Geometrie trojúhelníka I – Základní středy

Life without geometry is pointless. – neznámý autor

Vítáme vás u letošního PraSečího seriálu. Každoročně pro svoje řešitele připravujeme trojdílný text, který se podrobně zabývá nějakým odvětvím matematiky. Ke každému dílu patří série tří úloh hodnocených nejvýše pěti body, které se všechny počítají do celkového bodového zisku (lze tedy získat až 15 bodů za sérii). Letošním tématem je *Geometrie trojúhelníka* a seriál pro vás připravují *David Hruška* a *Rado Švarc*.

Kde jsme to vyhrabali?

Geometrie jako taková je nedílnou součástí matematiky všech vyspělých civilizací. Jakmile lidé zvládli aritmetiku a kupecké počty, začali se zabývat tím, co viděli kolem sebe – tvary, délkami, obsahy, úhly atd. Přitom byli motivováni otázkami typu „Kolik kamene bude potřeba na tuto zeď?“, „Jak daleko je loď na obzoru?“, „Jak vysoká je pyramida?“, „Kdy bude další zatmění Slunce?“ nebo „Jak mám co nejlevněji oplotit co největší pozemek?“[1]. Velkého vývoje a obliby se geometrie dočkala v antickém Řecku, kde se stala prostředkem pro vyjádření množství (a to ve všech možných významech) a byla v podstatě synonymem pro matematiku. Napomohl tomu objev iracionálních čísel, která se v geometrii přirozeně vyskytovala jako délky, ale nedala se „zapsat číslem“. Jistě vám nemusíme představovat jména jako Thalés, Archimédes, Pythagoras nebo Eukleides. Poslední ze jmenovaných položil *Základy*[2] modernímu pojetí matematiky.

S objevem analytické geometrie[3], rozvojem algebry a diferenciálního počtu se klasická syntetická[4] geometrie stala spíše okrajovou oblastí, přesto byla dále rozví-

[1] Ne že by byla pro matematika zrovna uvěřitelná, ale existuje zajímavá legenda o založení Kartága (pozdější) královnou Dido: *https://cs.wikipedia.org/wiki/Kartágo*.

[2] Jedná se o soubor třinácti knih pojednávajících o základech matematiky axiomatickým způsobem a jednu z nejvydávanějších knih všech dob.

[3] Za jejího zakladatele je považován francouzský filozof a matematik René Descartes (1596–1650).

[4] Analytická geometrie „rozkládá“ geometrické objekty na jednoduché algebraické objekty (např. bod je dán svými souřadnicemi), syntetická naproti tomu vychází z několika intuitivních geometrických faktů a „skládá“ z nich složitější tvrzení.

jena velikány jako Leonhard Euler (1707–1783), Gaspard Monge (1746–1818), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Jakob Steiner (1796–1863) nebo Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834). I s jejich objevy se v seriálu potkáme.

Proč ne třeba geometrie lichoběžníka? A co jsou základní středy?

Téma tohoto seriálu je ještě o něco specifičtější než rovinná geometrie (planimetrie). Cílem geometrie trojúhelníka je systematicky studovat významné body (a další objekty) v trojúhelníku. Ukazuje se totiž, že i tak jednoduchý útvar jich má opravdu hodně. Existuje dokonce *The Encyclopedia of Triangle Centers*[5] obsahující přes 10 000 význačných bodů. A čím že jsou zajímavé? Zejména nečekaným množstvím souvislostí, které mezi nimi matematici stále nacházejí. Už při letmém zkoumání trojúhelníka budeme totiž svědky takové spousty pozoruhodných a krásných „náhod“, že nám snad dáte za pravdu, že to za tu námahu stojí. Ale nebojte se, naším cílem kromě samotného budování teorie kolem trojúhelníku bude i použití nabytých znalostí v obecných geometrických úlohách, takže kromě jiného se určitě dočkáte i nějakého víceúhelníku. Ještě dodáme, že *střed trojúhelníka* je skutečně termín a používá se pro takový bod v rovině trojúhelníka, který je definovaný pouze pomocí jeho vrcholů a nezmění se při jejich záměně. Například těžiště trojúhelníka ABC je jistě stejný bod jako těžiště trojúhelníka BCA, na druhou stranu středy stran tuto vlastnost nemají (proto jsou také tři). Takovým bodům se budeme v prvním dílu převážně věnovat.

Značení a názvosloví

Z důvodů přehlednosti a stručnosti a hlavně proto, že nás to prostě baví, jsme se rozhodli používat ne vždy oficiálních názvů definovaných objektů. V seriálových úlohách a obecně v PraSátku je určitě můžete používat také, ale v Matematické olympiádě (české, jakož i mezinárodní) nebo jiných oficiálních soutěžích, které s námi na první pohled nesouvisí, může být jejich použití ošidné a spíš jej nedoporučujeme. Doufáme, že se vám přesto bude naše názvosloví líbit a shledáte jej praktickým. Při zavádění každého takového názvu na to v textu upozorníme a doplníme oficiálnější alternativu. Pokud byste váhali, odkud se berou písmenka pro označení bodů, tak vězte, že často pocházejí z anglických názvů.

Jak seriál číst?

Přestože první díl začíná skutečně od píky, je přece jen poměrně rozsáhlý a obsahuje mnoho úloh (ve formě cvičení s návody). Je-li vám tedy nějaká část důvěrně známá,

[5] *http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html*

neváhejte si jen projet příslušná cvičení a pokračovat dál.[6] Jinak ale doporučujeme číst seriál postupně, neboť se místy odkazujeme zpět (mělo by vždy být přesně patrné kam). Při řešení úloh a cvičení si kreslete co nejhezčí obrázky, opravdu to pomáhá. Můžete také využít výborný program GeoGebra.[7] Pokud byste si s nějakým cvičením nevěděli rady ani po přečtení návodu, obraťte se na nás prostřednictvím e-mailu[8] nebo matematického chatu na PraSečích stránkách.

[6] Přeskakovat celý seriál je ovšem přísně zakázáno, už jen kvůli podobným neodolatelně vtipným vsuvkám, jako je tato.

