktnější pojem, mluví totiž o dvojicích obecných středů, nevázaných na konkrétní trojúhelník. Přesto spolu kamarádství a přátelství trochu souvisí.

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ je dvojice přátel. Jako $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{Q}'$ si označme středy definované jako kamarády $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. Pak $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{Q}'$ jsou přátelé.*

Důkaz. Osa úhlu ABC na sebe převádí AB a BC. Protože $AB \perp BC_B$ a $A_BB \perp BC$, převádí na sebe i BC_B a BA_B. Takže se jedná i o osu úhlu C_BBA_B. Proto se na sebe převádějí i spojnice B s příslušnými středy, a my máme hotovo.

Důsledek. *Kolmiště a těžiště jsou přátelé.*

Cvičení. Dokažte, že vepsiště je svým vlastním přítelem.

Cvičení. Dokažte, že kolmiště a těžiště jsou přátelé, bez použití předchozího tvrzení.

Návod. Ukažte, že těžiště je přítelem kolmiště – uvažujte bod X takový, že A_BXC_BB je rovnoběžník, a ukažte $XB \perp AC$.

Pokud vymyslíte, jak bez použití symetrie přátelství ukázat, že kolmiště je přítel těžiště, zašlete prosím své řešení na *mks@mff.cuni.cz*. Autoři seriálu jsou na něj zvědaví a pěkným řešením si získáte jejich nehynoucí obdiv (a za obzvlášť pěkné možná i nějakou čokoládu).

Závěr

Tímto bychom se s vámi rádi rozloučili. Doufáme, že jste si naši okružní jízdu trojúhelníkem užili a že jste se během ní něco naučili. Jako vždy platí, že se v případě jakýchkoliv dotazů můžete bez obav obrátit na mail *mks@mff.cuni.cz* nebo přímo na autory. Přejeme vám, ať se vám i vaše další setkání s trojúhelníkem (a obecně geometrií) líbí.

Zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Titu Andreescu: *106 Geometry Problems from the AwesomeMath Summer Program*,

[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Titu Andreescu: *107 Geometry Problems from the Awesomemath Year-Round Program*,

[3] Cosmin Pohoata, Titu Andreescu: *110 Geometry Problems for the International Mathematical Olympiad*,

[4] Bocanu Marius: *On Fontené's Theorems*,

[5] Linh Nguyen Van: *Fontene Theorems and Some Corollaries*,

[6] Michal „Kenny“ Rolínek, *Geometrie trojúhelníka*, sborníkový příspěvek MKS, Staré město, 2009,

[7] Michal „Kenny“ Rolínek, *Antirovoběžnost*, sborníkový příspěvek MKS, Oldřichov, 2012,

[8] Michal „Kenny“ Rolínek, *Trojúhelník tam, zpátky a ještě dál*, sborníkový příspěvek iKS, Hostětín, 2012,

[9] Josef Tkadlec, *Dokreslování*, sborníkový příspěvek MKS, Horní Lysečiny, 2013,
[10] Dominik Teiml, *The Euler Line*, Extended Essay in Mathematics, The English College in Prague, 2013.