Geometrie trojúhelníka II – Konstrukce pokračuje

Geometry is just plane fun. – neznámý autor

Vítáme vás u druhého dílu seriálu. I tentokrát vám předvedeme několik triků, které se mohou hodit při řešení úloh kteréhokoliv kola matematické olympiády nebo významného matematického semináře. A protože toho máme na programu hodně, nebudeme se zdržovat dlouhým úvodem a rovnou se pustíme do práce!

Rychloúvod do mocnosti

V minulém díle jsme si na začátku stručně popovídali o stejnolehlosti, abychom ji poté mohli využívat. Nyní uděláme něco podobného, tentokrát si ovšem představíme mocnost. Stejně jako posledně, ani tentokrát nebudeme uvedená fakta dokazovat.

Pro kružnici k se středem O a poloměrem R budeme *mocností* bodu X ke kružnici k myslet číslo $p(X,k) = |XO|^2 - R^2$.

Povšimněme si, že mocnost bodu je kladná pro X vně k, nulová pro X ležící na k a záporná[1] pro X ležící uvnitř k.

Tvrzení 1. *Nechť přímka ℓ vedená bodem X protne k v bodech P a Q. Potom $p(X,k) = |XP| \cdot |XQ|$ pro X ležící vně k a $p(X,k) = -|XP| \cdot |XQ|$ pro X ležící uvnitř k.*

Speciálně pokud X leží vně k a T je bod dotyku tečny z X ke k, pak $p(X,k) = |XT|^2$.

Nejdůležitějším důsledkem mocnosti je následující věta.

Tvrzení 2. *Pokud $ABCD$ je čtyřúhelník, X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AC a BD, pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$, a to nastane právě tehdy, když $|YA| \cdot |YC| = |YB| \cdot |YD|$.*

Podobně pro trojúhelník ABC a bod X ležící na přímce AB mimo úsečku AB platí, že XC je tečnou k $\triangle ABC$ právě tehdy, když $|XA| \cdot |XB| = |XC|^2$.

[1] Občas se ovšem v matematické literatuře mocnost definuje jako absolutní hodnota příslušného rozdílu, a pak samozřejmě záporná být nemůže.

Je přirozené ptát se, kdy má daný bod ke dvěma různým kružnicím stejnou mocnost. Odpověď na tuto otázku je druhým nejdůležitějším faktem o mocnosti:

Tvrzení 3. *Pokud ω_1 a ω_2 jsou kružnice s různými středy O_1 a O_2, potom existuje přímka ℓ kolmá na O_1O_2 taková, že pro libovolný bod X platí $p(X, O_1) = p(X, O_2)$ tehdy a jen tehdy když X leží na ℓ. Této přímce říkáme chordála kružnic ω_1 a ω_2.*

Speciálně pro kružnice protínající se ve dvou bodech je chordálou spojnice těchto bodů. Pokud se dvě kružnice dotýkají, potom chordálu představuje společná tečna v bodě dotyku.

Nakonec ještě uveďme tvrzení, které dostaneme využitím poslední věty pro trojici kružnic.

Tvrzení 4. *Nechť ω_1, ω_2 a ω_3 jsou kružnice. Potom pokud ke každé dvojici kružnic sestrojíme jejich chordálu, jsou tyto buď rovnoběžné, nebo se protínají v jednom bodě. V druhém případě tento bod nazýváme potenčním středem kružnic ω_1, ω_2 a ω_3.*

Švrčkův bod

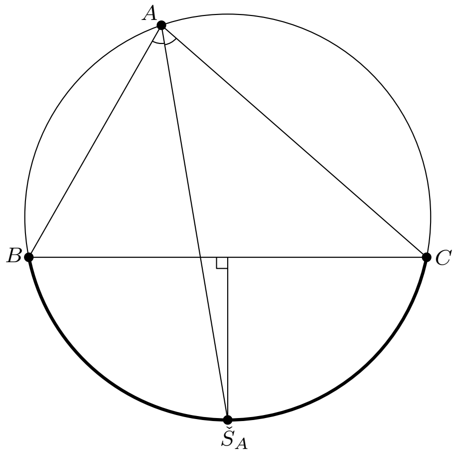
Geometry keeps you in shape. – neznámý autor

V tomto oddíle se budeme věnovat bodu, kterému se v česko-slovenském olympiádním prostředí často říká „Švrčkův“ na počest matematika, geometra a organizátora matematických olympiád Jaroslava Švrčka. Poznamenejme ovšem, že toto označení není žádným způsobem oficiální a v matematických olympiádách (které občas opravuje i sám pan Švrček) doporučujeme ho příliš nepoužívat.

Na příkladě Švrčkova bodu si předvedeme zajímavý geometrický princip. Představte si, že se snažíte dokázat to, že se tři objekty protínají v jediném bodě. Obvyklý postup je nějak si označit průsečík dvou z nich a pak se snažit ukázat, že leží i na tom třetím. Náš princip by se dal shrnout slovy „na pořadí záleží“ – když zvolíte nevhodný průsečík, budete mít mnohem víc práce.

Tvrzení 5. *V trojúhelníku ABC mají osa strany BC, vnitřní osa úhlu CAB a kružnice opsaná společný bod. Tento bod neoficiálně nazýváme Švrčkův bod příslušející vrcholu A a značíme jej $\check{S}_A$.*

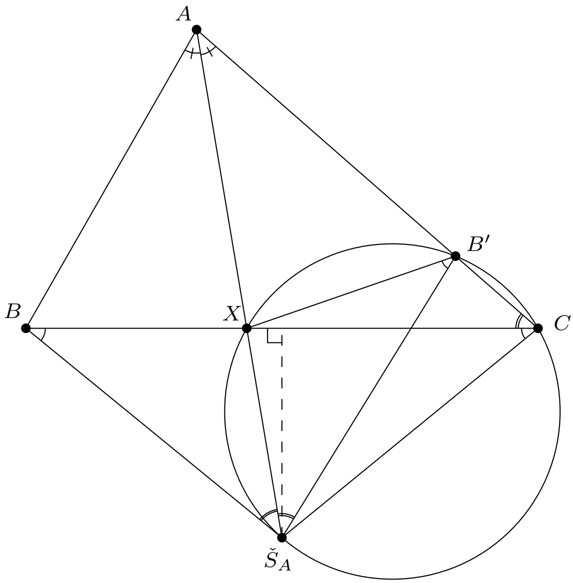
Důkaz. (první) Nazvěme kružnici opsanou $\triangle ABC$ jako Ω. Nechť osa úsečky BC protíná Ω v bodě $\check{S}_A$. (Takové průsečíky jsou dva; vybereme ten, který leží na opačné straně od přímky BC než bod A.) Potom mají oblouky $B\check{S}_A$ a $\check{S}_AC$ stejnou délku, a proto jim přísluší stejný obvodový úhel. Proto $|\sphericalangle BA\check{S}_A| = |\sphericalangle \check{S}_AAC|$, takže $\check{S}_A$ skutečně leží na ose vnitřního úhlu BAC. Lehké, žeano? $\square$



Důkaz. (druhý) Tentokrát $\check{S}_A$ definujme jako průsečík Ω a vnitřní osy úhlu BAC (různý od A). Potom obloukům $B\check{S}_A$ a $\check{S}_AC$ přísluší obvodový úhel stejné velikosti, takže musejí být stejně dlouhé. Proto je i $|B\check{S}_A| = |\check{S}_AC|$, takže $\check{S}_A$ leží na ose strany BC a jsme opět hotovi. Tento důkaz je prakticky stejný jako ten předchozí, jen obrácený a je pořád stejně těžký. $\square$

Důkaz. (třetí) Co se stane, když $\check{S}_A$ definujeme jako průsečík osy BC a vnitřní osy $\sphericalangle BAC$? Tak zaprvé, pro $|BA| = |AC|$ tato definice nedává žádný smysl, protože v tu chvíli tyto dvě přímky splývají. Ale dobře, v tomto speciální případě je zjevné, že tvrzení platí. Takže předpokládejme, že $|BA| \neq |AC|$. Co teď? Situace je oproti předchozím dvěma o dost těžší, protože tu není žádný zjevný způsob, jak přenášet úhly. Řešení stále existuje, ale je poněkud trikové. BÚNO předpokládejme, že $|BA| < |AC|$. Nechť B' je obraz B podle $A\check{S}_A$.[2] Protože $A\check{S}_A$ je osa úhlu, leží B' na straně AC. Nechť X je průsečík $A\check{S}_A$ s BC. Potom platí $|\sphericalangle XB'\check{S}_A| = |\sphericalangle XB\check{S}_A| = |\sphericalangle XC\check{S}_A|$, takže $X\check{S}_ACB'$ je tětivový čtyřúhelník. Potom ale $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle B'CX| = |\sphericalangle B'\check{S}_AX| = |\sphericalangle X\check{S}_AB| = |\sphericalangle A\check{S}_AB|$, z čehož už plyne, že $\check{S}_A$ leží na Ω.