[7] https://www.geogebra.org/

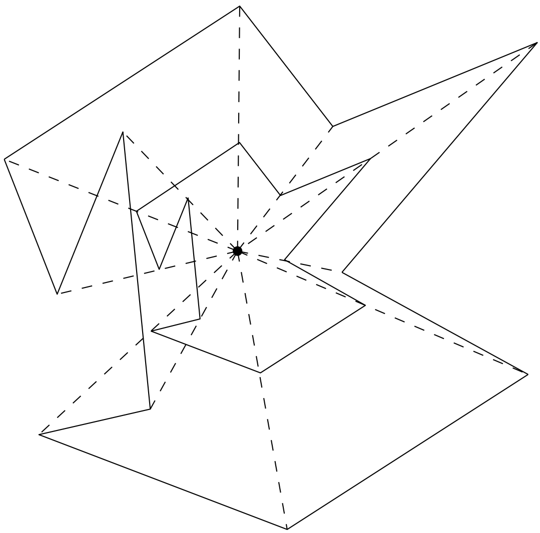
[8] Adresy najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/organizatori.php*

Geometry is the science of correct reasoning on incorrect figures. – George Polya

Něco málo do začátku

Při našem putování trojúhelníkem budeme předpokládat jen znalost základních poznatků z geometrie, které se běžně probírají na střední škole. Jsou tu ovšem dvě témata, která nechceme podrobně vysvětlovat, ale budeme je potřebovat. V první řadě jde o větu o obvodovém a středovém úhlu a související kapitolu o tětivových čtyřúhelnících. Ty budeme v prvním dílu používat jen zřídka a příslušné shrnutí můžete najít třeba v naší knihovničce.[9] Pro další díly už budou ale tětivové čtyřúhelníky poměrně nezbytné, takže doporučujeme se s nimi výhledově blíže seznámit. Druhý koncept – stejnolehlost – budeme používat častěji, takže krátce připomeneme, o co se jedná.

Stejnolehlost je geometrické zobrazení, které má za úkol správným způsobem „nafouknout“ nebo „smrsknout“ rovinu kolem sebe. Je určeno středem stejnolehlosti S a koeficientem stejnolehlosti k. Pokud je $k > 0$, potom se při stejnolehlosti libovolný bod roviny X přesune po polopřímce SX tak, aby byl od S vzdálen $k \cdot |SX|$. Pokud $k < 0$, potom se každý bod X přesune na polopřímku opačnou k SX tak, aby byl od S vzdálen $|k| \cdot |SX|$. Konkrétně např. případ $k = -1$ odpovídá středové souměrnosti se středem v S a případ $k = 1$ nic nezmění.



[9] *https://mks.mff.cuni.cz/library/TetivoveCtyruhelnikyMT/TetivoveCtyruhelnikyMT.pdf*.

Důležitá fakta o stejnolehlosti, která budeme používat, jsou:

(1) Stejnolehlost je tzv. podobné zobrazení, tj. obraz a vzor jsou vždy podobné.

(2) Speciálně kružnice přechází na kružnici, přičemž střed původní kružnice přechází na střed nové kružnice.

(3) Přímky se zobrazují na své rovnoběžky.

(4) Střed stejnolehlosti, bod a obraz bodu ve stejnolehlosti leží na jedné přímce.

(5) Průsečík dvou objektů se zobrazí na průsečík jejich obrazů.

Toto je vše, co budeme o stejnolehlosti potřebovat. Ty zvědavější, kteří si chtějí přečíst o stejnolehlosti více, odkazujeme na seriál *Geometrická zobrazení*[10] od *Pepy Tkadlece* a *Mirka Olšáka*. Nyní jsme už opravdu připraveni pustit se do práce. Příjemnou zábavu, radost z objevování a dobré nápady při řešení úloh vám přejí autoři.

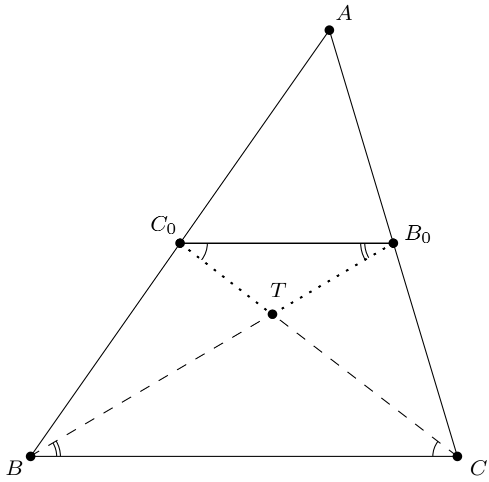
Těžiště

Středy stran BC, AC a AB značíme postupně A_0, B_0 a C_0. Spojnice vrcholu trojúhelníka se středem protější strany se nazývá *těžnice*. Těžnice z vrcholů A, B a C značíme postupně t_a, t_b a t_c.

Tvrzení 1. *Těžnice se protínají v jednom bodě, který dělí každou těžnici v poměru* $1:2$, *přičemž kratší úsek je mezi těžištěm a středem příslušné strany. Nazýváme jej těžiště a značíme* T.

Důkaz. Průsečík těžnic t_b a t_c označme T. Trojúhelníky AC_0B_0 a ABC jsou podobné s koeficientem $1/2$, takže střední příčka B_0C_0 je rovnoběžná se stranou BC a má poloviční velikost. Ze dvou dvojic střídavých úhlů dostáváme podobnost trojúhelníků B_0TC_0 a BTC. Tato má opět koeficient $1/2$, takže platí $|BT| = 2|B_0T|$ a $|CT| = 2|C_0T|$. Dokázali jsme, že dvě těžnice se protínají v bodě, který obě dělí v poměru $1:2$ a leží blíž ke středu příslušné strany. Můžeme tedy těžiště definovat jako bod ležící v tomto poměru na t_b a vidíme, že jím procházejí i zbylé dvě těžnice.

[10] *http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf*



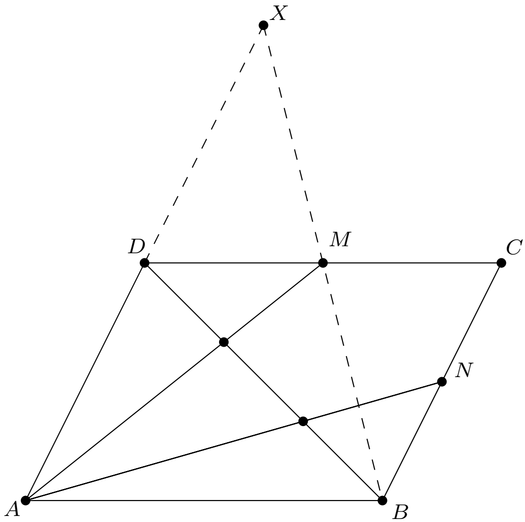
□

Objevíme-li v obrázku těžnici, střední příčku nebo dokonce těžiště, často nás to podstatně přiblíží k řešení úlohy.

