Geometrie trojúhelníka I – Základní středy

Life without geometry is pointless. – neznámý autor

Vítáme vás u letošního PraSečího seriálu. Každoročně pro svoje řešitele připravujeme trojdílný text, který se podrobně zabývá nějakým odvětvím matematiky. Ke každému dílu patří série tří úloh hodnocených nejvýše pěti body, které se všechny počítají do celkového bodového zisku (lze tedy získat až 15 bodů za sérii). Letošním tématem je *Geometrie trojúhelníka* a seriál pro vás připravují *David Hruška* a *Rado Švarc.*

Kde jsme to vyhrabali?

Geometrie jako taková je nedílnou součástí matematiky všech vyspělých civilizací. Jakmile lidé zvládli aritmetiku a kupecké počty, začali se zabývat tím, co viděli kolem sebe – tvary, délkami, obsahy, úhly atd. Přitom byli motivováni otázkami typu „Kolik kamene bude potřeba na tuto zeď?“, „Jak daleko je loď na obzoru?“, „Jak vysoká je pyramida?“, „Kdy bude další zatmění Slunce?“ nebo „Jak mám co nejlevněji oplotit co největší pozemek?“[1]. Velkého vývoje a obliby se geometrie dočkala v antickém Řecku, kde se stala prostředkem pro vyjádření množství (a to ve všech možných významech) a byla v podstatě synonymem pro matematiku. Napomohl tomu objev iracionálních čísel, která se v geometrii přirozeně vyskytovala jako délky, ale nedala se „zapsat číslem“. Jistě vám nemusíme představovat jména jako Thalés, Archimédes, Pythagoras nebo Eukleides. Poslední ze jmenovaných položil *Základy*[2] modernímu pojetí matematiky.

S objevem analytické geometrie[3], rozvojem algebry a diferenciálního počtu se klasická syntetická[4] geometrie stala spíše okrajovou oblastí, přesto byla dále rozví-

[1] Ne že by byla pro matematika zrovna uvěřitelná, ale existuje zajímavá legenda o založení Kartága (pozdější) královnou Dido: *https://cs.wikipedia.org/wiki/Kartágo*.

[2] Jedná se o soubor třinácti knih pojednávajících o základech matematiky axiomatickým způsobem a jednu z nejvydávanějších knih všech dob.

[3] Za jejího zakladatele je považován francouzský filozof a matematik René Descartes (1596–1650).

[4] Analytická geometrie „rozkládá“ geometrické objekty na jednoduché algebraické objekty (např. bod je dán svými souřadnicemi), syntetická naproti tomu vychází z několika intuitivních geometrických faktů a „skládá“ z nich složitější tvrzení.

jena velikány jako Leonhard Euler (1707–1783), Gaspard Monge (1746–1818), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Jakob Steiner (1796–1863) nebo Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834). I s jejich objevy se v seriálu potkáme.

Proč ne třeba geometrie lichoběžníka? A co jsou základní středy?

Téma tohoto seriálu je ještě o něco specifičtější než rovinná geometrie (planimetrie). Cílem geometrie trojúhelníka je systematicky studovat významné body (a další objekty) v trojúhelníku. Ukazuje se totiž, že i tak jednoduchý útvar jich má opravdu hodně. Existuje dokonce *The Encyclopedia of Triangle Centers*[5] obsahující přes 10 000 význačných bodů. A čím že jsou zajímavé? Zejména nečekaným množstvím souvislostí, které mezi nimi matematici stále nacházejí. Už při letmém zkoumání trojúhelníka budeme totiž svědky takové spousty pozoruhodných a krásných „náhod“, že nám snad dáte za pravdu, že to za tu námahu stojí. Ale nebojte se, naším cílem kromě samotného budování teorie kolem trojúhelníku bude i použití nabytých znalostí v obecných geometrických úlohách, takže kromě jiného se určitě dočkáte i nějakého víceúhelníku. Ještě dodáme, že *střed trojúhelníka* je skutečně termín a používá se pro takový bod v rovině trojúhelníka, který je definovaný pouze pomocí jeho vrcholů a nezmění se při jejich záměně. Například těžiště trojúhelníka ABC je jistě stejný bod jako těžiště trojúhelníka BCA, na druhou stranu středy stran tuto vlastnost nemají (proto jsou také tři). Takovým bodům se budeme v prvním dílu převážně věnovat.

Značení a názvosloví

Z důvodů přehlednosti a stručnosti a hlavně proto, že nás to prostě baví, jsme se rozhodli používat ne vždy oficiálních názvů definovaných objektů. V seriálových úlohách a obecně v PraSátku je určitě můžete používat také, ale v Matematické olympiádě (české, jakož i mezinárodní) nebo jiných oficiálních soutěžích, které s námi na první pohled nesouvisí, může být jejich použití ošidné a spíš jej nedoporučujeme. Doufáme, že se vám přesto bude naše názvosloví líbit a shledáte jej praktickým. Při zavádění každého takového názvu na to v textu upozorníme a doplníme oficiálnější alternativu. Pokud byste váhali, odkud se berou písmenka pro označení bodů, tak vězte, že často pocházejí z anglických názvů.

Jak seriál číst?

Přestože první díl začíná skutečně od píky, je přece jen poměrně rozsáhlý a obsahuje mnoho úloh (ve formě cvičení s návody). Je-li vám tedy nějaká část důvěrně známá,

[5] *http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html*

neváhejte si jen projet příslušná cvičení a pokračovat dál.[6] Jinak ale doporučujeme číst seriál postupně, neboť se místy odkazujeme zpět (mělo by vždy být přesně patrné kam). Při řešení úloh a cvičení si kreslete co nejhezčí obrázky, opravdu to pomáhá. Můžete také využít výborný program GeoGebra.[7] Pokud byste si s nějakým cvičením nevěděli rady ani po přečtení návodu, obraťte se na nás prostřednictvím e-mailu[8] nebo matematického chatu na PraSečích stránkách.

[6] Přeskakovat celý seriál je ovšem přísně zakázáno, už jen kvůli podobným neodolatelně vtipným vsuvkám, jako je tato.

[7] https://www.geogebra.org/

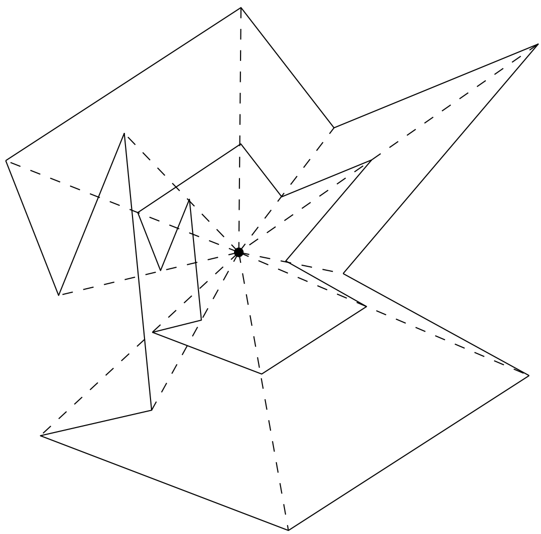
[8] Adresy najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/organizatori.php*

Geometry is the science of correct reasoning on incorrect figures. – George Polya

Něco málo do začátku

Při našem putování trojúhelníkem budeme předpokládat jen znalost základních poznatků z geometrie, které se běžně probírají na střední škole. Jsou tu ovšem dvě témata, která nechceme podrobně vysvětlovat, ale budeme je potřebovat. V první řadě jde o větu o obvodovém a středovém úhlu a související kapitolu o tětivových čtyřúhelnících. Ty budeme v prvním dílu používat jen zřídka a příslušné shrnutí můžete najít třeba v naší knihovničce.[9] Pro další díly už budou ale tětivové čtyřúhelníky poměrně nezbytné, takže doporučujeme se s nimi výhledově blíže seznámit. Druhý koncept – stejnolehlost – budeme používat častěji, takže krátce připomeneme, o co se jedná.

Stejnolehlost je geometrické zobrazení, které má za úkol správným způsobem „nafouknout“ nebo „smrsknout“ rovinu kolem sebe. Je určeno středem stejnolehlosti S a koeficientem stejnolehlosti k. Pokud je $k > 0$, potom se při stejnolehlosti libovolný bod roviny X přesune po polopřímce SX tak, aby byl od S vzdálen $k \cdot |SX|$. Pokud $k < 0$, potom se každý bod X přesune na polopřímku opačnou k SX tak, aby byl od S vzdálen $|k| \cdot |SX|$. Konkrétně např. případ $k = -1$ odpovídá středové souměrnosti se středem v S a případ $k = 1$ nic nezmění.