[2]Mluvíme-li o *obrazu podle přímky*, myslíme tím samozřejmě obraz v osové souměrnosti. Podobně *obraz podle bodu* vždy znamená obraz v souměrnosti středové, pokud není přímo zmíněno, že se jedná o stejnolehlost s jiným koeficientem.



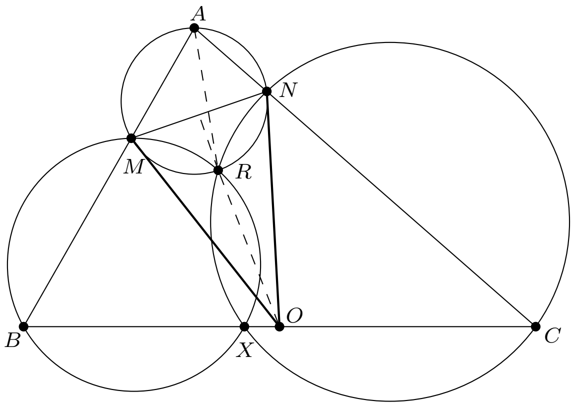
□

Nyní pomocí této vlastnosti Švrčkova bodu vyřešíme příklad z mezinárodní olympiády.

Příklad 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, ve kterém $|AB| \neq |AC|$. Kružnice nad průměrem BC protíná strany AB a AC postupně v bodech M a N. Označme jako O střed strany BC. Vnitřní osy úhlů BAC a MON se protínají v R. Dokažte, že se kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR podruhé protínají na straně BC.

(IMO 2004)

Řešení. Protože O je střed BC, platí $|OM| = |ON|$. Proto v trojúhelníku MON splývá osa úhlu s osou strany, a proto je R vlastně průsečík vnitřní osy úhlu MAN a osy strany MN. To znamená, že R je Švrčkův bod tohoto trojúhelníku, takže $ANRM$ je tětivový čtyřúhelník. Nazvěme jako X druhý průsečík kružnic opsaných $\triangle BMR$ a $\triangle CNR$. Potom z doplňkových úhlů v tětivových čtyřúhelnících platí $|\sphericalangle BXR| = 180° - |\sphericalangle RMB| = |\sphericalangle AMR| = 180° - |\sphericalangle RNA| = |\sphericalangle CNR| = 180° - |\sphericalangle RXC|$, z čehož ovšem plyne, že X leží na BC, což jsme chtěli dokázat.



Cvičení 7. Nechť AL a BK jsou vnitřní osy úhlů v různostranném trojúhelníku ABC (kde L leží na straně BC a K na straně AC). Osa úsečky BK protíná přímku AL v M. Bod N je zvolen na přímce BK tak, že $LN \parallel MK$. Ukažte, že $|LN| = |NA|$.
(Junior Balkan 2010)

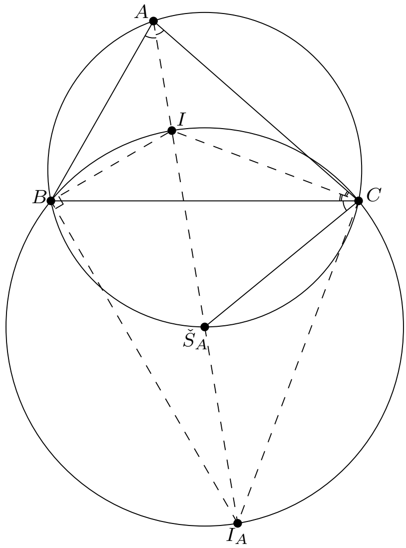
Návod. Uvědomte si, že M je Švrčkův bod v $\triangle ABK$. Pak úhlete.

Proč je Švrček nejlepší

Nyní si dokážeme dost možná nejdůležitější tvrzení o Švrčkově bodu. Připomeňme, že písmenem I označujeme vepsiště a symbolem I_A zase A-připsiště.

Tvrzení 8. *V trojúhelníku ABC je $BICI_A$ tětivový čtyřúhelník a příslušná kružnice má střed v $\check{S}_A$.*

Důkaz. Protože vnitřní a vnější osy úhlu jsou na sebe kolmé, platí $|\sphericalangle I_ABI| = 90° = |\sphericalangle ICI_A|$, takže $BICI_A$ je skutečně tětivový čtyřúhelník. Stačí tedy dokázat, že $\check{S}_A$ je jeho střed.



Platí $|\sphericalangle \check{S}_ACI| = |\sphericalangle \check{S}_ACB| + |\sphericalangle BCI| = |\sphericalangle \check{S}_AAB| + |\sphericalangle BCI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Vzpomeňme si ovšem na vztah $|\sphericalangle AIC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$, z něhož plyne $|\sphericalangle \check{S}_AIC| = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Z toho dostáváme, že $I\check{S}_AC$ je rovnoramenný trojúhelník, takže $|I\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$. Protože navíc $|B\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$, je $\check{S}_A$ opsištěm $\triangle BIC$, a tím jsme hotovi. □

Důsledek. *Protože kružnice opsaná $BICI_A$ je kružnicí nad průměrem I_AI, je $\check{S}_A$ střed úsečky II_A.*

S touto jednoduchou znalostí najednou bez potíží vyřešíme pár dalších IMO problémů.

Příklad 9. Buď ABC trojúhelník s vepsištěm I. Bod P uvnitř tohoto trojúhelníku splňuje vztah

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Ukažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $P = I$.

(IMO 2006)

Řešení. Zaprvé si všimněme, že pro $P = I$ tvrzení zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $P \neq I$, a dokažme, že $|AP| > |AI|$. Zadruhé se zbavme oné zvláštní podmínky a uvědomme si, co vlastně říká. Protože platí

$$\begin{aligned} (|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA|) + (|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|) &= \\ = (|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PBC|) + (|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle PCB|) &= \\ = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha&, \end{aligned}$$

získáváme ze zadané podmínky, že $|\sphericalangle BPC| = 180^\circ - |\sphericalangle PBC| - |\sphericalangle PCB| = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle BIC|$. Z toho plyne, že P leží na kružnici opsané $\triangle BIC$, jejíž střed je $\check{S}_A$. Protože I leží na $A\check{S}_A$, platí z trojúhelníkové nerovnosti

$$|AP| + |P\check{S}_A| > |A\check{S}_A| = |AI| + |I\check{S}_A|.$$

Protože ovšem $|P\check{S}_A| = |I\check{S}_A|$, jsme hotovi.

Cvičení 10. Buď BC průměr kružnice ω se středem v O. Nechť A je bod na ω takový, že $|\sphericalangle AOB| < 120°$. Buď D střed toho oblouku AB, který neobsahuje C. Dále přímka vedená skrze O rovnoběžná s DA protíná AC v I a osa úsečky OA protíná ω v bodech E a F. Dokažte, že I je vepsiště $\triangle CEF$. (IMO 2002)

Návod. Nejprv si uvědomte, že A je Švrčkův bod v $\triangle ECF$. Potom už stačí je ukázat, že $|AE| = |AI|$. Ukažte, že jsou obě tyto délky rovny poloměru ω.

Cvičení 11. (Japanese theorem) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že vepsiště trojúhelníků ABC, BCD, CDA a DAB tvoří obdélník.

Návod. Interpretujte jednotlivá vepsiště jako průsečíky dvojic kružnic ze sousedních Švrčkových bodů. Potom doúhlete.