Příklad 2. Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD? (MKS 35–2–3)

Řešení. Označme X průsečík přímek AD a BM, kde M je střed CD. V trojúhelníku ABX je DM střední příčkou, neboť je rovnoběžná s AB a má poloviční délku. Proto je M středem BX, D je středem AX a úsečky AM a BD se jakožto těžnice protínají v těžišti, které speciálně dělí BD v poměru $1 : 2$. Analogický výsledek dostaneme i pro spojnici vrcholu A se středem BC, takže BD je zmíněnými přímkami rozdělena na třetiny.[11]

[11]Tato konfigurace je doslova plná těžnic, těžišť, středních příček a dobrých poměrů, viz vzorové řešení na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/35/komplet2p.pdf*.



Cvičení 3. V trojúhelníku ABC platí $|AT| = |BC|$. Dokažte, že $|\sphericalangle BTC| = 90°$.

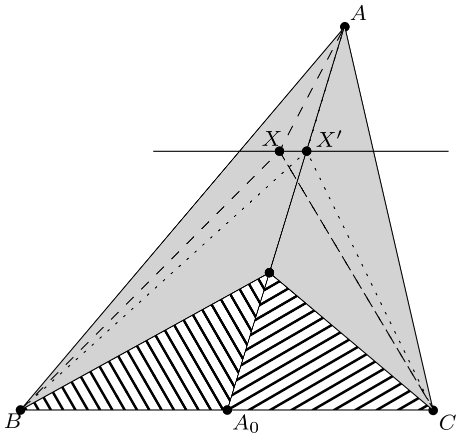
Návod. Využijte poměr, v němž T dělí těžnici, a Thaletovu větu.

Těžnice a těžiště lze charakterizovat pomocí obsahů, což se občas hodí.

Tvrzení 4. (Těžnice a obsahy) *Těžnice t_a v trojúhelníku ABC je množinou těch bodů X, pro které mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah.*

Důkaz. Nechť X leží na t_a. Trojúhelníky BA_0X a A_0CX mají stejně dlouhou základnu i příslušnou výšku, takže mají stejný obsah. To samé platí i pro dvojici trojúhelníků BA_0A a A_0CA (odpovídající případu $A = X$). Odečtením dostaneme $S_{ABX} = S_{ACX}$. Pokud X leží mimo t_a, nechť leží BÚNO[12] vlevo od t_a. Označme X' průsečík t_a a rovnoběžky s BC vedené bodem X. Pro X' rovnost obsahů platí, takže $S_{ABX} < S_{ABX'} = S_{ACX'} < S_{ACX}$. Body mimo t_a tedy tuto vlastnost nemají.

[12]Tato zkratka znamená „bez újmy na obecnosti“. Používá se, když si v důkazu z několika případů stačí vybrat jednu konkrétní a důkaz provést pouze pro ni. BÚNO totiž naznačuje, že v ostatních případech by důkaz vypadal skoro stejně (například bychom pouze prohodili některá písmenka nebo zaměnili slova „levý“ za „pravý“ a „nad“ za „pod“). Náš důkaz představuje typický příklad využití.



□

Cvičení 5. S pomocí předchozího tvrzení si rozmyslete, že těžnice na stranu a je množina bodů v určitém pevném poměru vzdáleností od b a c.

Návod. Použijte vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníka.

Cvičení 6. Rozmyslete si, že těžnice dělí trojúhelník na šest částí o stejném obsahu.

Návod. Opakovaně použijte tvrzení o obsazích.

Cvičení 7. Na stranách BC a CD kosočtverce $ABCD$ jsou zvoleny po řadě body P a Q tak, že $|BP| = |CQ|$. Ukažte, že těžiště trojúhelníku APQ leží na úsečce BD.

Návod. Body P a Q jsou stejně vzdálené od střední příčky v trojúhelníku BCD.

Cvičení 8. Dokažte, že trojúhelník vytvořený z těžnic by měl obsah rovný $\frac{3}{4}S$, kde S je obsah původního trojúhelníku.

Návod. Doplňte trojúhelník na rovnoběžník $ABXC$ a dokreslete středové obrazy A, B a X podle C. Vzniklý šestiúhelník je přirozeně rozdělený na šest kopií původního trojúhelníka. Najděte trojúhelník z těžnic.

Cvičení 9. (těžší) Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leq 2$, $t_b \leq 3$ a $t_c \leq 4$.

(MO 61–III–2)

Návod. Využijte cvičení o šesti trojúhelníčcích. Odhadněte obsah jednoho z nich pomocí odhadů délek stran. Najděte trojúhelník, který realizuje maximum.

Není náhoda, že jsme nepotkali skoro žádné související úhly. Smutnou skutečností je, že těžnice ani těžiště obecně žádné dobré úhly nevyrábí.[13] Například úhel u těžnice (tj. třeba úhel BAA_0) nelze jednoduše vyjádřit pomocí vnitřních úhlů. Není to ale vždy úplně beznadějné, viz následující cvičení.

[13] Pokud ale o nějakých víte, určitě nám dejte vědět. :-)

Cvičení 10. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014)

Návod. Dokreslete středy AB a BC. Úhly u těžnice jsou sice tajemné, ale ty odpovídající si v podobných trojúhelnících jsou určitě stejné.

Poznámka. (O fyzikálním těžišti) Pojem těžiště (neboli hmotný střed) známe kromě geometrie také z fyziky, kde označuje bod, v němž musíme těleso podepřít, aby bylo v rovnováze (která ale nemusí být stabilní). Zkuste pověsit homogenní (tedy s rovnoměrně rozloženou hmotou) trojúhelník[14] za vrchol. Kam bude směřovat příslušná těžnice? Tušíte (snad) správně, bude mířit svisle dolů. To znamená, že fyzikální těžiště na ní leží (jinak by spadlo ještě trochu níž), a protože to platí i pro ostatní těžnice, musí fyzikální těžiště splývat s geometrickým. Pokud namítáte, že to nebyl pořádný důkaz, tak máte pravdu, ale na ten nám naše skromné geometrické prostředky nestačí. Pokud umíte aspoň malinko zacházet s vektory, můžete se přesvědčit, že hmotný střed trojice stejně těžkých hmotných bodů se také nachází v těžišti jimi určeného trojúhelníka. Naproti tomu trojúhelník z homogenního drátu má obecně hmotný střed jinde (představte si hodně úzký a vysoký trojúhelník, jeho hmotný střed bude jistě výš než ve třetině výšky).