[9] *https://mks.mff.cuni.cz/library/TetivoveCtyruhelnikyMT/TetivoveCtyruhelnikyMT.pdf*.

Důležitá fakta o stejnolehlosti, která budeme používat, jsou:

(1) Stejnolehlost je tzv. podobné zobrazení, tj. obraz a vzor jsou vždy podobné.

(2) Speciálně kružnice přechází na kružnici, přičemž střed původní kružnice přechází na střed nové kružnice.

(3) Přímky se zobrazují na své rovnoběžky.

(4) Střed stejnolehlosti, bod a obraz bodu ve stejnolehlosti leží na jedné přímce.

(5) Průsečík dvou objektů se zobrazí na průsečík jejich obrazů.

Toto je vše, co budeme o stejnolehlosti potřebovat. Ty zvědavější, kteří si chtějí přečíst o stejnolehlosti více, odkazujeme na seriál *Geometrická zobrazení*[10] od *Pepy Tkadlece* a *Mirka Olšáka*. Nyní jsme už opravdu připraveni pustit se do práce. Příjemnou zábavu, radost z objevování a dobré nápady při řešení úloh vám přejí autoři.

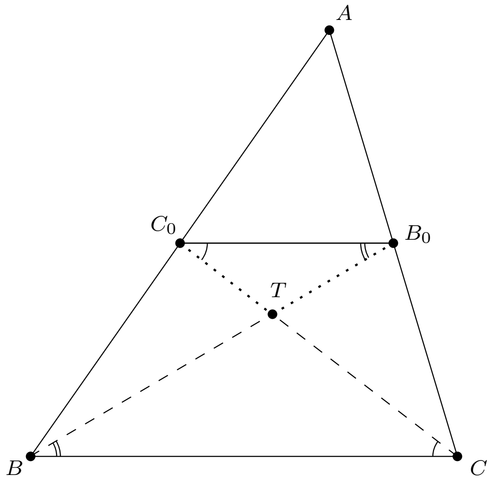
Těžiště

Středy stran BC, AC a AB značíme postupně A_0, B_0 a C_0. Spojnice vrcholu trojúhelníka se středem protější strany se nazývá *těžnice*. Těžnice z vrcholů A, B a C značíme postupně t_a, t_b a t_c.

Tvrzení 1. *Těžnice se protínají v jednom bodě, který dělí každou těžnici v poměru* $1:2$, *přičemž kratší úsek je mezi těžištěm a středem příslušné strany. Nazýváme jej těžiště a značíme* T.

Důkaz. Průsečík těžnic t_b a t_c označme T. Trojúhelníky AC_0B_0 a ABC jsou podobné s koeficientem $1/2$, takže střední příčka B_0C_0 je rovnoběžná se stranou BC a má poloviční velikost. Ze dvou dvojic střídavých úhlů dostáváme podobnost trojúhelníků B_0TC_0 a BTC. Tato má opět koeficient $1/2$, takže platí $|BT| = 2|B_0T|$ a $|CT| = 2|C_0T|$. Dokázali jsme, že dvě těžnice se protínají v bodě, který obě dělí v poměru $1:2$ a leží blíž ke středu příslušné strany. Můžeme tedy těžiště definovat jako bod ležící v tomto poměru na t_b a vidíme, že jím procházejí i zbylé dvě těžnice.

[10] *http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf*



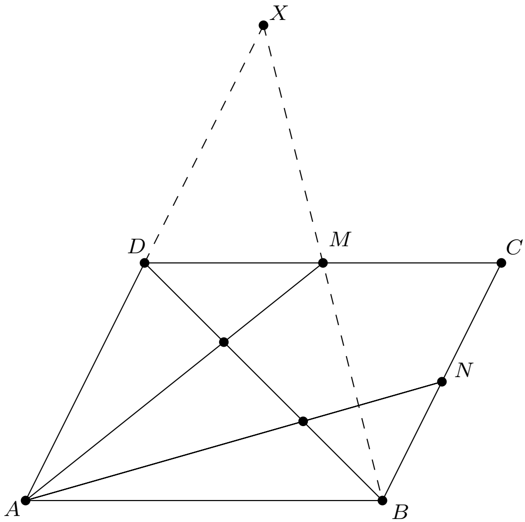
□

Objevíme-li v obrázku těžnici, střední příčku nebo dokonce těžiště, často nás to podstatně přiblíží k řešení úlohy.

Příklad 2. Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD? (MKS 35–2–3)

Řešení. Označme X průsečík přímek AD a BM, kde M je střed CD. V trojúhelníku ABX je DM střední příčkou, neboť je rovnoběžná s AB a má poloviční délku. Proto je M středem BX, D je středem AX a úsečky AM a BD se jakožto těžnice protínají v těžišti, které speciálně dělí BD v poměru $1 : 2$. Analogický výsledek dostaneme i pro spojnici vrcholu A se středem BC, takže BD je zmíněnými přímkami rozdělena na třetiny.[11]

[11] Tato konfigurace je doslova plná těžnic, těžišť, středních příček a dobrých poměrů, viz vzorové řešení na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/35/komplet2p.pdf*.



Cvičení 3. V trojúhelníku ABC platí $|AT| = |BC|$. Dokažte, že $|\sphericalangle BTC| = 90°$.

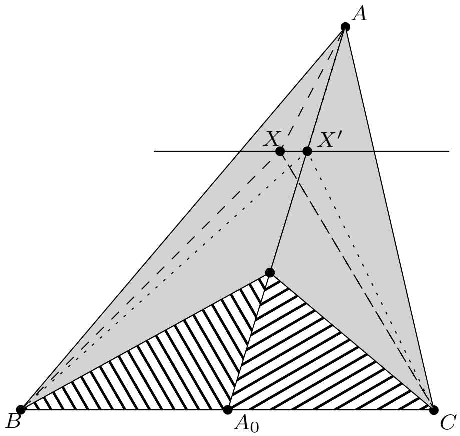
Návod. Využijte poměr, v němž T dělí těžnici, a Thaletovu větu.

Těžnice a těžiště lze charakterizovat pomocí obsahů, což se občas hodí.

Tvrzení 4. (Těžnice a obsahy) *Těžnice t_a v trojúhelníku ABC je množinou těch bodů X, pro které mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah.*

Důkaz. Nechť X leží na t_a. Trojúhelníky BA_0X a A_0CX mají stejně dlouhou základnu i příslušnou výšku, takže mají stejný obsah. To samé platí i pro dvojici trojúhelníků BA_0A a A_0CA (odpovídající případu $A = X$). Odečtením dostaneme $S_{ABX} = S_{ACX}$. Pokud X leží mimo t_a, nechť leží BÚNO[12] vlevo od t_a. Označme X' průsečík t_a a rovnoběžky s BC vedené bodem X. Pro X' rovnost obsahů platí, takže $S_{ABX} < S_{ABX'} = S_{ACX'} < S_{ACX}$. Body mimo t_a tedy tuto vlastnost nemají.

[12]Tato zkratka znamená „bez újmy na obecnosti“. Používá se, když si v důkazu z několika případů stačí vybrat jednu konkrétní a důkaz provést pouze pro ni. BÚNO totiž naznačuje, že v ostatních případech by důkaz vypadal skoro stejně (například bychom pouze prohodili některá písmenka nebo zaměnili slova „levý“ za „pravý“ a „nad“ za „pod“). Náš důkaz představuje typický příklad využití.



□

Cvičení 5. S pomocí předchozího tvrzení si rozmyslete, že těžnice na stranu a je množina bodů v určitém pevném poměru vzdáleností od b a c.

Návod. Použijte vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníka.

Cvičení 6. Rozmyslete si, že těžnice dělí trojúhelník na šest částí o stejném obsahu.

Návod. Opakovaně použijte tvrzení o obsazích.

Cvičení 7. Na stranách BC a CD kosočtverce $ABCD$ jsou zvoleny po řadě body P a Q tak, že $|BP| = |CQ|$. Ukažte, že těžiště trojúhelníku APQ leží na úsečce BD.

Návod. Body P a Q jsou stejně vzdálené od střední příčky v trojúhelníku BCD.

Cvičení 8. Dokažte, že trojúhelník vytvořený z těžnic by měl obsah rovný $\frac{3}{4}S$, kde S je obsah původního trojúhelníku.