Antišvrk

Podobně jako vepsiště a připsiště má i Švrčkův bod své „alter ego“, které vznikne tím, že místo vnitřní osy úhlu vezmeme tu vnější.

Tvrzení 12. *V trojúhelníku ABC mají osa strany BC, vnější osa úhlu BAC a kružnice opsaná společný bod (který budeme značit jako $\check{N}_A$). Tento bod neoficiálně (ještě neoficiálněji než „Švrčkův bod“) nazýváme antišvrk příslušející bodu A.*

Toto tvrzení nebudeme dokazovat a přenecháváme ho jako cvičení. Důkaz je analogický důkazu existence Švrčkova bodu.

Povšimněme si, že $\check{N}_A\check{S}_A$ je průměr kružnice opsané $\triangle ABC$. To plyne jednoduše z toho, že jejich spojnice je osa strany BC, která ovšem prochází opsištěm. Takovým bodům se v geometrii říká „antipodální“ a odtud taktéž prochází název antišvrk. Poznamenejme také, že jak $\check{S}_A$, tak $\check{N}_A$ jsou středy jednoho z oblouků BC – Švrčkův bod je střed toho oblouku, který neobsahuje A, zatímco antišvrk toho, který A obsahuje.

Podobně jako u Švrčkova bodu platí pro antišvrk následující tvrzení, jehož důkaz opět přenecháváme jako cvičení.

Tvrzení 13. *Pro zadaný trojúhelník ABC je I_CBCI_B tětivový čtyřúhelník se středem v $\check{N}_A$.*

Důsledek. *Bod $\check{N}_A$ je středem úsečky I_BI_C.*

Cvičení 14. (těžké) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že připsiště $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ a $\triangle DAB$ (všech 12 bodů) leží na obvodu jednoho obdélníka. (Rumunské TST 1996)

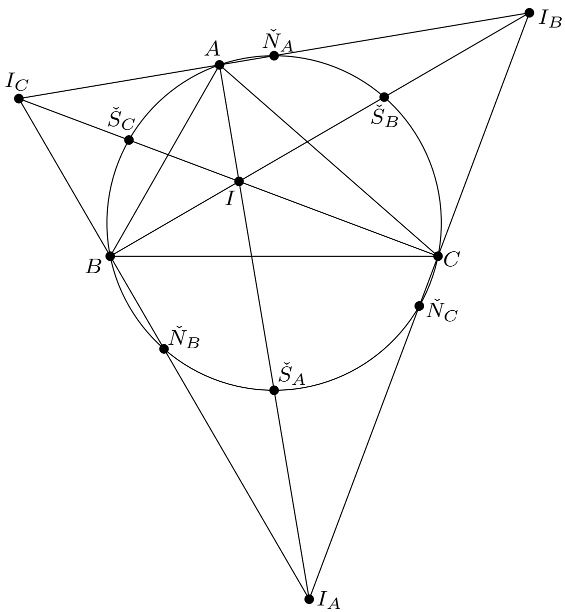
Návod. Interpretujte připsiště jako průsečíky správných kružnic. Vyúhlete, že čtveřice připsišť tvoří vrcholy obdélníka a správné čtveřice připsišť leží na přímce.

The Big Picture

Pomocí různých os rozličných úhlů jsme si v trojúhelníku nadefinovali spoustu bodů. Zajímavé je, že konfiguraci, kterou tvoří, již známe.

Tvrzení 15. (The Big Picture) *V trojúhelníku ABC s naším značením platí, že I je kolmiště trojúhelníku $I_AI_BI_C$ a kružnice opsaná ABC je Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $I_AI_BI_C$.*

Důkaz. Protože vnitřní a vnější osy úhlů ve vrcholu jsou na sebe kolmé, jsou A, B a C paty kolmic v $I_AI_BI_C$. Z toho plyne, že kružnice opsaná $\triangle ABC$ je Feuerbachovou kružnicí $\triangle I_AI_BI_C$. Pokud si nyní ještě k tomu uvědomíme, že tyto kolmice z připsišť do vrcholů jsou vlastně osy úhlů, je zjevné, že I na nich na všech leží, takže se skutečně jedná o kolmiště $\triangle I_AI_BI_C$.

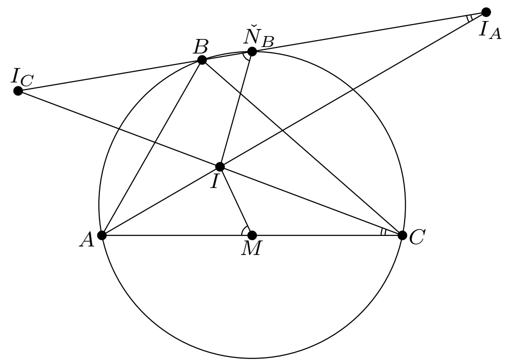


□

Povšimněme si, že skutečnost, že Švrčkovy body a antišvrky jsou středy příslušných úseček, je vlastně jen triviálním důsledkem tvrzení o kružnici devíti bodů.

Příklad 16. V trojúhelníku ABC platí $|AB| < |BC|$. Označme jako M střed AC. Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle I\check{N}_BB|$. (Rusko 2005)

Řešení. Dokresleme si I_A a I_C. Protože I_CACI_A je tětivový čtyřúhelník, platí $|\sphericalangle I_CI_AI| = |\sphericalangle ICB|$, takže trojúhelníky I_CII_A a AIC jsou podobné. Protože $I\check{N}_B$ je těžnice v trojúhelníku I_CIA a IM je těžnice v trojúhelníku AIC, jsou jim příslušné úhly se stranou shodné, takže $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle I\check{N}_BB|$, což jsme chtěli.



Cvičení 17. (těžší) V trojúhelníku ABC s vepsištěm I označme D, E po řadě průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B se stranami BC, AC. Dále označme P, Q body, ve kterých přímka DE protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku PIQ je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. (MKS 30–8–3b)

Návod. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku PIQ je kružnice opsaná trojúhelníku I_AII_B. Potom už tvrzení bude plynout přímo z toho, že díky Big Picture je kružnice opsaná $\triangle ABC$ Feuerbachovou kružnicí $\triangle I_AI_BI_C$ a kružnice opsaná $\triangle I_AII_B$ je kružnicí opsanou $\triangle I_AI_BI_C$ překlopenou přes I_AI_B.

To, že kružnice opsaná $\triangle PIQ$ splývá s kružnicí opsanou I_AII_B, dostaneme z toho, že vyjádříme mocnost D i E ke kružnicím opsaným $\triangle ABC$ a $\triangle I_AII_B$ a zjistíme, že DE je jejich chordála.

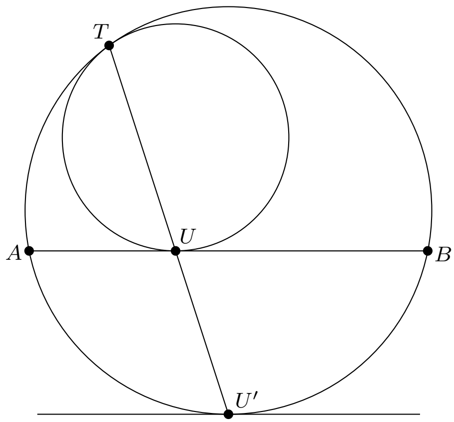
Lemma o ose úhlu

Výhodný způsob, jak o Švrčkově bodě uvažovat, je „ten bod dole“. Pokud si totiž nakreslíme $\triangle ABC$ tak, aby přímka BC byla vodorovná, potom $\check{S}_A$ je nejnižší bod na kružnici opsané (ze symetrie). Tento náhled se nám bude hodit při důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 18. *Mají-li kružnice k a ℓ mají vnitřní dotyk v bodě T a tětiva AB kružnice k se dotýká kružnice ℓ v bodě U, potom UT je osa úhlu ATB.*

Řešení. Nakreslíme si obrázek tak, aby bod U byl na kružnici ℓ „dole“, tedy body A, B budou „na stejné úrovni“. Zobrazíme kružnici ℓ na kružnici k stejnolehlostí se středem v T. Tato stejnolehlost má kladný koeficient, a proto i bod U' (obraz bodu

U) je na kružnici k „dole“, tedy trojúhelník ABU' je rovnoramenný. Potom je ale U' Švrčkův bod v trojúhelníku ATB, z čehož okamžitě plyne požadované tvrzení.