Opsiště

Začneme opět trochou značení. Velikosti úhlů v trojúhelníku ABC značíme standardně $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Přímka kolmá na stranu a procházející jejím středem se nazývá *osa strany.*

Tvrzení 11. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané (to je oficiální název). Značíme jej O a krátce nazýváme opsiště.*

Důkaz. Osa strany BC je množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od B jako od C a osa strany AB je množinou bodů stejně vzdálených od A jako od B, takže jejich průsečík (který vždy existuje, neboť strany trojúhelníka nemohou být rovnoběžné) mající obě vlastnosti leží i na ose strany AC a je středem kružnice opsané. □

A kde máme opsiště hledat?

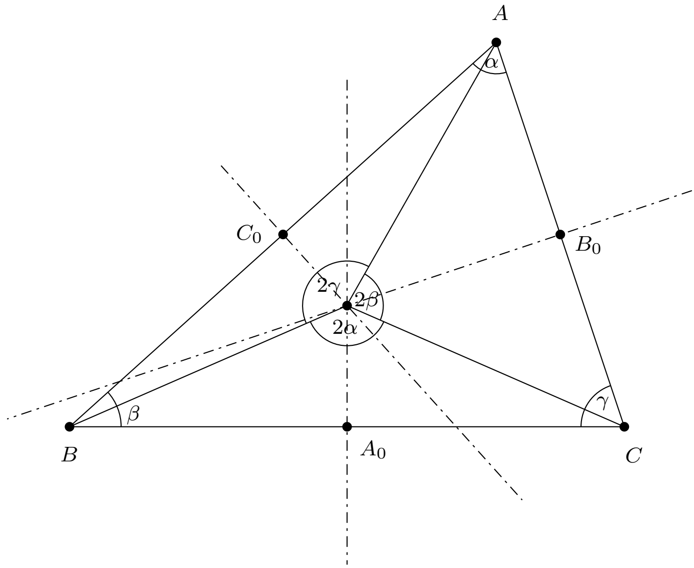
Cvičení 12. Rozmyslete si, že opsiště leží uvnitř trojúhelníka, právě když je ostroúhlý.

[14] Doporučujeme nějaký méně abstraktní a více hmotný, než jaké potkáváme obvykle, zkuste třeba papírový.

Toto jednoduchoučké tvrzení jsme si všichni vyzkoušeli na vlastní kůži[15] při konstrukci kružnice opsané. Opsiště má ale spoustu dalších vlastností – to nejzákladnější si ukážeme hned, na ty zajímavější si budeme muset ještě chvilku počkat.

Tvrzení 13. (O úhlech kolem opsiště) *V ostroúhlém trojúhelníku platí* $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$ *a* $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$.

Důkaz. Plyne z věty o obvodovém a středovém úhlu. □



Věta o obvodovém a středovém úhlu nám dává trochu víc: pomocí α, β a γ umíme snadno vyjádřit každý úhel tvaru $\sphericalangle XPY$, kde P leží na kružnici opsané a X, Y jsou vrcholy trojúhelníka ABC.

Podíváme-li se nyní na trojúhelník BOA_0 s pravým úhlem u vrcholu A_0 a s úhlem $|\sphericalangle BOA_0| = \alpha$, dostáváme snadno následující vztah.[16]

Tvrzení 14. (Sinová věta) *Platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Cvičení 15. V rovině jsou dány body A, B, C, D tak, že platí $|\sphericalangle ACB| = 20°$, $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ABC| = 40°$ a $|\sphericalangle ADC| = 80°$. Určete $|\sphericalangle ABD|$.

Návod. Poznejte opsiště.

---

[15] A vlastní trojúhelník s ryskou.

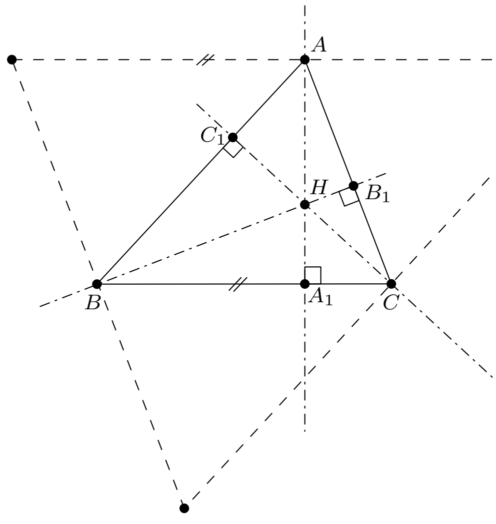
[16] Tímto jsme jej přesně vzato dokázali jen pro ostroúhlé trojúhelníky, ale platí obecně. Zkuste si případ tupoúhlého trojúhelníku sami.

My geometry teacher was sometimes acute and sometimes obtuse, but always, he was right.
– neznámý autor

Kolmiště

Tvrzení 16. *Kolmice na strany trojúhelníka vedené protějšími vrcholy (tzv. výšky) se protínají v jediném bodě, kterému říkáme*[17] *kolmiště. Výšku na stranu BC značíme v_a a podobně pro ostatní strany, kolmiště značíme*[18] *H a paty výšek A_1 atd.*

Důkaz. Vrcholem A veďme rovnoběžku se stranou BC a analogicky pro zbylé dva vrcholy. Tyto tři přímky určují trojúhelník, v němž tvoří strany toho původního střední příčky (střídavé úhly u rovnoběžek generují podobné trojúhelníky se společnými odpovídajícími si stranami, čili shodné trojúhelníky), a tedy výšky v původním trojúhelníku zde tvoří kolmice na strany vedené jejich středy, které se protínají v opsišti.