Návod. Doplňte trojúhelník na rovnoběžník $ABXC$ a dokreslete středové obrazy A, B a X podle C. Vzniklý šestiúhelník je přirozeně rozdělený na šest kopií původního trojúhelníka. Najděte trojúhelník z těžnic.

Cvičení 9. (těžší) Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leq 2$, $t_b \leq 3$ a $t_c \leq 4$.

(MO 61–III–2)

Návod. Využijte cvičení o šesti trojúhelníčcích. Odhadněte obsah jednoho z nich pomocí odhadů délek stran. Najděte trojúhelník, který realizuje maximum.

Není náhoda, že jsme nepotkali skoro žádné související úhly. Smutnou skutečností je, že těžnice ani těžiště obecně žádné dobré úhly nevyrábí.[13] Například úhel u těžnice (tj. třeba úhel BAA_0) nelze jednoduše vyjádřit pomocí vnitřních úhlů. Není to ale vždy úplně beznadějné, viz následující cvičení.

[13] Pokud ale o nějakých víte, určitě nám dejte vědět. :-)

Cvičení 10. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014)

Návod. Dokreslete středy AB a BC. Úhly u těžnice jsou sice tajemné, ale ty odpovídající si v podobných trojúhelnících jsou určitě stejné.

Poznámka. (O fyzikálním těžišti) Pojem těžiště (neboli hmotný střed) známe kromě geometrie také z fyziky, kde označuje bod, v němž musíme těleso podepřít, aby bylo v rovnováze (která ale nemusí být stabilní). Zkuste pověsit homogenní (tedy s rovnoměrně rozloženou hmotou) trojúhelník[14] za vrchol. Kam bude směřovat příslušná těžnice? Tušíte (snad) správně, bude mířit svisle dolů. To znamená, že fyzikální těžiště na ní leží (jinak by spadlo ještě trochu níž), a protože to platí i pro ostatní těžnice, musí fyzikální těžiště splývat s geometrickým. Pokud namítáte, že to nebyl pořádný důkaz, tak máte pravdu, ale na ten nám naše skromné geometrické prostředky nestačí. Pokud umíte aspoň malinko zacházet s vektory, můžete se přesvědčit, že hmotný střed trojice stejně těžkých hmotných bodů se také nachází v těžišti jimi určeného trojúhelníka. Naproti tomu trojúhelník z homogenního drátu má obecně hmotný střed jinde (představte si hodně úzký a vysoký trojúhelník, jeho hmotný střed bude jistě výš než ve třetině výšky).

Opsiště

Začneme opět trochou značení. Velikosti úhlů v trojúhelníku ABC značíme standardně $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Přímka kolmá na stranu a procházející jejím středem se nazývá *osa strany*.

Tvrzení 11. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané (to je oficiální název). Značíme jej O a krátce nazýváme* opsiště.

Důkaz. Osa strany BC je množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od B jako od C a osa strany AB je množinou bodů stejně vzdálených od A jako od B, takže jejich průsečík (který vždy existuje, neboť strany trojúhelníka nemohou být rovnoběžné) mající obě vlastnosti leží i na ose strany AC a je středem kružnice opsané. □

A kde máme opsiště hledat?

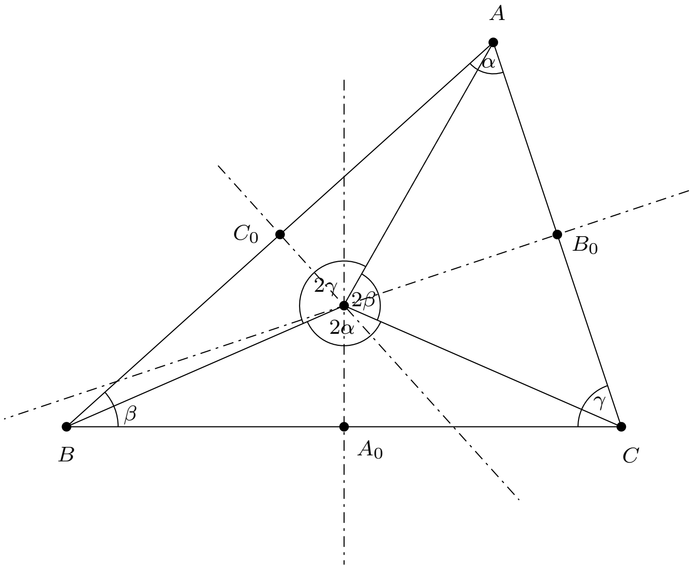
Cvičení 12. Rozmyslete si, že opsiště leží uvnitř trojúhelníka, právě když je ostroúhlý.

[14] Doporučujeme nějaký méně abstraktní a více hmotný, než jaké potkáváme obvykle, zkuste třeba papírový.

Toto jednoduchoučké tvrzení jsme si všichni vyzkoušeli na vlastní kůži[15] při konstrukci kružnice opsané. Opsiště má ale spoustu dalších vlastností – to nejzákladnější si ukážeme hned, na ty zajímavější si budeme muset ještě chvilku počkat.

Tvrzení 13. (O úhlech kolem opsiště) *V ostroúhlém trojúhelníku platí* $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$ *a* $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$.

Důkaz. Plyne z věty o obvodovém a středovém úhlu. □



Věta o obvodovém a středovém úhlu nám dává trochu víc: pomocí α, β a γ umíme snadno vyjádřit každý úhel tvaru $\sphericalangle XPY$, kde P leží na kružnici opsané a X, Y jsou vrcholy trojúhelníka ABC.

Podíváme-li se nyní na trojúhelník BOA_0 s pravým úhlem u vrcholu A_0 a s úhlem $|\sphericalangle BOA_0| = \alpha$, dostáváme snadno následující vztah.[16]

Tvrzení 14. (Sinová věta) *Platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Cvičení 15. V rovině jsou dány body A, B, C, D tak, že platí $|\sphericalangle ACB| = 20°$, $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ABC| = 40°$ a $|\sphericalangle ADC| = 80°$. Určete $|\sphericalangle ABD|$.

Návod. Poznejte opsiště.

[15] A vlastní trojúhelník s ryskou.

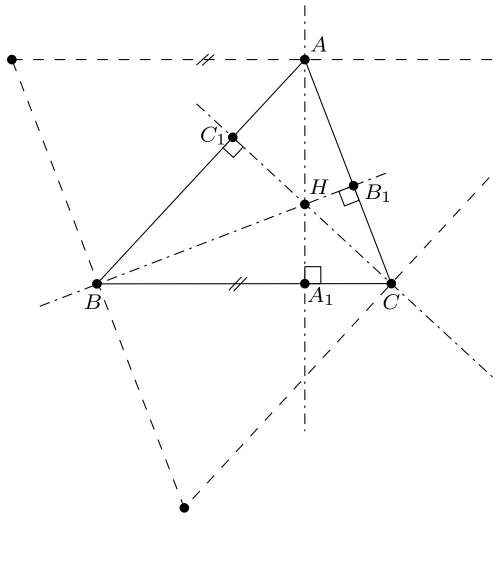
[16] Tímto jsme jej přesně vzato dokázali jen pro ostroúhlé trojúhelníky, ale platí obecně. Zkuste si případ tupoúhlého trojúhelníku sami.

My geometry teacher was sometimes acute and sometimes obtuse, but always, he was right.
– neznámý autor

Kolmiště

Tvrzení 16. *Kolmice na strany trojúhelníka vedené protějšími vrcholy (tzv. výšky) se protínají v jediném bodě, kterému říkáme[17] kolmiště. Výšku na stranu BC značíme v_a a podobně pro ostatní strany, kolmiště značíme[18] H a paty výšek A_1 atd.*

Důkaz. Vrcholem A veďme rovnoběžku se stranou BC a analogicky pro zbylé dva vrcholy. Tyto tři přímky určují trojúhelník, v němž tvoří strany toho původního střední příčky (střídavé úhly u rovnoběžek generují podobné trojúhelníky se společnými odpovídajícími si stranami, čili shodné trojúhelníky), a tedy výšky v původním trojúhelníku zde tvoří kolmice na strany vedené jejich středy, které se protínají v opsišti.