Toto také říká, že pokud se ω zevnitř dotýká kružnice opsané $\triangle ABC$ v B a navíc se dotýká AC v D, potom B, D a $\check{S}_B$ leží na přímce. (Rozmyslete si.)

Příklad 19. Dvě kružnice ω_1 a ω_2 se zvenku dotýkají v bodě T a obě se zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech R a S. Nechť Q je druhý průsečík RT s ω. Ukažte, že $|\sphericalangle QST| = 90°$. (KMS)

Řešení. Sestrojme společnou tečnu ω_1 a ω_2 v bodě T. Nechť tato tečna protíná ω v bodech X a Y. Potom dle předchozího tvrzení je Q Švrčkův bod trojúhelníku XRY. Pokud analogicky vytvoříme bod W jako průsečík ST s ω, pak W je Švrčkův bod v trojúhelníku XSY. To znamená, že Q i W jsou středy oblouků XY (každý jiného), takže QW je průměr ω. Proto $|\sphericalangle QST| = |\sphericalangle QSW| = 90°$, což jsme chtěli.

Shooting lemma

Poslední zajímavé tvrzení, které si o Švrčkově bodě ukážeme, je takzvané Shooting lemma.

Tvrzení 20. *Buď M střed oblouku PQ na kružnici ω a nechť přímka p procházející M protíná přímku PQ v X a ω v Y. Potom platí*

(1) $|MX| \cdot |MY| = |MP|^2$,
(2) *pokud je I vepsiště $\triangle PYQ$, potom $|MX| \cdot |MY| = |MI|^2$,*
(3) *pokud další přímka p' procházející M protíná PQ v X' a ω v Y', potom X, Y, X' a Y' leží na jedné kružnici.*

Důkaz. Začněme s (1). Protože M je střed oblouku, je M Švrčkovým bodem trojúhelníka PYQ. Potom platí $|\sphericalangle PYM| = |\sphericalangle MYQ| = |\sphericalangle MPQ| = |\sphericalangle MPX|$, z čehož zjišťujeme, že trojúhelníky PYM a XPM jsou podobné. Proto $\frac{|MX|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|MY|}$, z čehož plyne požadované tvrzení.

Část (2) okamžitě vyplývá z toho, že $|MI| = |MP|$ (opět, protože M je Švrčkův bod $\triangle PYQ$).

Část (3) snadno odvodíme z (1) za využití mocnosti bodu ke kružnici.

$\square$

Příklad 21. Kružnice ω_1 a ω_2 se obě zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech A a B. Společná tečna ω_1 a ω_2 se jich dotýká postupně v bodech C a D. Ukažte, že $ABDC$ je tětivový čtyřúhelník.

Řešení. Přímka CD protíná ω v bodech X a Y. Nechť M je střed toho oblouku XY, který neobsahuje A a B. Potom AC i BD procházejí M. Ovšem potom máme hotovo z části (3) Shooting lemmatu.

Cvičení 22. Přímka ℓ protíná kružnici Γ v bodech A, B. Kružnice ω_1 a ω_2 jsou vepsané[3] do stejné úseče určené přímkou ℓ a mají vnější dotyk. Dokažte, že jejich vnitřní společná tečna prochází pevným bodem, pohybují-li se ω_1, ω_2 ve vymezené úseči.

Návod. Tím bodem bude střed druhého oblouku. Použijte mocnost.

Cvičení 23. Nechť kružnice Ω a ω mají vnitřní dotyk v bodě P, přičemž ω leží uvnitř Ω. Buď AB tětiva Ω, která se dotýká ω v bodě C. Průsečík PC s Ω různý od P si označme jako Q. Nechť tečny z bodu Q ke kružnici ω protínají kružnici Ω v bodech R a S. Vepsiště trojúhelníků APB, ARB a ASB si postupně označíme jako I, X a Y. Ukažte, že $|\sphericalangle PXI| + |\sphericalangle PYI| = 90°$. (Rumunsko TST 2013)

Návod. Uvědomte si, že Q je Švrčkův bod a následně použijte Shooting lemma, abyste ukázali, že X a Y jsou dotyky QR a QS s ω. Zbytek doúhlete.

Cvičení 24. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Γ, vepsištěm I a bodem D ležícím na straně BC. Buď ω kružnice dotýkající se úsečky AD v bodě F, strany BC bodě E a kružnice Γ v bodě K. Dokažte, že I leží na přímce EF.

(MKS 29–8–4b)

Návod. Označme si I' průnik EF a $A\check{S}_A$. Díky Shooting lemmatu stačí dokázat, že $\check{S}_AI'$ je tečna ke kružnici opsané $EI'K$. Využijeme-li úsekové úhly, stačí ukázat, že A, F, I' a K leží na jedné kružnici. To zjistíme jednoduchým porovnáním úhlů $I'FK$ a $I'AK$.

Cvičení 25. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Γ, vepsištěm I a bodem D ležícím na straně BC. Nechť ω_1 a ω_2 jsou kružnice se středy O_1 a O_2, které se obě dotýkají úsečky AD, přímky BC a kružnice Γ. Ukažte, že O_1, O_2 a I leží na jedné přímce. (Sawayama–Thébault theorem)

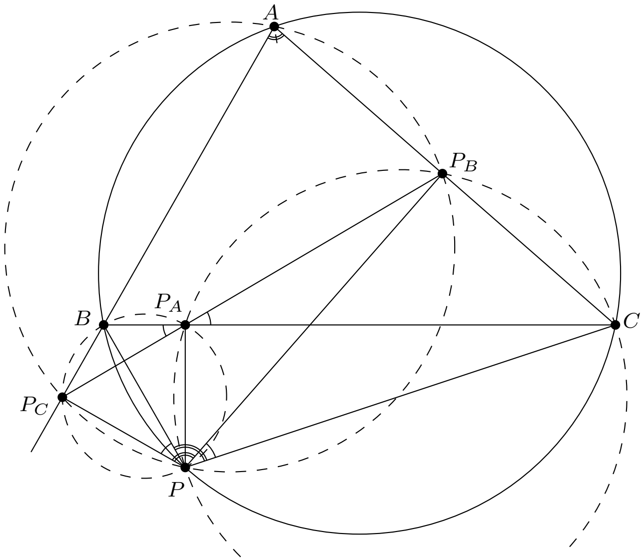
Návod. Využijte předchozí cvičení pro „správnou“ definici bodu I. Najděte v obrázku hodně pravých úhlů a využijte podobnosti trojúhelníků.

[3] To znamená, že mají vnitřní dotek s Γ a navíc ℓ je jejich tečna.

Simsonova přímka

Tvrzení 26. *Označme P_A, P_B, P_C paty kolmic vedených z bodu P na příslušné strany trojúhelníka ABC. Pak body P_A, P_B, P_C leží v přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Této přímce se říká Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.*

Důkaz. Kdybychom chtěli být zcela exaktní, museli bychom buď rozebrat několik možností umístění bodu P vůči trojúhelníku ABC a také to, jak vypadá $\triangle ABC$, nebo použít orientované úhly. Budeme ale pro jednoduchost předpokládat, že situace vypadá tak, jako na obrázku. Ostatní situace se rozeberou podobně a zvídavý čtenář si je může vyzkoušet jako domácí cvičení.[4]



Díky pravým úhlům jsou PP_CBP_A, PP_AP_BC a PP_CAP_B tětivové. Potom platí

$$|\sphericalangle BP_AP_C| = |\sphericalangle BPP_C| = |\sphericalangle P_BPP_C| - |\sphericalangle P_BPB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle P_BPB|.$$

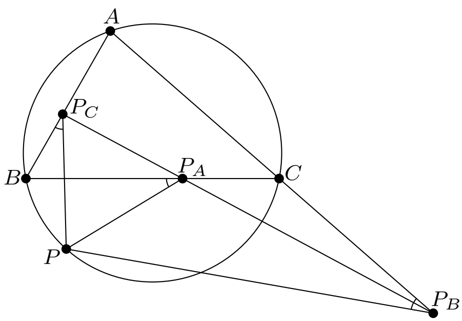
Protože B, P_A a C leží na přímce, leží P_A, P_B, P_C na přímce právě tehdy, když $|\sphericalangle BP_AP_C| = |\sphericalangle CP_AP_B|$. Protože $|\sphericalangle CP_AP_B| = |\sphericalangle CPP_B| = |\sphericalangle CPB| - |\sphericalangle P_BPB|$, je uvažovaná kolineárnost[5] ekvivalentní se vztahem $180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle P_BPB| =$

[4] Jen poznamenejme, že zatímco my jako pisatelé výukového textu máme právo přenechat nějaký kus práce čtenáři, řešitelům není povoleno v odevzdaných řešeních přenechat kus práce opravovateli.