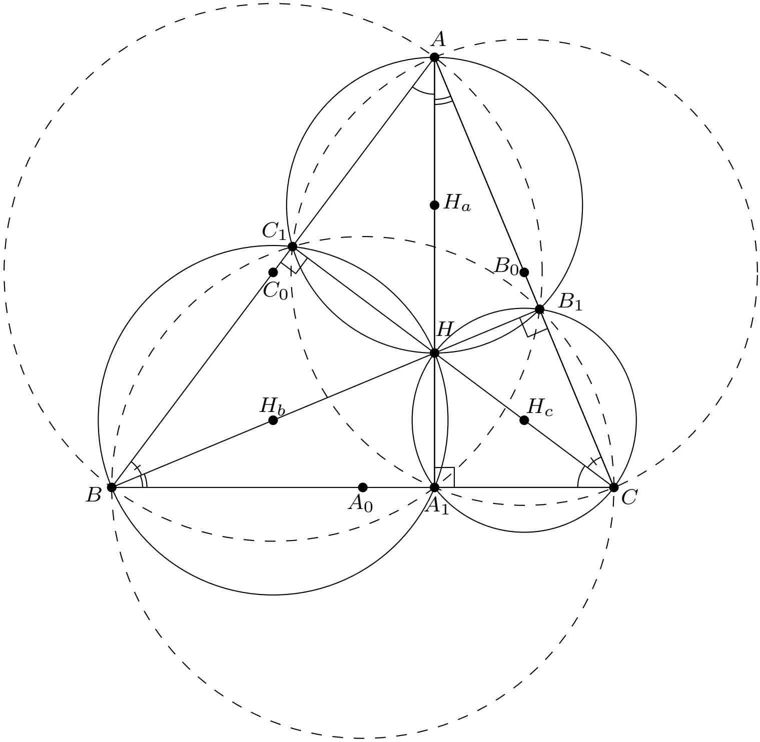


□

Kolmiště je skvělý bod a bude nás provázet až do konce seriálu. Pro začátek vytváří spoustu pravých úhlů, kružnic a jiných snadno dopočitatelných úhlů. Nenechte se odradit spoustou čar a kružnic a pořádně si prohlédněte následující obrázek. Díky množství pravých úhlů můžeme totiž vesele aplikovat Thaletovu větu:

[17] Běžně se nazývá *průsečík výšek* nebo *ortocentrum*

[18] Neptejte se proč, ale je to standardní značení a K už je zabrané, jak uvidíme v příštím dílu.



Tvrzení 17. (Základní vlastnosti výšek a kolmiště v ostroúhlém trojúhelníku) *Na obrázku je velikost jednoproužkovaného úhlu* $90° - \beta$, *dvouproužkovaného* $90° - \gamma$ *a přeškrtnutého* $90° - \alpha$. *Středy čárkovaných kružnic jsou středy příslušných stran, středy plných jsou středy spojnic vrcholů s kolmištěm (body* H_a, H_b *a* H_c*).*

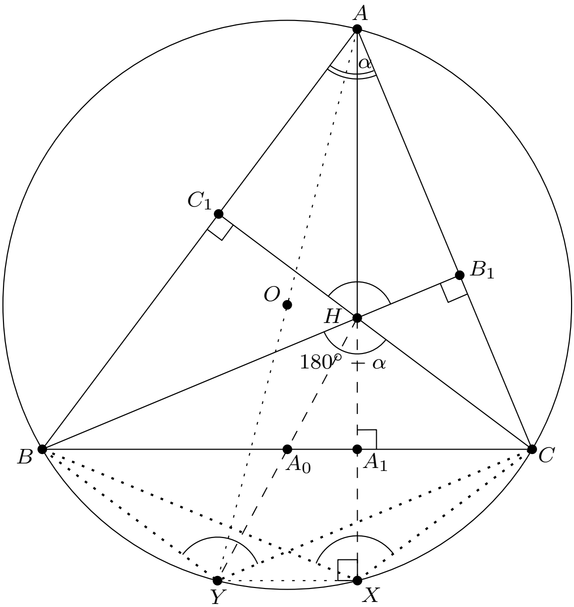
Podobně jako u opsiště si snadno rozmyslíme, že kolmiště leží uvnitř svého trojúhelníku právě tehdy, když tento je ostroúhlý. Platí dokonce něco lepšího. Jaký bod je kolmištěm trojúhelníka ABH? Pohledem na obrázek snadno zjistíme, že je to C. Z analogických tvrzení o zbylých stranách dostáváme, že kolmištěm trojúhelníka s vrcholy ve třech ze čtyř bodů A, B, C a H je čtvrtý z nich. Toto se může hodit, pokud pracujeme s tupoúhlým trojúhelníkem a nelíbí se nám, že je kolmiště venku. Můžeme tak například dostat minulý obrázek i pro tupoúhlý trojúhelník (jedním z vrcholů bude H). Další vlastnost vyjadřující, že body A, B, C a H jsou v jistém smyslu rovnocenné, popisuje následující cvičení.

Cvičení 18. (Stejné kružnice opsané) Kružnice opsaná trojúhelníku HBC je shodná (tedy má stejný poloměr) s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

Návod. Jak velké úhly odpovídají tětivě BC v obou kružnicích?

Tvrzení 19. (Překlápění kolmiště) *Obrazy* H *v osové souměrnosti podle* BC *a* *středové souměrnosti podle A_0 (tj. středu BC) leží na kružnici opsané. Druhý z obrazů navíc tvoří s A průměr kružnice opsané.*

Důkaz. Označme X obraz H podle BC a Y středový obraz H podle A_0. Pak platí $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BHC| = 180° - \alpha$ a body A, X leží v opačných polorovinách určených přímkou BC (pokud je ABC ostroúhlý), nebo $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BHC| = \alpha$ a body A, X leží ve stejné polorovině určené přímkou BC (pokud je ABC tupoúhlý). Dále vidíme, že body X a Y jsou oba vzdáleny od BC stejně jako H, takže XY je rovnoběžná s BC, a tedy komá na výšku AX. Proto je $\triangle AXY$ pravoúhlý a z Thaletovy věty je AY průměr kružnice opsané.



□

Poznámka. Předchozí důkaz ilustruje častou nepříjemnost provázející řešení geometrických úloh dopočítáváním velikostí úhlů (tzv. *úhlením*) a dokazováním, že různé čtveřice bodů tvoří tětivové čtyřúhelníky. Tětivovost daného čtyřúhelníka je totiž vyjádřena dvěma různými rovnostmi úhlů, které odpovídají různým konfiguracím těchto bodů nebo eventuálně jejich pořadím na kružnici. Jednoduše řečeno odpovídají „různým obrázkům“. Existují dvě možnosti, jak se s tím vypořádat. Jednou z nich je důsledné rozebrání všech (typicky dvou) případů – ostroúhlý vs. tupoúhlý trojúhelník v minulém důkazu – a druhou je tzv. *orientované úhlení*, které je méně intuitivní než klasické úhlení, ale umožňuje korektně se vyhnout rozebírání případů. Více se o něm dočtete v naší knihovničce.[19] My zůstaneme u první možnosti.

[19] *http://mks.mff.cuni.cz/library/OrientovaneUhleniMO/OrientovaneUhleniMO.pdf*.