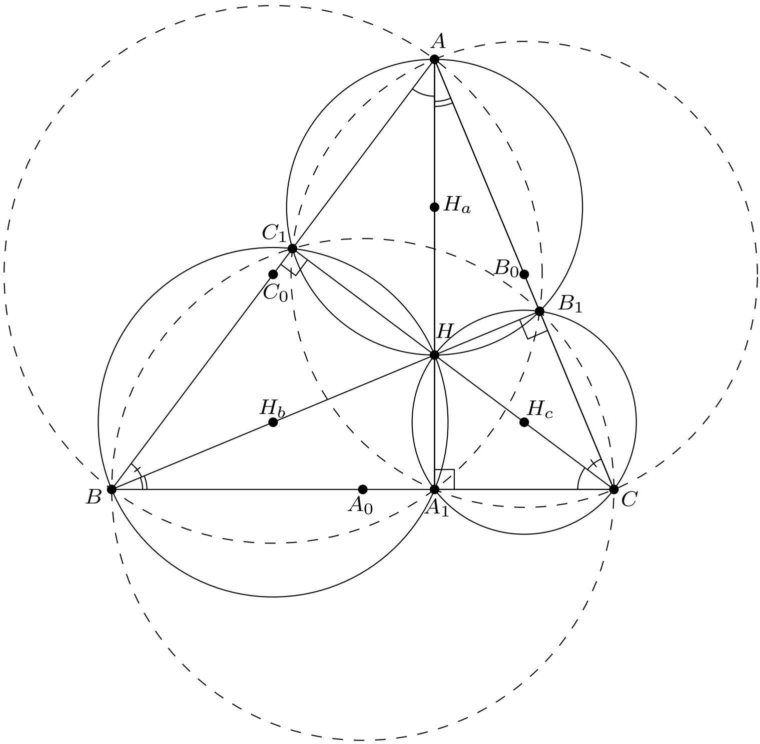


□

Kolmiště je skvělý bod a bude nás provázet až do konce seriálu. Pro začátek vytváří spoustu pravých úhlů, kružnic a jiných snadno dopočitatelných úhlů. Nenechte se odradit spoustou čar a kružnic a pořádně si prohlédněte následující obrázek. Díky množství pravých úhlů můžeme totiž vesele aplikovat Thaletovu větu:

[17] Běžně se nazývá *průsečík výšek* nebo *ortocentrum*

[18] Neptejte se proč, ale je to standardní značení a K už je zabrané, jak uvidíme v příštím dílu.



Tvrzení 17. (Základní vlastnosti výšek a kolmiště v ostroúhlém trojúhelníku) *Na obrázku je velikost jednoproužkovaného úhlu* $90° - \beta$, *dvouproužkovaného* $90° - \gamma$ *a přeškrtnutého* $90° - \alpha$. *Středy čárkovaných kružnic jsou středy příslušných stran, středy plných jsou středy spojnic vrcholů s kolmištěm (body* H_a, H_b *a* H_c*).*

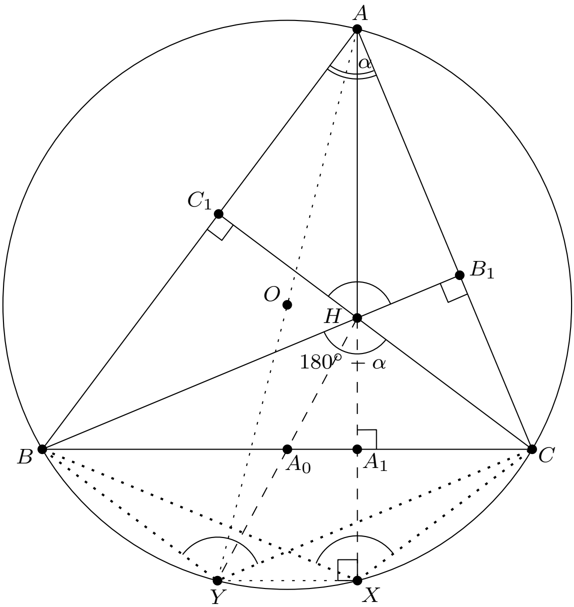
Podobně jako u opsiště si snadno rozmyslíme, že kolmiště leží uvnitř svého trojúhelníku právě tehdy, když tento je ostroúhlý. Platí dokonce něco lepšího. Jaký bod je kolmištěm trojúhelníka ABH? Pohledem na obrázek snadno zjistíme, že je to C. Z analogických tvrzení o zbylých stranách dostáváme, že kolmištěm trojúhelníka s vrcholy ve třech ze čtyř bodů A, B, C a H je čtvrtý z nich. Toto se může hodit, pokud pracujeme s tupoúhlým trojúhelníkem a nelíbí se nám, že je kolmiště venku. Můžeme tak například dostat minulý obrázek i pro tupoúhlý trojúhelník (jedním z vrcholů bude H). Další vlastnost vyjadřující, že body A, B, C a H jsou v jistém smyslu rovnocenné, popisuje následující cvičení.

Cvičení 18. (Stejné kružnice opsané) Kružnice opsaná trojúhelníku HBC je shodná (tedy má stejný poloměr) s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

Návod. Jak velké úhly odpovídají tětivě BC v obou kružnicích?

Tvrzení 19. (Překlápění kolmiště) *Obrazy* H *v osové souměrnosti podle* BC *a* *středové souměrnosti podle A_0 (tj. středu BC) leží na kružnici opsané. Druhý z obrazů navíc tvoří s A průměr kružnice opsané.*

Důkaz. Označme X obraz H podle BC a Y středový obraz H podle A_0. Pak platí $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BHC| = 180° - \alpha$ a body A, X leží v opačných polorovinách určených přímkou BC (pokud je ABC ostroúhlý), nebo $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BHC| = \alpha$ a body A, X leží ve stejné polorovině určené přímkou BC (pokud je ABC tupoúhlý). Dále vidíme, že body X a Y jsou oba vzdáleny od BC stejně jako H, takže XY je rovnoběžná s BC, a tedy kolmá na výšku AX. Proto je $\triangle AXY$ pravoúhlý a z Thaletovy věty je AY průměr kružnice opsané.



□

Poznámka. Předchozí důkaz ilustruje častou nepříjemnost provázející řešení geometrických úloh dopočítáváním velikostí úhlů (tzv. *úhlením*) a dokazováním, že různé čtveřice bodů tvoří tětivové čtyřúhelníky. Tětivovost daného čtyřúhelníka je totiž vyjádřena dvěma různými rovnostmi úhlů, které odpovídají různým konfiguracím těchto bodů nebo eventuálně jejich pořadím na kružnici. Jednoduše řečeno odpovídají „různým obrázkům“. Existují dvě možnosti, jak se s tím vypořádat. Jednou z nich je důsledné rozebrání všech (typicky dvou) případů – ostroúhlý vs. tupoúhlý trojúhelník v minulém důkazu – a druhou je tzv. *orientované úhlení*, které je méně intuitivní než klasické úhlení, ale umožňuje korektně se vyhnout rozebírání případů. Více se o něm dočtete v naší knihovničce.[19] My zůstaneme u první možnosti.

[19] *http://mks.mff.cuni.cz/library/OrientovaneUhleniMO/OrientovaneUhleniMO.pdf*.

Cvičení 20. Dokažte $|HA| \cdot |HA_1| = |HB| \cdot |HB_1| = |HC| \cdot |HC_1|$.

Návod. Podobné trojúhelníky nebo (poloilegálně – bude v příštím dílu) mocnost.

Cvičení 21. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že $AP \perp BC$.

Návod. Poznejte kolmiště.

Cvičení 22. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s kolmištěm H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček BC a AH. Dokažte $MN \perp B_1C_1$.

Návod. Uvažte kružnice nad průměry AH a BC.

Cvičení 23. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV. (A–60–III–5)

Návod. Vzpomeňte si na překlápění a poznejte střední příčku.

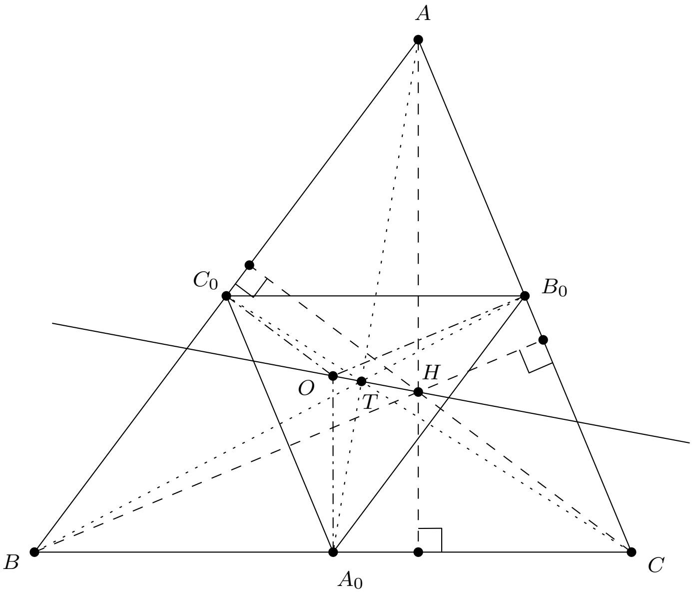
Eulerova přímka

S Eulerovou[20] přímkou se běžně ve škole nepotkáme, takže se konečně dostáváme do neprobádaného terénu.