[5] Kolineárnost je vlastnost „býti na jedné přímce“.

$|\sphericalangle CPB| - |\sphericalangle P_BPB|$, což se dá přepsat jako $|\sphericalangle CPB| + |\sphericalangle BAC| = 180°$. Takže shledáváme, že P_A, P_B a P_C leží na přímce právě tehdy, když $PBAC$ je tětivový čtyřúhelník, což je to, co jsme chtěli. $\square$

Poznámka. Povšimněme si, že fakt, že P_A, P_B a P_C jsou paty kolmic, jsme takřka nevyužili. Důležitá byla pouze tětivovost příslušných čtyřúhelníků. Proto existuje takzvaná „zobecněná Simsonova přímka“, pro jejíž konstrukci je potřeba jen, aby přímky PP_A, PP_B a PP_C svíraly s příslušnými stranami stejné úhly. Je to ovšem trošku složitější tím, že se požaduje, aby tyto úhly byly stejně orientovány, tj. „šly všechny na stejnou stranu“. Toto tvrzení si můžete dokázat jako cvičení.



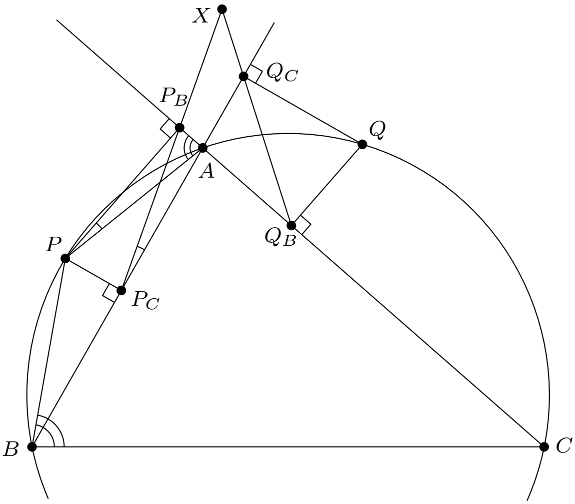
Cvičení 27. Buď ABC rovnostranný trojúhelník a P buď bod na jeho kružnici opsané různý od A, B a C. Přímky rovnoběžné s BC, CA, AB vedené skrz P protínají přímky CA, AB, BC postupně v bodech M, N a Q. Dokažte, že M, N a Q leží na jedné přímce.

Návod. Všechny přímky protínají strany pod úhlem $60°$.

Tvrzení 28. *Simsonova přímka bodu P půlí úsečku PH.*

Důkaz. BÚNO nechť P leží na tom oblouku BC, který neobsahuje A. Označme obrazy P podle přímek AB a AC jako P'_C a P'_B. Zjevně stačí ukázat, že P'_C, H a P'_B leží na jedné přímce.

Označme obrazy H dle AC a AB jako H_B a H_C. Protože překlopení je shodné zobrazení, platí $|\sphericalangle AHP'_C| = |\sphericalangle AH_CP|$ a $|\sphericalangle AHP'_B| = |\sphericalangle AH_BP|$. Potom ovšem $|\sphericalangle AHP'_C| + |\sphericalangle AHP'_B| = |\sphericalangle AH_CP| + |\sphericalangle AH_BP| = 180°$, kde poslední rovnost plyne z toho, že H_B, H_C i P leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Pak ale $|\sphericalangle AHP'_C| + |\sphericalangle AHP'_B| = 180°$ přesně dává to, co jsme chtěli.



□

Tvrzení 29. *Simsonovy přímky odpovídající bodům P, Q na kružnici opsané trojúhelníku ABC svírají úhel rovný polovině středového úhlu, který přísluší oblouku PQ.*

Důkaz. Opět platí, že pro formálně správný důkaz bysme museli buď rozebrat velké množství možností, nebo použít orientované úhly. Místo toho radši budeme prostě předpokládat, že situace vypadá tak, jako na obrázku.

Nechť X je průsečík uvažovaných Simsonových přímek. Protože součet úhlů ve čtyřúhelníku XP_CAQ_B je $360°$ a u A je úhel $360° - \alpha$, platí $|\sphericalangle P_CXQ_B| = \alpha - |\sphericalangle P_BP_CA| - |\sphericalangle Q_CQ_BA|$. Z obvodových a doplňkových úhlů plyne

$$|\sphericalangle P_BP_CA| = |\sphericalangle P_BPA| = 90° - |\sphericalangle PAP_B| = 90° - |\sphericalangle PBC| = 90° - \beta - |\sphericalangle PBA|.$$

Analogicky dostaneme i $|\sphericalangle Q_CQ_BA| = 90° - \gamma - |\sphericalangle QCA|$. Proto

$$\begin{aligned} |\sphericalangle P_CXQ_B| &= \alpha - |\sphericalangle P_BP_CA| - |\sphericalangle Q_CQ_BA| \\ &= \alpha + \beta + \gamma - 180° + |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle QCA| \\ &= \frac{|\sphericalangle POA|}{2} + \frac{|\sphericalangle AOQ|}{2} = \frac{|\sphericalangle POQ|}{2}. \end{aligned}$$

Důsledek. *Simsonovy přímky „protějších“ bodů P a Q jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici.*

Důkaz. Kolmost je zjevná z předchozího tvrzení. Pro druhou část si označme jako P' a Q' středy úseček PH a QH a jako X uvažovaný průsečík přímek. Víme, že P' a Q' leží na příslušných Simsonových přímkách. Protože P a Q leží na kružnici opsané a P' a Q' jsou jen obrazy ve stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem H, jsou P' a Q' protilehlé body na kružnici devíti bodů. Potom se ale jedná o kružnici nad průměrem $P'Q'$, takže z $|\sphericalangle P'XQ'| = 90°$ dostáváme, že X na této kružnici vskutku leží. □

Příklad 30. V trojúhelníku ABC označme A_1 patu výšky z vrcholu A. Ukažte, že paty kolmic vedených z A_1 na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

Řešení. Označme si paty výšek z B a C jako B_1 a C_1. Paty kolmic z A_1 na BA, AC, BB_1 a CC_1 si nazvěme jako X, Y, P a Q.

Všimněme si, že C_1 a A_1 leží na kružnici nad průměrem AC. Pokud uděláme Simsonovu přímku vzhledem k $\triangle ACC_1$ a bodu A_1, dostaneme proto, že X, Q a Y leží na jedné přímce. Analogicky zjistíme, že i X, P a Y leží na přímce, z čehož plyne požadované tvrzení.

Cvičení 31. Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost 45°, právě když $ABCD$ je čtverec.
(MO 58–III–2)

Návod. Dokreslete paty kolmic z P na AD a BC. Nalezněte Simsonovy přímky a uvědomte si díky nim, že $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle APB|$.

Cvičení 32. Na přímce jsou dány body A, B, C a mimo ni bod P. Dokažte, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku tvořenému středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABP, BCP a ACP.

Návod. Díky stejnolehlosti leží středy úseček PA, PB, PC v přímce. Interpretujte je jako paty vhodných kolmic. Pak si uvědomte, že Simsonovu přímku lze vytvořit *právě tehdy*, když uvažovaný bod leží na kružnici opsané.