Cvičení 20. Dokažte $|HA| \cdot |HA_1| = |HB| \cdot |HB_1| = |HC| \cdot |HC_1|$.

Návod. Podobné trojúhelníky nebo (poloilegálně – bude v příštím dílu) mocnost.

Cvičení 21. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že $AP \perp BC$.

Návod. Poznejte kolmiště.

Cvičení 22. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s kolmištěm H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček BC a AH. Dokažte $MN \perp B_1C_1$.

Návod. Uvažte kružnice nad průměry AH a BC.

Cvičení 23. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV. (A–60–III–5)

Návod. Vzpomeňte si na překlápění a poznejte střední příčku.

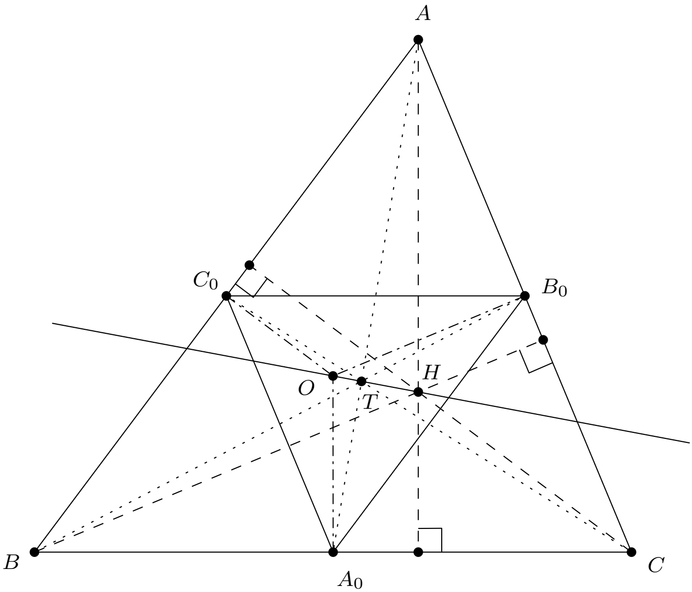
Eulerova přímka

S Eulerovou[20] přímkou se běžně ve škole nepotkáme, takže se konečně dostáváme do neprobádaného terénu.

Tvrzení 24. (O Eulerově přímce) *Opsiště, těžiště a kolmiště leží na jedné přímce (mohou splynout v jeden bod) a platí $|HT| = 2|OT|$. Této přímce se říká Eulerova přímka.*

Důkaz. Použijeme stejný trik jako v důkazu existence kolmiště – osy stran jsou výšky v trojúhelníku ze středních příček, tedy opsiště v ABC je kolmištěm v $A_0B_0C_0$. Tyto dva trojúhelníky jsou stejnolehlé se středem v těžišti a koeficientem -2, takže H se zobrazí na O a navíc T leží na OH tak, že $|HT| = 2|OT|$.

[20]Švýcar Leonhard Euler (1707–1783) byl jedním z největších novověkých matematiků, který svou prací přispěl k vývoji snad všech odvětví matematiky.



Příklad 25. Nechť X je bod na kružnici opsané trojúhelníka ABC. Dokažte, že přímka TX půlí úsečku HX', kde XX' je průměr opsané kružnice.

Řešení. Podívejme se na trojúhelník HXX'. Bod T leží na jeho těžnici HO ve třetině blíž k O (tady používáme Eulerovu přímku), je to tedy těžiště a přímka XT jakožto těžnice jistě půlí stranu HX'.

V následujících cvičeních zkuste vždy najít ten správný trojúhelník, jehož Eulerova přímka (a zejména známé poměry vzdáleností H, T a O na ní) nám dá, co potřebujeme.

Cvičení 26. Označme S střed úsečky BH a X průsečík přímek CS a HA_0. Dále nechť O' je osový obraz O podle BC. Dokažte, že body A, X a O' leží na jedné přímce.

Návod. Co je Eulerova přímka trojúhelníku HBC?

Cvičení 27. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník. Označme H_C a H_D kolmiště trojúhelníků ABC a ABD. Dokažte, že $H_CH_D \parallel CD$. (MO 58–A–I–2)

Návod. Uvažte příslušná těžiště T_C a T_D a dokažte $T_CT_D \parallel CD$. Co nám říkají „Eulerovy poměry“ v $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$?

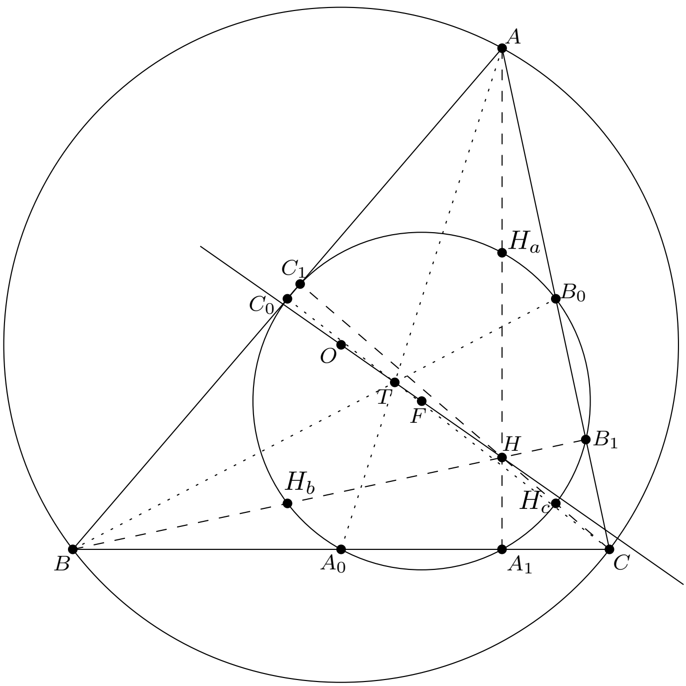
Cvičení 28. Dokažte $|OH| < 3R$, kde R je poloměr kružnice opsané.

Návod. Nejdřív si uvědomte, že jde o zajímavé tvrzení jen pro „hodně tupoúhlý“ trojúhelník. Jelikož T leží vždy uvnitř trojúhelníka, leží i uvnitř opsané kružnice, tedy $|OT| < R$. Použijte Eulerovu přímku.