Tvrzení 24. (O Eulerově přímce) *Opsiště, těžiště a kolmiště leží na jedné přímce (mohou splynout v jeden bod) a platí $|HT| = 2|OT|$. Této přímce se říká Eulerova přímka.*

Důkaz. Použijeme stejný trik jako v důkazu existence kolmiště – osy stran jsou výšky v trojúhelníku ze středních příček, tedy opsiště v ABC je kolmištěm v $A_0B_0C_0$. Tyto dva trojúhelníky jsou stejnolehlé se středem v těžišti a koeficientem -2, takže H se zobrazí na O a navíc T leží na OH tak, že $|HT| = 2|OT|$.

[20] Švýcar Leonhard Euler (1707–1783) byl jedním z největších novověkých matematiků, který svou prací přispěl k vývoji snad všech odvětví matematiky.



Příklad 25. Nechť X je bod na kružnici opsané trojúhelníka ABC. Dokažte, že přímka TX půlí úsečku HX', kde XX' je průměr opsané kružnice.

Řešení. Podívejme se na trojúhelník HXX'. Bod T leží na jeho těžnici HO ve třetině blíž k O (tady používáme Eulerovu přímku), je to tedy těžiště a přímka XT jakožto těžnice jistě půlí stranu HX'.

V následujících cvičeních zkuste vždy najít ten správný trojúhelník, jehož Eulerova přímka (a zejména známé poměry vzdáleností H, T a O na ní) nám dá, co potřebujeme.

Cvičení 26. Označme S střed úsečky BH a X průsečík přímek CS a HA_0. Dále nechť O' je osový obraz O podle BC. Dokažte, že body A, X a O' leží na jedné přímce.

Návod. Co je Eulerova přímka trojúhelníku HBC?

Cvičení 27. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník. Označme H_C a H_D kolmiště trojúhelníků ABC a ABD. Dokažte, že $H_CH_D \parallel CD$. (MO 58–A–I–2)

Návod. Uvažte příslušná těžiště T_C a T_D a dokažte $T_CT_D \parallel CD$. Co nám říkají „Eulerovy poměry" v $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$?

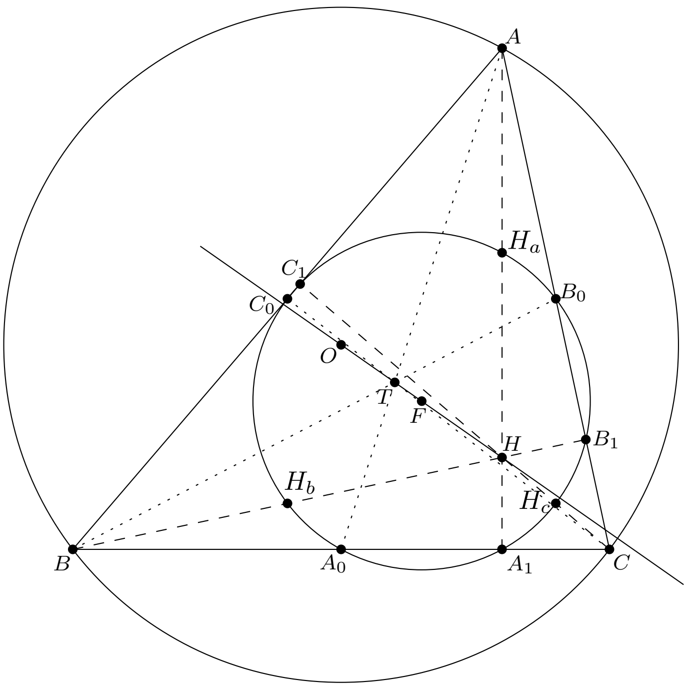
Cvičení 28. Dokažte $|OH| < 3R$, kde R je poloměr kružnice opsané.

Návod. Nejdřív si uvědomte, že jde o zajímavé tvrzení jen pro „hodně tupoúhlý" trojúhelník. Jelikož T leží vždy uvnitř trojúhelníka, leží i uvnitř opsané kružnice, tedy $|OT| < R$. Použijte Eulerovu přímku.

Feuerbachova kružnice

Vzpomeňme si na tvrzení o překlápění kolmiště podle stran a středů stran. Víme, že příslušných šest obrazů leží na kružnici opsané. Uvažme stejnolehlost se středem v H a koeficientem $1/2$. V ní se kružnice opsaná zobrazí na kružnici procházející středy všech úseček HX, kde za X můžeme dosadit libovolný z výše zmíněných bodů nebo vrcholů trojúhelníka. Jinými slovy prochází všemi středy stran, patami výšek a středy úseček AH, BH a CH. Středy kružnic se ve stejnolehlosti zobrazují na středy, takže dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 29. (O Feuerbachově kružnici) *Středy stran, paty výšek a středy úseček AH, BH a CH leží na kružnici se středem F v polovině úsečky OH. Tuto kružnici nazýváme Feuerbachova[21] kružnice nebo také kružnice devíti bodů[22].*



Poznámka. Rádi bychom zdůraznili, že se nám právě povedlo něco pozoruhodného. Jen s pomocí základních vlastností stejnolehlosti a troškou vybudované teorie

[21] Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) byl německý geometr. Proslavil se důkazem věty, o které uslyšíme později.

[22] Hádejte proč.

jsme získali devět (dobrých) bodů ležících na jedné kružnici! V porovnání s tím, jakou dá někdy práci dokázat to o pouhých čtyřech bodech, to bylo skoro zadarmo a do skládačky geometrie trojúhelníka jsme tím doplnili podstatný dílek.

Příklad 30. Dokažte, že F leží na Eulerově přímce a platí $|FO| = |FH| = 3|FT|$.

Řešení. Jak jsme již zmínili, F jakožto obraz kružnice opsané ve stejnolehlosti s koeficientem $1/2$ leží ve středu úsečky OH, což je jistě bod Eulerovy přímky splňující zmíněnou rovnost.

Cvičení 31. Je známo, že až na degenerované případy mají dvě kružnice právě dva středy stejnolehlosti. Najděte druhý střed stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na Feuerbachovu kružnici a znovu ověřte tvrzení z minulého příkladu.

Návod. Je to těžiště.

Cvičení 32. Najděte Feuerbachovu kružnici trojúhelníka BHC.

Návod. Je to Feuerbachova kružnice pro původní $\triangle ABC$. Rozmyslete si, jak se mění role jednotlivých trojic bodů (středy stran, paty výšek, středy spojinic vrcholů s kolmištěm).

Cvičení 33. Ukažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků BHC, CHA a AHB prochází jedním bodem.

Návod. Využijte minulé cvičení.

Cvičení 34. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Tečny k půlkružnici vedené body C, D se protnou v X a úhlopříčky AC, BD v bodě Y. Označme M průsečík EF s AB. Dokažte, že body E, C, M, D leží na jedné kružnici.

Návod. Dokreslete průsečík AD s BC a ve vzniklém trojúhelníku najděte Feuerbachovu kružnici.

Cvičení 35. Rozmyslete si, že A_0, B_0 a středy AH a CH jsou vrcholy obdélníka.

Návod. Tvrzení o překlápění říká, že A a obraz H přes A_0 tvoří průměr opsané. Co to znamená na Feuerbachově kružnici?

Vepsiště a připsiště

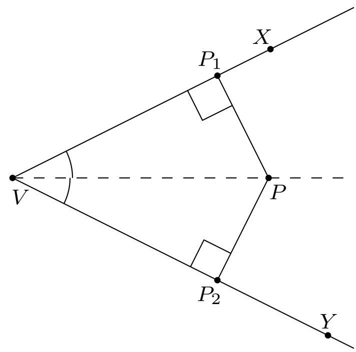
Už víme, že pro osy stran, pro těžnice i pro výšky platí, že se protínají v jednom bodě. Další rozumnou množinou přímek jsou osy (vnitřních) úhlů. Pro důkaz, že se skutečně protínají v jednom bodě, potřebujeme následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení 36. *Mějme bod P nacházející se uvnitř konvexního úhlu XVY. Potom P leží na ose vnitřního úhlu XVY právě tehdy, když je vzdálenost P od polopřímek VX a VY stejná.*

Důkaz. Paty kolmic z P na VX a VY nazvěme P_1 a P_2.