Antirovnoběžky, izogonály a kamarádi

Where there is matter, there is geometry. – Johannes Kepler

Směřujeme k užitečnému konceptu párování bodů v rovině vzhledem k pevnému trojúhelníku. Jak to tak bývá, nejprve bude třeba zavést několik pojmů.

Mějme daný úhel XVY. Řekneme, že přímky p a q jsou vůči němu *antirovnoběžné*, pokud osový obraz přímky p podle osy úhlu XVY je rovnoběžný s přímkou q. Pokud navíc obě přímky procházejí bodem V, říkáme, že p a q jsou izogonální vzhledem k úhlu XVY. Pokud je z kontextu zřejmé, vzhledem ke kterému úhlu antirovnoběžnost nebo izogonalitu myslíme, vynecháváme tuto část názvu.

Věnujme nyní pár slov motivaci názvů těchto objektů.[6] Přímka rovnoběžná s p svírá s ramenem příslušného úhlu stejný úhel jako p, zatímco obraz přímky p podle

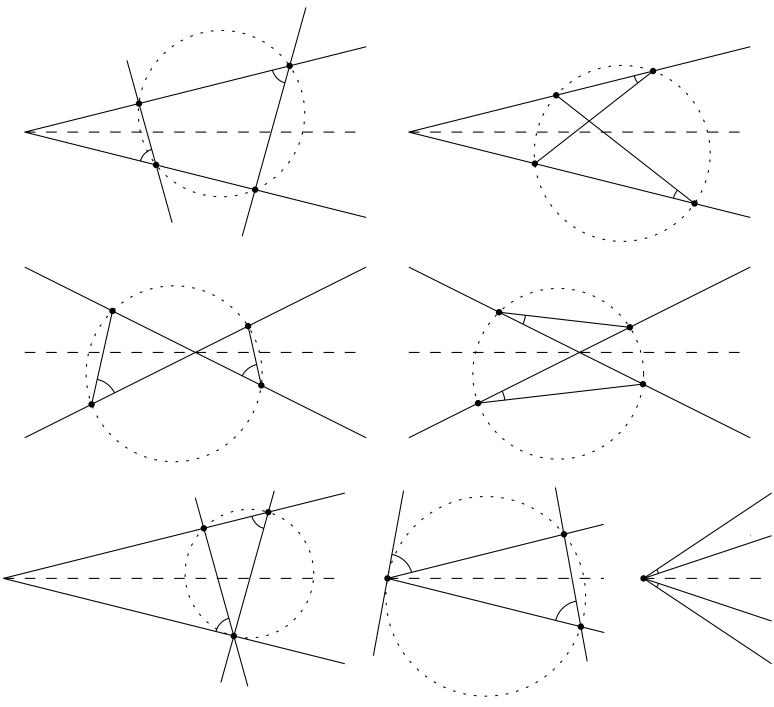
[6] Jejich význam by měl takřka triumfálně vyplynout ze zbytku této kapitoly.

osy onoho úhlu (nebo s obrazem rovnoběžná přímka) svírá tento úhel s jeho druhým ramenem. Proto mluvíme o antirovnoběžkách. Neformálně řečeno, antirovnoběžka se má k jednomu rameni úhlu stejně jako původní přímka ke druhému. Předpona *iso-* pochází z řečtiny a znamená stejný a *gonia* znamená úhel. Těmito stejnými úhly jsou myšleny ty dva výše zmíněné, přičemž nyní mají navíc oba společný vrchol.

Antirovnoběžky poskytují nový pohled na tětivové čtyřúhelníky.

Tvrzení 33. *Je dán čtyřúhelník $ABCD$, P je průsečík přímek AB a CD, Q je průsečík úhlopříček AC a BD a R je průsečík přímek AD a BC. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když jsou nějaké dvě*[7] *přímky obsahující protější strany nebo úhlopříčky v $ABCD$ antirovnoběžné v nějakém z úhlů APD, AQD nebo CRD.*

Důkaz. V každé možné konfiguraci (viz obrázky níže) plyne tvrzení snadno z charakterizace tětivových čtyřúhelníků pomocí obvodových úhlů. Povšimněte si také degenerovaných případů, kde dva z průsečíků splynou a příslušné rameno se stane tečnou. Poslední obrázek ukazuje dvě izogonály.



□

[7]Stačí tedy ověřit antirovnoběžnost jedné konkrétní dvojice přímek v jednom konkrétním úhlu, z ní už vyplyne tětivovost $ABCD$, a tím i antirovnoběžnost každé takové dvojice přímek v každém ze zmíněných úhlů.

Cvičení 34. Rozmyslete si, že (anti)rovnoběžnost má podobné vlastnosti jako parita – antirovnoběžka k rovnoběžce je antirovnoběžka a antirovnoběžka k antirovnoběžce je rovnoběžka.

Cvičení 35. Dokažte, že pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům současně, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.

Návod. Podmínka říká, že když postupně pustíme na p osovou souměrnost podle os obou úhlů, dostaneme rovnoběžnou přímku. Kdy se to může stát?

Cvičení 36. Ať $ABCD$ je tětivový. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů AQB a BPC jsou kolmé.

Návod. Použijte předchozí cvičení.

Cvičení 37. Dokažte Shooting lemma pomocí antirovnoběžek.

Návod. Tečna vedená středem oblouku je antirovnoběžná s jednou tětivou a rovnoběžná s druhou.

Hlavní přínos antirovnoběžek nebo izogonál však leží někde jinde. Pro důkaz příslušného tvrzení budeme ale potřebovat známou větu, se kterou jsme zatím ještě nepracovali.

Tvrzení 38. (Cevova[8] věta) *Je dán trojúhelník ABC, bod D na straně BC, bod E na straně CA a bod F na straně AB. Přímky AD, BE a CF procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí*

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

Důkaz zde uvádět nebudeme.[9]

Cevova věta se hodí, pokud je třeba dát do souvislosti procházení přímek jedním bodem a nějaké poměry délek. My si ji ještě upravíme, abychom místo s délkami mohli pracovat s úhly.

Tvrzení 39. (Goniometrický tvar Cevovy věty) *V situaci z Cevovy věty platí*

$$\frac{\sin(|\sphericalangle ACF|)}{\sin(|\sphericalangle BCF|)} \cdot \frac{\sin(|\sphericalangle BAD|)}{\sin(|\sphericalangle CAD|)} \cdot \frac{\sin(|\sphericalangle CBD|)}{\sin(|\sphericalangle ABE|)} = \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|},$$

takže přímky AD, BE a CF se protínají právě tehdy, když je levá strana výše uvedeného vztahu rovna jedné.

Důkaz. Ze sinové věty pro trojúhelníky ABD a ADC s využitím identity $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ADC| = 180°$ dostáváme:

$$\frac{|BD|}{\sin(|\sphericalangle BAD|)} = \frac{|AB|}{\sin(|\sphericalangle ADB|)} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{\sin(|\sphericalangle ADC|)} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|CD|}{\sin(|\sphericalangle DAC|)}.$$

[8] Giovanni Ceva ([čéva]; 1647–1734) byl italský geometr.

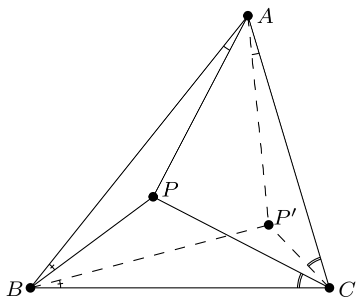
[9] Lze jej najít např. zde *http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Ceva%27s_Theorem*

Tedy $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{\sin(|\sphericalangle BAD|)}{\sin(|\sphericalangle CAD|)}$. Pro poměry $\frac{|CE|}{|EA|}$ a $\frac{|AF|}{|FB|}$ platí analogické vztahy, jejichž vynásobením dostaneme dokazovanou identitu (poměry délek stran trojúhelníka se zkrátí). Zbytek plyne z původní Cevovy věty. □

Dostáváme se ke klíčovému tvrzení.