Feuerbachova kružnice

Vzpomeňme si na tvrzení o překlápění kolmiště podle stran a středů stran. Víme, že příslušných šest obrazů leží na kružnici opsané. Uvažme stejnolehlost se středem v H a koeficientem $1/2$. V ní se kružnice opsaná zobrazí na kružnici procházející středy všech úseček HX, kde za X můžeme dosadit libovolný z výše zmíněných bodů nebo vrcholů trojúhelníka. Jinými slovy prochází všemi středy stran, patami výšek a středy úseček AH, BH a CH. Středy kružnic se ve stejnolehlosti zobrazují na středy, takže dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 29. (O Feuerbachově kružnici) *Středy stran, paty výšek a středy úseček AH, BH a CH leží na kružnici se středem F v polovině úsečky OH. Tuto kružnici nazýváme Feuerbachova*[21] *kružnice nebo také kružnice devíti bodů*[22].



Poznámka. Rádi bychom zdůraznili, že se nám právě povedlo něco pozoruhodného. Jen s pomocí základních vlastností stejnolehlosti a troškou vybudované teorie

[21] Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) byl německý geometr. Proslavil se důkazem věty, o které uslyšíme později.

[22] Hádejte proč.

jsme získali devět (dobrých) bodů ležících na jedné kružnici! V porovnání s tím, jakou dá někdy práci dokázat to o pouhých čtyřech bodech, to bylo skoro zadarmo a do skládačky geometrie trojúhelníka jsme tím doplnili podstatný dílek.

Příklad 30. Dokažte, že F leží na Eulerově přímce a platí $|FO| = |FH| = 3|FT|$.

Řešení. Jak jsme již zmínili, F jakožto obraz kružnice opsané ve stejnolehlosti s koeficientem $1/2$ leží ve středu úsečky OH, což je jistě bod Eulerovy přímky splňující zmíněnou rovnost.

Cvičení 31. Je známo, že až na degenerované případy mají dvě kružnice právě dva středy stejnolehlosti. Najděte druhý střed stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na Feuerbachovu kružnici a znovu ověřte tvrzení z minulého příkladu.

Návod. Je to těžiště.

Cvičení 32. Najděte Feuerbachovu kružnici trojúhelníka BHC.

Návod. Je to Feuerbachova kružnice pro původní $\triangle ABC$. Rozmyslete si, jak se mění role jednotlivých trojic bodů (středy stran, paty výšek, středy spojinic vrcholů s kolmištěm).

Cvičení 33. Ukažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků BHC, CHA a AHB prochází jedním bodem.

Návod. Využijte minulé cvičení.

Cvičení 34. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Tečny k půlkružnici vedené body C, D se protnou v X a úhlopříčky AC, BD v bodě Y. Označme M průsečík EF s AB. Dokažte, že body E, C, M, D leží na jedné kružnici.

Návod. Dokreslete průsečík AD s BC a ve vzniklém trojúhelníku najděte Feuerbachovu kružnici.

Cvičení 35. Rozmyslete si, že A_0, B_0 a středy AH a CH jsou vrcholy obdélníka.

Návod. Tvrzení o překlápění říká, že A a obraz H přes A_0 tvoří průměr opsané. Co to znamená na Feuerbachově kružnici?

Vepsiště a připsiště

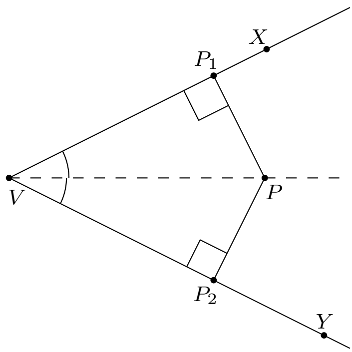
Už víme, že pro osy stran, pro těžnice i pro výšky platí, že se protínají v jednom bodě. Další rozumnou množinou přímek jsou osy (vnitřních) úhlů. Pro důkaz, že se skutečně protínají v jednom bodě, potřebujeme následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení 36. *Mějme bod P nacházející se uvnitř konvexního úhlu XVY. Potom P leží na ose vnitřního úhlu XVY právě tehdy, když je vzdálenost P od polopřímek VX a VY stejná.*

Důkaz. Paty kolmic z P na VX a VY nazvěme P_1 a P_2.

Pokud je P na ose úhlu XVY, potom platí $|\sphericalangle PVP_1| = |\sphericalangle PVP_2|$. Proto můžeme použít větu *usu*, z níž dostaneme shodnost trojúhelníků PVP_1 a PVP_2. Z ní plyne $|PP_1| = |PP_2|$, takže vzdálenost P od VX a VY je stejná.

Pokud naopak víme, že je vzdálenost P od VX a VY stejná, pak $|PP_1| = |PP_2|$. Proto jsou z věty *Ssu* trojúhelníky PVP_1 a PVP_2 opět podobné. Dostáváme $|\sphericalangle PVP_1| = |\sphericalangle PVP_2|$, neboli P leží na ose úhlu XVY.

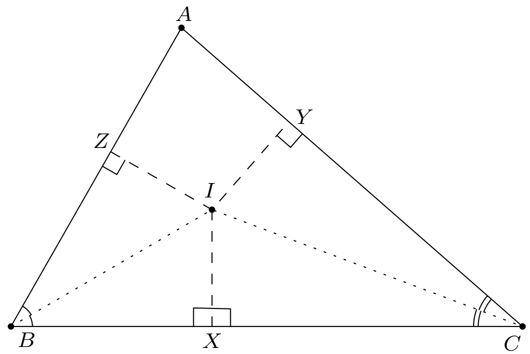


□

Nyní už jsme schopni dokázat, že se osy vnitřních úhlů protínají v jednom bodě.

Tvrzení 37. *V trojúhelníku ABC se osy vnitřních úhlů CAB, ABC a BCA protínají v jednom bodě.*

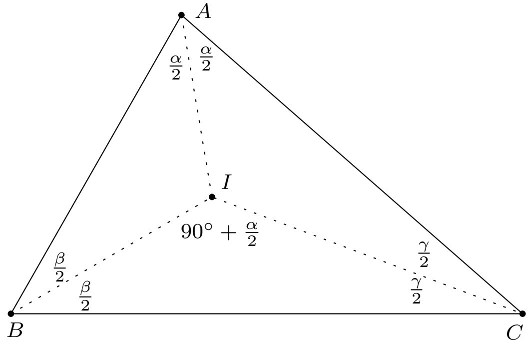
Důkaz. Nechť se osy vnitřních úhlů ABC a BCA protínají v bodě I. Nechť jsou X, Y a Z postupně paty kolmic z I na strany BC, CA a AB. Jelikož I leží na ose úhlu ABC, je díky předchozímu tvrzení $|IZ| = |IX|$. Protože I leží i na ose úhlu BCA, platí i $|IX| = |IY|$. Proto $|IZ| = |IY|$, z čehož ale díky předchozímu tvrzení plyne, že I leží na ose úhlu BAC. Z toho důvodu se osy všech vnitřních úhlů protínají v I.