Pokud je P na ose úhlu XVY, potom platí $|\sphericalangle PVP_1| = |\sphericalangle PVP_2|$. Proto můžeme použít větu *usu*, z níž dostaneme shodnost trojúhelníků PVP_1 a PVP_2. Z ní plyne $|PP_1| = |PP_2|$, takže vzdálenost P od VX a VY je stejná.

Pokud naopak víme, že je vzdálenost P od VX a VY stejná, pak $|PP_1| = |PP_2|$. Proto jsou z věty *Ssu* trojúhelníky PVP_1 a PVP_2 opět podobné. Dostáváme $|\sphericalangle PVP_1| = |\sphericalangle PVP_2|$, neboli P leží na ose úhlu XVY.

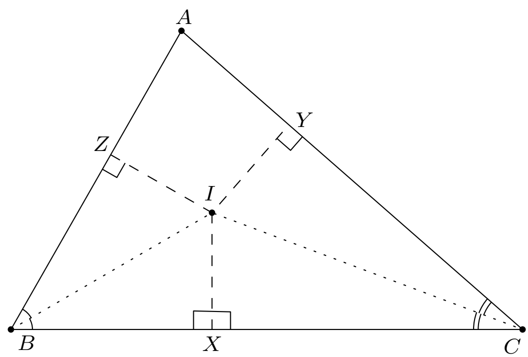


□

Nyní už jsme schopni dokázat, že se osy vnitřních úhlů protínají v jednom bodě.

Tvrzení 37. *V trojúhelníku ABC se osy vnitřních úhlů CAB, ABC a BCA protínají v jednom bodě.*

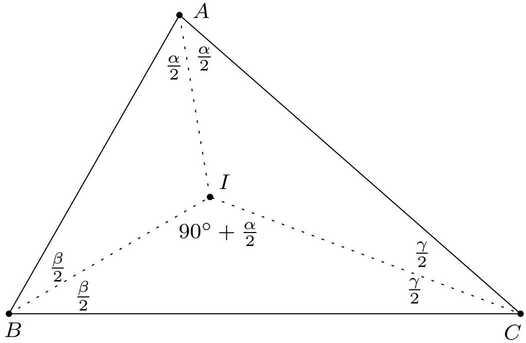
Důkaz. Nechť se osy vnitřních úhlů ABC a BCA protínají v bodě I. Nechť jsou X, Y a Z postupně paty kolmic z I na strany BC, CA a AB. Jelikož I leží na ose úhlu ABC, je díky předchozímu tvrzení $|IZ| = |IX|$. Protože I leží i na ose úhlu BCA, platí i $|IX| = |IY|$. Proto $|IZ| = |IY|$, z čehož ale díky předchozímu tvrzení plyne, že I leží na ose úhlu BAC. Z toho důvodu se osy všech vnitřních úhlů protínají v I.



□

Průsečík os vnitřních úhlů budeme v našem seriálu označovat jako *vepsiště* a obvykle pro něj budeme používat písmenko I (z anglického *incenter*).

Stejně jako u ostatních středů, i zde se vyplatí pamatovat si úhly mezi vrcholy a příslušným středem. Úhly typu „vrchol–vrchol–vepsiště" jsou jednoduché – přímo z definice plyne $|\sphericalangle CAI| = \alpha/2 = |\sphericalangle IAB|$ atp. Co se týče úhlů typu „vrchol–vepsiště–vrchol", jednoduše aplikujme rovnost $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90°$. Díky tomu, že se úhly v trojúhelníku sečtou na 180 stupňů, dostáváme $|\sphericalangle CIB| = 90° + \alpha/2$ atp.



Angle bisector theorem

Osy úhlů mají jednu zajímavou vlastnost, která s vepsištěm přímo nesouvisí. Jedná se o poměr, ve kterém osa protíná příslušnou stranu. Zatímco u těžnic a os stran je tento poměr nezajímavý (jedna) a u výšek ošklivý (tj. nějaký fujky zlomek s kosiny), u os úhlu dává velmi pěkný výsledek.

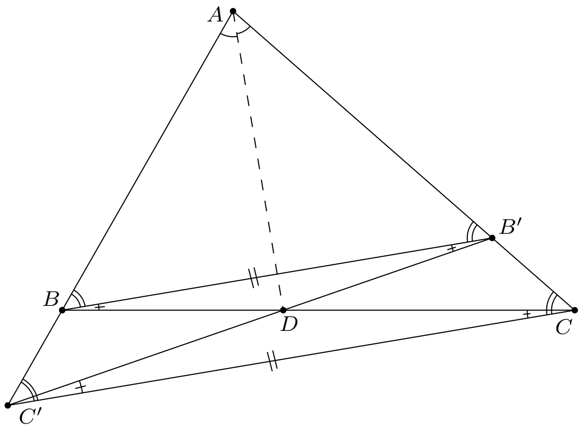
Tvrzení 38.[23] *V trojúhelníku ABC nazvěme jako D patu*[24] *osy vnitřního úhlu u A. Potom*

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}.$$

Důkaz. (Syntetický) Nechť B' a C' jsou obrazy B a C v osové souměrnosti podle AD. Potom B' a C' leží postupně na přímkách AC a AB. Protože $|AB| = |AB'|$ a $|AC| = |AC'|$, jsou BAB' a CAC' rovnoramenné trojúhelníky se stejným úhlem naproti základně. Proto jsou podobné, takže $\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}$. Dále $|DB| = |DB'|$ a $|DC| = |DC'|$, takže analogicky jsou i trojúhelníky BDB' a CDC' podobné. Proto $\frac{|BB'|}{|CC'|} = \frac{|BD|}{|DC|}$. Z toho již plyne $\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$, což jsme chtěli.

[23] Tomuto tvrzení se někdy (obzvláště v anglické literatuře) říká *Inner angle bisector theorem.*

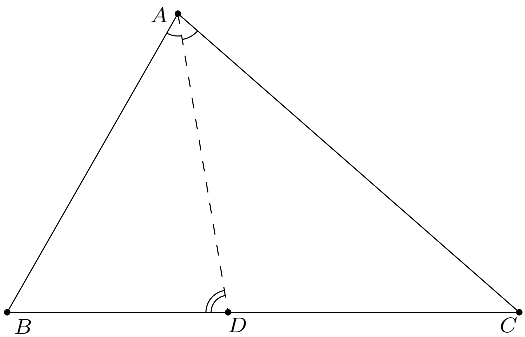
[24] Slovo *pata* budeme používat dosti liberálně, tj. jako průsečík libovolné přímky z vrcholu trojúhelníka s protější stranou. V matematické olympiádě a ve škole ovšem toto označení spíše nepotkáte, a proto ho používejte s opatrností.



Důkaz. (Sinthétický) Označme velikost úhlu BDA jako ϑ. Aplikací sinové věty na trojúhelníky BDA a ADC dostaneme

$$\frac{|BD|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|BA|}{\sin\vartheta} \quad \text{a} \quad \frac{|DC|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AC|}{\sin(180^\circ - \vartheta)}.$$

Protože $\sin\vartheta = \sin(180^\circ - \vartheta)$, dostáváme po podělení předchozích dvou rovností přesně $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$, což jsme chtěli.[25]



□

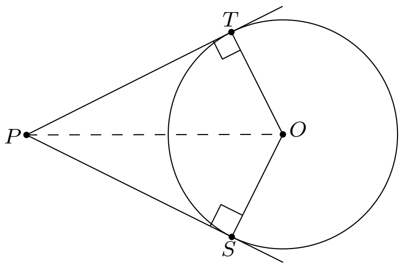
Kružnice vepsaná

Nechť X, Y a Z jsou opět paty kolmic z I postupně na BC, CA a AB. Protože $|IX| = |IY| = |IZ|$, je I opsištěm trojúhelníka XYZ. Protože u X, Y i Z jsou pravé úhly, jsou BC, CA a AB tečny k této kružnici. Proto se kružnice opsaná $\triangle XYZ$ dotýká všech stran původního trojúhelníka. Této kružnici říkáme *kružnice*

[25]Pokud zatím nevíte, jak se počítá sinus tupého úhlu, vůbec se tímto důkazem netrapte.