Tvrzení 40. (O existenci kamarádů) *Je dán trojúhelník ABC a bod P, který neleží na jeho kružnici opsané. Pak izogonály přímek AP, BP a CP procházejí jedním bodem P', který nazýváme kamarádem*[10] *bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.*

Důkaz. (částečný) Předpokládejme, že P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Jelikož se přímky AP, BP a CP protínají v jednom bodě, platí pro příslušné úhly identita z goniometrické Cevovy věty, tedy součin poměrů sinů je roven jedné. Izogonály ke zmíněným přímkám „dělí" příslušné vnitřní úhly trojúhelníka ABC na stejné kusy jako původní přímky AP, BP a CP, ale v opačném pořadí. Zmíněný výraz tedy vyjde jako převrácené číslo než pro původní přímky. To je ale opět jedna, takže zpětným použitím goniometrické verze Cevovy věty dostáváme, že se izogonály také protínají v jednom bodě P'.



□

Pro P mimo trojúhelník bychom postupovali podobně, ale potřebovali bychom Cevovu větu i v této situaci. Neobešli bychom se při tom bez orientovaných vzdáleností a úhlů a sinové věty pro orientované úhly, proto tuto část tvrzení ponecháme bez důkazu. Podíváme se ale, proč pro body na opsané kružnici kamarád neexistuje.

Tvrzení 41. *Pokud P leží na kružnici opsané a není jedním z vrcholů trojúhelníku, pak jsou izogonály v tvrzení o existenci kamarádů rovnoběžné.*[11]

Důkaz. BÚNO nechť P leží uvnitř oblouku BC neobsahujícího bod A. Označme P_A, P_B a P_C obrazy bodu P podle os vnitřních úhlů s příslušnými vrcholy. Pak AP_A je

[10] V angličtině se používá termín *isogonal conjugate.*

[11] A mohli bychom tedy jeho kamaráda definovat jako „bod v nekonečnu v příslušném směru", provést to korektně by však dalo práci.

izogonála k AP a svírá s přímkou BC úhel $|\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle BAP_A| = |\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle PAC|$. Podobně přímka CP_C svírá s přímkou BC úhel $|\sphericalangle P_CCA| + |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle PCB| + |\sphericalangle ACB|$. Jelikož P leží na opsané kružnici, platí $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PAB|$ a můžeme oba výše vyjádřené úhly sečíst:

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle PCB| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ,$$

protože $|\sphericalangle PCB|+|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle BAC|$. Z toho už vidíme, že $AP_A \parallel CP_C$. Analogicky bychom dokázali, že i třetí izogonála je s prvními dvěma rovnoběžná. $\square$

Cvičení 42. Rozmyslete si, že kamarád kamaráda je opět původní bod.

Staří známí kamarádi

Tak fajn, ke skoro každému bodu v rovině trojúhelníka umíme najít jeho kamaráda. A k čemu je to dobré? Nejsou třeba nějací dva kamarádi mezi významnými body trojúhelníka, které už známe? Následující cvičení a tvrzení na tuto otázku částečně odpoví. Ve všech máme daný trojúhelník ABC a hovoříme-li o nějakých významných bodech, jsou to ty jeho.

Cvičení 43. Najděte všechny body, které jsou svými vlastními kamarády.

Návod. Jsou čtyři.

Tvrzení 44. *V daném trojúhelníku jsou body O a H kamarádi.*

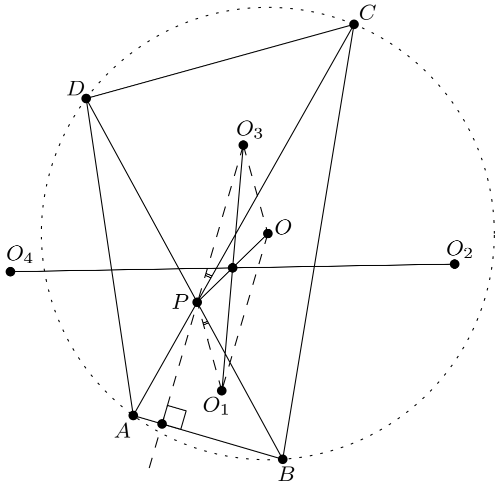
Důkaz. Platí $|\sphericalangle BAO| = 90^\circ - \gamma = |\sphericalangle HAC|$, takže AH je izogonála k AO. Analogicky odvodíme rovnosti i pro zbylé vrcholy. $\square$

Toto tvrzení není samo o sobě moc objevné. Už jsme jej vlastně znali, ale pouze jako rovnost nějakých náhodných úhlů. Pamatovat si ho v naší nové formulaci je ale výrazně efektivnější.

Příklad 45. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P. Dále nazvěme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsiště trojúhelníků APB, BPC, CPD a DPA jako O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že přímky PO, O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Řešení. Použijeme předchozí tvrzení na trojúhelníky ABP a CDP. Jelikož je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, jsou tyto trojúhelníky podobné a sdílejí osu úhlu u vrcholu P. Navíc platí, že když jeden z těchto trojúhelníků zobrazíme podle oné osy, bude obrazem druhého v nějaké stejnolehlosti se záporným koeficientem (odpovídá prostřednímu obrázku vlevo za tvrzením o antirovnoběžkách a tětivovosti). Obrazem PO_1 podle této osy je tedy jednak přímka PH_{ABP} a zároveň přímka PO_3. Toto vyplývá z předchozího popisu toho, jak jsou příslušné trojúhelníky podobné, a toho, že zmíněná stejnolehlost zobrazuje přímky procházející jejím středem P samy na sebe. Z toho plyne, že PO_3 je kolmá na AB a analogicky PO_1 je kolmá na CD, tedy PO_1OO_3 je rovnoběžník (OO_1 je osa strany AB, tedy je na ni kolmá, podobně pro

OO_3). Analogicky bychom dokázali, že PO_2OO_4 je rovnoběžník, a jelikož se úhlopříčky v rovnoběžníku půlí, prochází všechny tři přímky ze zadání středem úsečky PO.



Cvičení 46. (těžší) Ukažte, že rovnost $|IH| = |IO|$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven $60°$.

Návod. Buď jsou trojúhelníky AIH a AIO podobné, nebo je $AOIH$ tětivový čtyřúhelník, to samé platí i pro vrcholy B a C. Druhá možnost nemůže nastat ve všech případech a z první plyne, že $AO\check{S}_AC$ je kosočtverec.

Cvičení 47. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Buďte D a E body na stranách AB a AC takové, že B, C, E a D leží na kružnici. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná D, E a A protne stranu BC ve dvou bodech X a Y. Ukažte, že střed XY je zároveň patou výšky z A na BC. (Baltic Way 2010)

Návod. Stačí dokázat, že výška z A obsahuje opsiště trojúhelníku ADE. Díky antirovnoběžnosti je to totéž, jako že kolmice z A na DE prochází opsištěm trojúhelníku ABC.

Cvičení 48. (těžší) V trojúhelníku ABC osa úsečky AH protíná strany AB a AC po řadě v bodech D a E. Ukažte, že $|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle AOE|$.

Návod. Díky kamarádství O a H a tomu, že DE je osa AH, jsou rovnoramenné trojúhelníky ADH a AOC podobné. Z toho vyvoďte, že $|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle ACH| = 90° - \alpha$, a analogicky postupujte pro bod E. (Crux)

Cvičení 49. V rovině se kružnice k_1 a k_2 o středech po řadě I_1 a I_2 protínají v bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

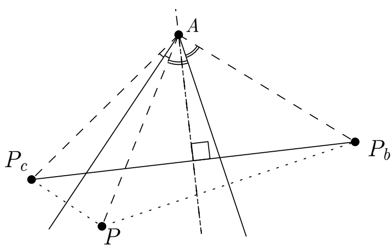
Návod. Vyúhlete, že E je opsiště trojúhelníku ACD.

Obecné vlastnosti kamarádů

Začneme alternativním způsobem konstrukce kamaráda.