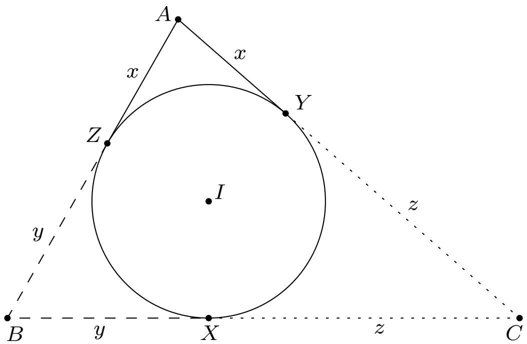
vepsaná[26] a její poloměr obvykle značíme r.[27] Pro další práci s ní budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 39.[28] *Nechť ω je kružnice se středem O a P bod mimo ni. Dotyky tečen z P k ω označme jako S a T. Potom $|PS| = |PT|$.*



Důkaz. Trojúhelníky PSO a PTO jsou shodné z věty *Ssu*, z čehož tvrzení hned plyne. □

Z tohoto tvrzeníčka vyplývá, že $|AY| = |AZ|$, $|BZ| = |BX|$ a $|CX| = |CY|$. Označme si tyto hodnoty postupně jako x, y a z. Potom dostáváme sérii rovností $y + z = a$, $z + x = b$ a $x + y = c$. Z nich lze dostat vztahy $(-a + b + c)/2 = x$, $(a-b+c)/2 = y$ a $(a+b-c)/2 = z$. To znamená, že umíme vyjádřit délku z vrcholů k bodům dotyku!



Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, budeme ve zbytku seriálu používat značení

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{a} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Poslední z těchto hodnot nazýváme *poloobvod*.

[26] Jejím středem je zjevně I. Proto se vepsišti „oficiálně“ říká *střed kružnice vepsané*.

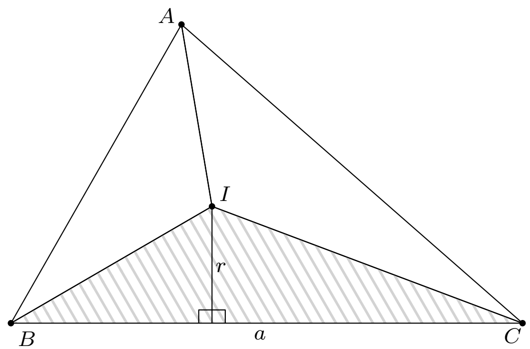
[27] V českém prostředí se často používá r pro poloměr kružnice opsané, což vede k používání ρ v případě vepsané. Ve světě je ovšem obvyklé značit je tak, jak to děláme my.

[28] Tomuto lemmátku se obvykle přezdívá *Equal tangents*.

Jeden ze způsobů, jak interpretovat I, je „bod, který je nad všemi stranami stejně vysoko“. Z toho plyne následující tvrzení.

Tvrzení 40. *Obsah trojúhelníku ABC je roven rs.*

Důkaz. Trojúhelník ABC můžeme rozřezat na trojúhelníky BIC, CIA a AIB. Trojúhelník BIC má stranu o velikosti a a výšku na ni rovnou r. Proto je obsah $\triangle BIC$ roven $r \cdot \frac{a}{2}$. Sečtením analogických hodnot pro zbylé dva trojúhelníky dostaneme, že obsah $\triangle ABC$ je roven $r \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = rs$, což jsme chtěli ukázat.



□

Cvičení 41. Buď ABC trojúhelník s pravým úhlem u A. Ukažte, že

$$r = \frac{b + c - a}{2}.$$

Návod. Buď si všimněte, že $AYIZ$ je čtverec, a proto $r = x$, nebo vypočítejte obsah trojúhelníka dvěma způsoby a upravte pomocí Pythagorovy věty.

Cvičení 42. Buď $ABCD$ rovnoběžník, ve kterém platí $|AB| > |BC|$. Nechť K a M jsou body dotyků kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC a ADC se stranou AC. Podobně nechť jsou L a N body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD se stranou BD. Ukažte, že $KLMN$ je obdélník.

Návod. Ukažte, že průsečík AC a BD má ke K, L, M i N stejnou vzdálenost.

Cvičení 43. Trojúhelník s výškami o velikostech h_1, h_2 a h_3 má obvod p. Ukažte, že trojúhelník se stranami $1/h_1$, $1/h_2$, $1/h_3$ má poloměr kružnice vepsané roven $1/p$. (MKS 35–4–6)

Návod. Uvědomte si, že nový trojúhelník je podobný novému s koeficientem $\frac{1}{2S}$, kde S je obsah původního trojúhelníka. Použijte vzorec pro obsah.

Připsiště

Můžeme se zabývat otázkou, co se stane, pokud místo os vnitřních úhlů uvažujeme osy vnějších úhlů. Bohužel se tyto tři osy neprotínají v jednom bodě. Ovšem určitá verze tohoto tvrzení stále platí.

Věta 44. *V trojúhelníku ABC se osy vnějších úhlů CBA a BCA protínají na ose vnitřního úhlu BAC.*

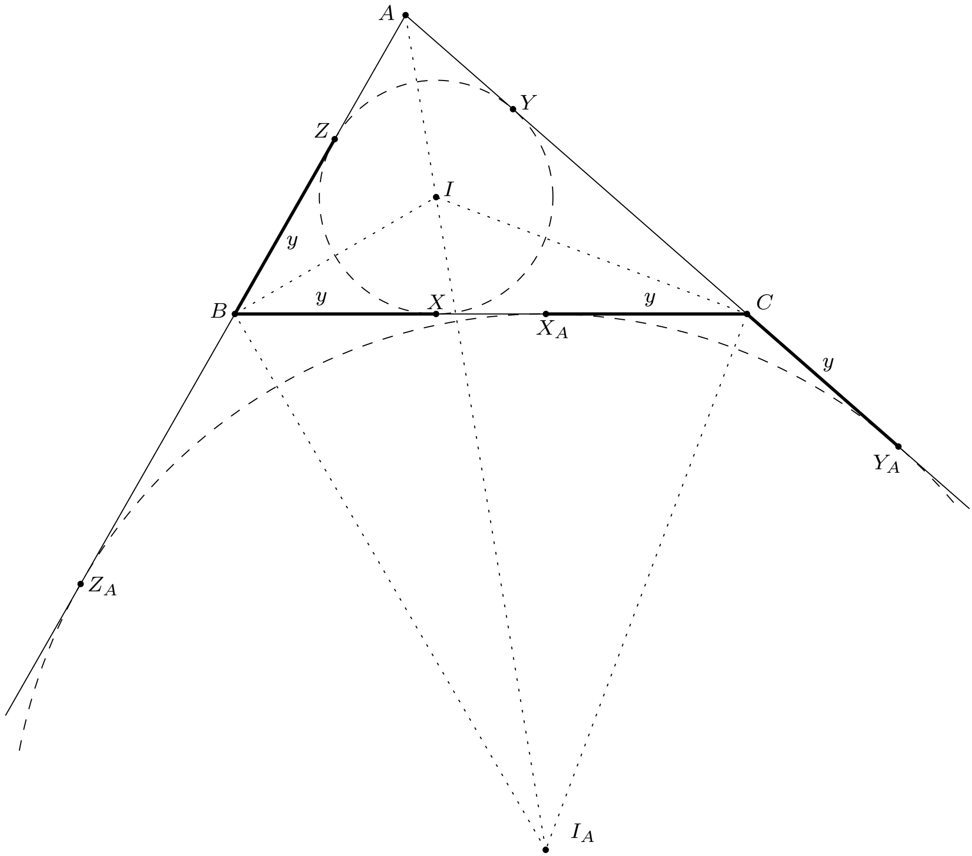
Důkaz. Nechť se osy vnějších úhlů CBA a ACB protínají v bodě I_A. Nechť jsou X_A, Y_A a Z_A postupně paty kolmic z I_A na přímky BC, CA a AB. Protože I_A je na ose úhlu CBZ_A, platí $|I_A Z_A| = |I_A X_A|$. Protože I_A leží i na ose úhlu $X_A CB$, platí i $|I_A X_A| = |I_A Y_A|$. Proto $|I_A Z_A| = |I_A Y_A|$, z čehož ale plyne, že I_A skutečně leží na vnitřní ose úhlu BAC. □

Tento průsečík budeme v tomto seriálu označovat jako *připsiště příslušející vrcholu A* a obvykle pro něj budeme používat symbol I_A. Analogické body samozřejmě existují i pro zbylé vrcholy.

Cvičení 45. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme D, E a F postupně paty os úhlů z A, B a C. Dokažte, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Návod. Co jsou připsiště $\triangle ABD$ a $\triangle ACD$?

Obecná pomůcka pro práci s připsištěm zní „pokud něco platí pro vepsiště, dost možná to v nějaké formě platí i pro připsiště“. Porovnáním důkazů existence vepsiště a připsiště vidíme, že většina úvah funguje dosti analogicky. Následuje série tvrzení o připsištích, která jsme v případě vepsiště už potkali. Všechny důkazy jsou podobné důkazům pro vepsiště, a proto je přenecháváme čtenáři jako domácí cvičení.



Tvrzení 46.[29] *Nazvěme jako D patu osy vnějšího úhlu u A. Pak platí $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$.*

Tvrzení 47. *Kružnice opsaná trojúhelníku $X_AY_AZ_A$ má střed v I_A a přímky AC, CB a BA se jí dotýkají. Této kružnici říkáme kružnice připsaná příslušející bodu A a její poloměr značíme r_a.*

Tvrzení 48. *Platí $|BZ_A| = |BX_A| = z$, $|CX_A| = |CY_A| = y$ a $|AY_A| = |AZ_A| = s$. Z toho také plyne, že střed XX_A splývá se středem BC.*

Tvrzení 49. *Obsah trojúhelníku ABC je roven r_ax.*

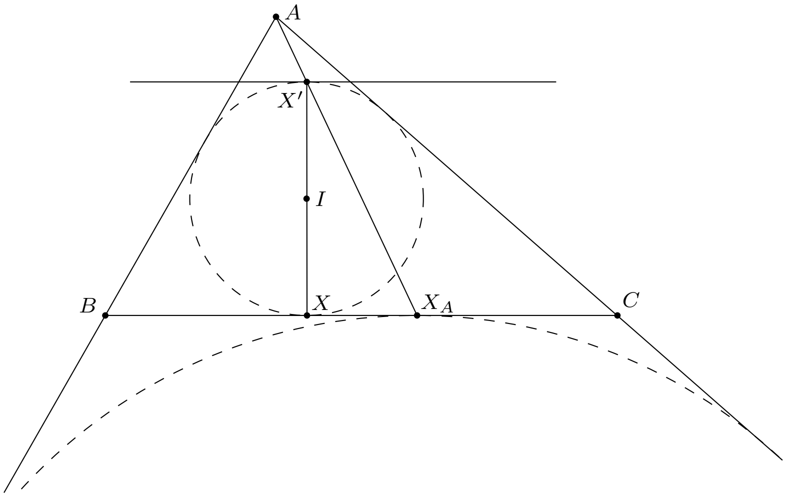
Můžeme vidět, že kružnice připsaná je vlastně jen „nafouklá“ kružnice vepsaná. Toho využívá následující lemma.

Lemma 50. *Nechť X a X_A jsou body dotyku kružnice vepsané a kružnice A-připsané se stranou BC. Nechť přímka XI podruhé protíná kružnici vepsanou v bodě X'. Potom A, X' a X_A leží na jedné přímce.*

---

[29] Tomuto tvrzení se občas říká *Outer angle bisector theorem.*

Důkaz. Protože se obě kružnice dotýkají polopřímek AB a AC, existuje stejnolehlost se středem v A, která převede připsanou na vepsanou. Bod X_A se v tu chvíli přenese na průsečík kružnice vepsané s obrazem strany BC. A co je obrazem BC? Inu, protože je BC tečna ke kružnici připsané, jejím obrazem je tečna ke kružnici vepsané. Navíc tato tečna musí být s BC rovnoběžná, což nám nechává jen dvě možnosti – tečnu vedenou bodem X a tečnu vedenou bodem naproti X, tedy X'. Proto je obrazem X_A buď X, nebo X'. Protože ovšem X_AX neprochází A, musí hledaným obrazem být X', takže A, X' a X_A skutečně leží na jedné přímce.

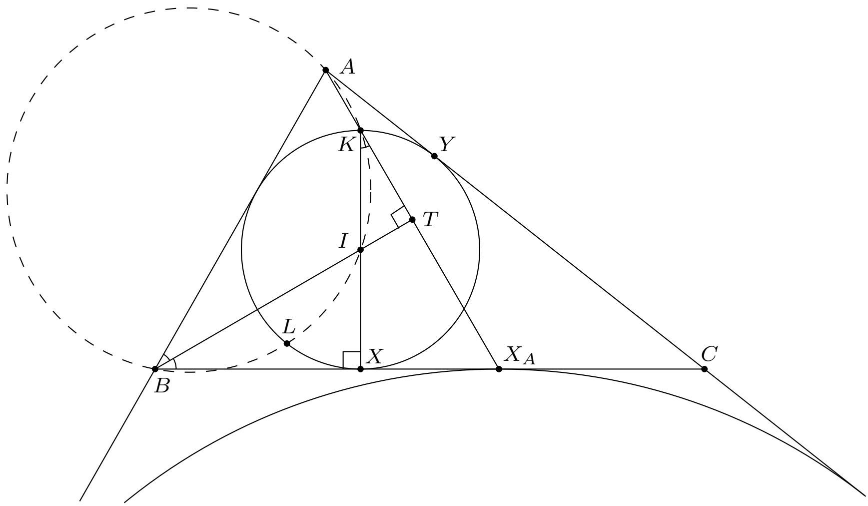


Příklad 51. Trojúhelník ABC splňující $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$ má vepsiště I. Jeho kružnice vepsaná se dotýká stran BC a CA v bodech X a Y. Nechť K a L jsou obrazy X a Y ve středové souměrnosti se středem v I. Ukažte, že A, B, K a L leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 2005)

Řešení. Podmínka $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$ se dá přepsat jako $|AB| = z$. Nechť X_A je bod dotyku kružnice A-připsané se stranou BC. Potom $|BX_A| = z$, takže ABX_A je rovnoramenný trojúhelník. Protože BI je osou úhlu v tomto trojúhelníku, je BI kolmá na AX_A. Nazvěme průsečík těchto dvou přímek jako T.

Díky výše uvedenému lemmatu leží A, K a X_A na jedné přímce. Tudíž $|\sphericalangle KTB| = 90° = |\sphericalangle KXB|$, takže $KTXB$ je tětivový čtyřúhelník. Proto $|\sphericalangle XKT| = |\sphericalangle XBT| = |\sphericalangle XBI| = |\sphericalangle ABI|$. Ale $|\sphericalangle IKA| = 180° - |\sphericalangle XKT| = 180° - |\sphericalangle ABI|$, takže K leží na kružnici opsané AIB. Analogicky dostaneme, že i L leží na té samé kružnici,[30] z čehož už plyne požadované tvrzení.

[30] Všimněte si, že je k tomu potřeba provést znovu úplně celý postup včetně definování nového bodu T.



Cvičení 52. Ukažte, že střed úsečky AX leží na přímce s I a A_0.

Návod. Co se stane, když tyto body posunete do dvojnásobné vzdálenosti od X?

Cvičení 53. Buď Ω kružnice a ℓ tečna k Ω. Nechť bod M leží na ℓ. Najděte množinu všech bodů P, pro něž lze na ℓ najít body Q a R tak, aby byl M střed QR a Ω kružnice vepsaná $\triangle PQR$. (IMO 1992)

Návod. Nechť X je bod dotyku ℓ a Ω. Uvažte bod Y, který je obrazem X ve středové souměrnosti podle M, a bod Z, který leží naproti X v Ω. Jak spolu souvisí P, Y a Z?

Cvičení 54. (těžší) V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky IS a CT jsou rovnoběžné. (MO 62–A–III)

Návod. Využijte výše zmíněného lemmatu pro trojúhelník ABD. Pak dopočítejte poměry.

Závěrem

You can't criticize geometry. It is never wrong. – Paul Rand

Tímto první díl seriálu končí. Doufáme, že vám úvod do říše trojúhelníků líbil a že se k nám příště opět připojíte.[31]

Pokud jste nepochopili všechno, nezoufejte. Nebojte se na cokoliv zeptat, ať už e-mailem nebo na PraSečím chatu. A určitě nepotřebujete vyřešit všechna cvičení, ba

[31] Pokud se vám nelíbil, tak sorry. Napište nám, co se vám nelíbilo, a my to možná příště nebudeme dělat.

ani pochopit celý seriál, na to, abyste byli schopni zvládnout alespoň některé z úloh. Proto se jich nebojte a každopádně je vyzkoušejte. Při jejich řešení pamatujte na to, že v seriálových sériích úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

V příštím díle se můžete těšit na Simsonovu přímku, Švrčkův bod, kamarádství v trojúhelníku a mnoho[32] dalšího.

Geometrii zdar!

[32] Nebo alespoň trochu.