Tvrzení 50. (Alternativní definice kamaráda) *Kamarád bodu P je opsiště trojúhelníku s vrcholy v osových obrazech P přes strany.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že P leží uvnitř trojúhelníka. Jinak je důkaz obdobný, pouze výpočty úhlů vypadají trochu jinak. Označme P' zmíněné opsiště a dále P_c a P_b osové obrazy bodu P po řadě přes strany AB a AC. Vrchol A zřejmě leží na ose úsečky P_cP_b, stejně jako bod P'. Díky definici bodů P_b a P_c pomocí osové souměrnosti platí $|\sphericalangle P_bAP_c| = 2\alpha$, a tedy $|\sphericalangle P'AP_b| = \alpha$. Nyní už snadno dopočítáme $|\sphericalangle P'AC| = |\sphericalangle P!AP_B| - |\sphericalangle CAP_b| = \alpha - |\sphericalangle PAC| = \alpha - (\alpha - |\sphericalangle PAB|) = |\sphericalangle PAB|$, takže AP je izogonální s AP'. Analogicky bychom dokázali i ostatní izogonality, a tedy P' je opravdu kamarád bodu P.



□

Poznámka 51. Naše nová definice kamaráda by měla selhávat na stejné množině bodů jako definice původní. Že tomu tak skutečně je, říká tvrzení o Simsonově přímce – trojice bodů na přímce nemá žádné opsiště.

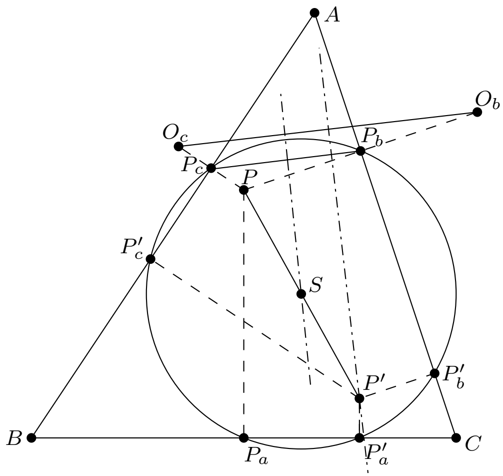
Poznámka 52. V prvním vzorovém řešení druhé úlohy první seriálové série jsme dokazovali, že H je opsištěm v trojúhelníku $O_aO_bO_c$. Nyní už je nám to jasné z předchozího tvrzení a toho, že O a H jsou kamarádi.

Cvičení 53. Kružnice k vytne na každé straně trojúhelníka ABC úsečku. Ukažte, že potenční střed kružnic sestrojených nad těmito úsečkami je kamarád středu kružnice k. (zobecněné IMO 2008)

Návod. Díky předchozímu tvrzení stačí dokázat, že opsiště trojúhelníka s vrcholy v osových obrazech středu k přes strany má stejnou mocnost k libovolným dvěma z kružnic nad průměry. Napište mocnosti ve tvaru „vzdálenost od středu na druhou minus poloměr na druhou“.

Tvrzení 54. (Six feet theorem) *Paty kolmic bodu P a jeho kamaráda P' na strany trojúhelníka ABC leží na jedné kružnici.*

Důkaz. Označme paty kolmic ze zadání P_a, P_b, P_c a P'_a, P'_b, P'_c. Střed S úsečky PP' zřejmě leží na osách úseček $P_aP'_a$, $P_bP'_b$, $P_cP'_c$. Jinými slovy, S je stejně vzdálený vždy od dvou pat na jedné straně. Stačí tedy dokázat, že leží také na ose úsečky P_bP_c (a pak analogicky na dalších osách). Nyní použijeme tvrzení o alternativní konstrukci kamaráda. Bod P' jakožto kamarád bodu P je opsiště osových obrazů P přes strany. Označme je O_a, O_b a O_c. Bod P' tedy speciálně leží na ose úsečky O_bO_c. Stejnolehlost se středem v P a koeficientem $\frac{1}{2}$ pak ukazuje, že S leží na ose P_bP_c, a jsme hotovi. □



Cvičení 55. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Nechť A', B' , C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A''. Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$.

Návod. Dokreslete kamaráda P a použijte předchozí tvrzení. Doúhlete.

Symediány

Jediným základním středem trojúhelníka, o jehož kamarádovi dosud nic nevíme, je těžiště. Faktem, který už tak zřejmý není, je, že tento bod ani jednodušeji než jako kamarád těžiště popsat nejde. Na druhou stranu má vlastnosti, díky nimž stojí za to se jím zaobírat.

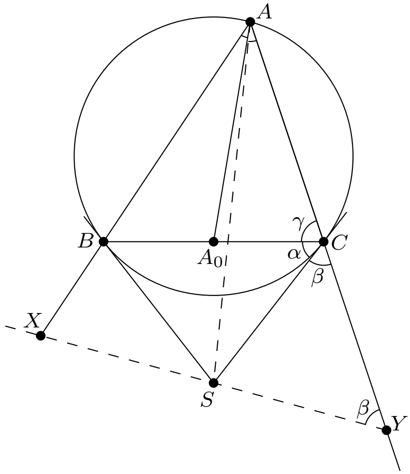
Izogonálu k a-těžnici (tedy přímce AA_0) budeme nazývat *a-symediánou*. Kamarád těžiště, který je zřejmě průsečíkem symedián, nazýváme *Lemoinův*[12] *bod* a značíme jej K.

[12]Émile Lemoine ([lemuán]; 1840–1912) byl francouzský inženýr a matematik.

Nyní se podíváme na vlastnosti symedián, na Lemoinův bod si posvítíme příště.

Tvrzení 56. (O průsečíku tečen) *Je dán trojúhelník ABC. Průsečík tečen ke kružnici jemu opsané vedených body B a C označme S. Pak AS je a-symediána.*

Důkaz. Bodem S veďme antirovnoběžku k BC vzhledem k úhlu BAC a její průsečíky s přímkami AB a AC označme X a Y. Díky antirovnoběžnosti platí $|\sphericalangle XYA| = \beta$ a díky vlastnostem CS (úsekový úhel) platí $|\sphericalangle SCY| = \beta$. Trojúhelník CSY je tedy rovnoramenný se základnou CY. Analogicky je trojúhelník BXS je rovnoramenný se základnou BX. Díky definici bodu S (stejně dlouhé úseky tečen) je tedy S středem úsečky XY. Nyní už by nám mělo být jasné, že AS je a-symediána, protože je „těžnicí vůči antirovnoběžce“. Přesněji řečeno, osová souměrnost podle osy úhlu BAC zobrazí XY na rovnoběžku s BC a přímku AS na spojnici bodu A a jejího středu, čili a-těžnici. Tedy AS je izogonála k a-těžnici, neboli a-symediána.



□

Cvičení 57. V ostroúhlém trojúhelníku leží symediána vždy mezi osou úhlu a výškou.

Návod. Použijte poslední tvrzení a dokreslete bod $\check{S}$.

Cvičení 58. Symediána z vrcholu A je množina vnitřních bodů X úhlu BAC, jejichž poměr vzdáleností od strany b a c je roven b/c.

Návod. Pro každý bod těžnice je tento poměr přesně opačný.

Cvičení 59. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AC| = 2|AB|$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k. (Výběrko 2013)

Návod. Poznejte symediánu, dokreslete příslušný střed strany a dokažte, že ona symediána protíná k ve středu oblouku BC.

Cvičení 60. Symediána je množina středů antirovnoběžek s protější stranou.

Návod. Je to jen „izogonální" verze faktu, že těžnice je množina středů rovnoběžek s protější stranou a také důsledek posledního tvrzení.

Závěr

The only angle from which to approach a problem is the TRY-Angle. – neznámý autor

Gratulujeme všem, kteří dočetli seriál až sem. V příštím díle se můžete těšit na drsnější pokračování povídání o kamarádech, konkrétně půjde o vlastnosti Lemoinova bodu a o nějaké další dvojice kamarádů. Dále s námi pak, alespoň doufáme, stanete v úžasu nad Ponceletovým porismatem a větami od pánů jako Feuerbach nebo Fontené.

Přejeme dobré nápady při řešení úloh druhé seriálové série, jejíž úlohy jsou řazeny ne podle obtížnosti, ale podle témat v pořadí kopírujícím druhý díl seriálu.[13] S jakýmikoliv dotazy k zadáním úloh, ke cvičením (jsme si vědomi toho, že návody k nim jsou někdy hodně stručné) nebo k čemukoliv jinému se na nás neváhejte obrátit.

autoři

[13] Tentokrát to nejen nenápadně naznačíme.