□

Průsečík os vnitřních úhlů budeme v našem seriálu označovat jako *vepsiště* a obvykle pro něj budeme používat písmenko I (z anglického *incenter*).

Stejně jako u ostatních středů, i zde se vyplatí pamatovat si úhly mezi vrcholy a příslušným středem. Úhly typu „vrchol–vrchol–vepsiště“ jsou jednoduché – přímo z definice plyne $|\sphericalangle CAI| = \alpha/2 = |\sphericalangle IAB|$ atp. Co se týče úhlů typu „vrchol–vepsiště–vrchol“, jednoduše aplikujme rovnost $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90°$. Díky tomu, že se úhly v trojúhelníku sečtou na 180 stupňů, dostáváme $|\sphericalangle CIB| = 90° + \alpha/2$ atp.



Angle bisector theorem

Osy úhlů mají jednu zajímavou vlastnost, která s vepsištěm přímo nesouvisí. Jedná se o poměr, ve kterém osa protíná příslušnou stranu. Zatímco u těžnic a os stran je tento poměr nezajímavý (jedna) a u výšek ošklivý (tj. nějaký fujky zlomek s kosiny), u os úhlu dává velmi pěkný výsledek.

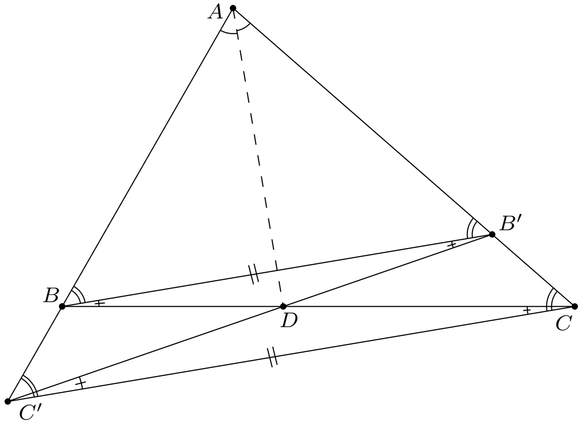
Tvrzení 38.[23] *V trojúhelníku ABC nazvěme jako D patu*[24] *osy vnitřního úhlu u A. Potom*

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}.$$

Důkaz. (Syntetický) Nechť B' a C' jsou obrazy B a C v osové souměrnosti podle AD. Potom B' a C' leží postupně na přímkách AC a AB. Protože $|AB| = |AB'|$ a $|AC| = |AC'|$, jsou BAB' a CAC' rovnoramenné trojúhelníky se stejným úhlem naproti základně. Proto jsou podobné, takže $\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}$. Dále $|DB| = |DB'|$ a $|DC| = |DC'|$, takže analogicky jsou i trojúhelníky BDB' a CDC' podobné. Proto $\frac{|BB'|}{|CC'|} = \frac{|BD|}{|DC|}$. Z toho již plyne $\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$, což jsme chtěli.

[23]Tomuto tvrzení se někdy (obzvláště v anglické literatuře) říká *Inner angle bisector theorem.*

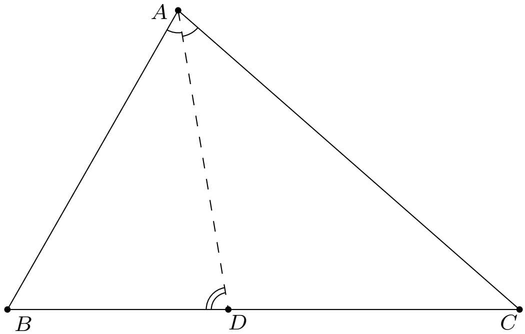
[24]Slovo *pata* budeme používat dosti liberálně, tj. jako průsečík libovolné přímky z vrcholu trojúhelníka s protější stranou. V matematické olympiádě a ve škole ovšem toto označení spíše nepotkáte, a proto ho používejte s opatrností.



Důkaz. (Sinthétický) Označme velikost úhlu BDA jako ϑ. Aplikací sinové věty na trojúhelníky BDA a ADC dostaneme

$$\frac{|BD|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|BA|}{\sin\vartheta} \quad \text{a} \quad \frac{|DC|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AC|}{\sin\left(180^\circ - \vartheta\right)}.$$

Protože $\sin\vartheta = \sin(180^\circ - \vartheta)$, dostáváme po podělení předchozích dvou rovností přesně $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$, což jsme chtěli.[25]



□

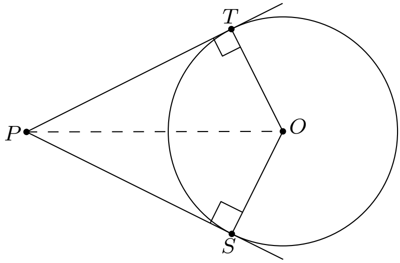
Kružnice vepsaná

Nechť X, Y a Z jsou opět paty kolmic z I postupně na BC, CA a AB. Protože $|IX| = |IY| = |IZ|$, je I opsištěm trojúhelníka XYZ. Protože u X, Y i Z jsou pravé úhly, jsou BC, CA a AB tečny k této kružnici. Proto se kružnice opsaná $\triangle XYZ$ dotýká všech stran původního trojúhelníka. Této kružnici říkáme *kružnice*

[25]Pokud zatím nevíte, jak se počítá sinus tupého úhlu, vůbec se tímto důkazem netrapte.

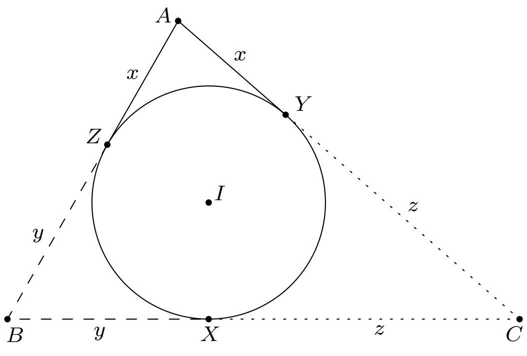
vepsaná[26] a její poloměr obvykle značíme r.[27] Pro další práci s ní budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 39.[28] *Nechť ω je kružnice se středem O a P bod mimo ni. Dotyky tečen z P k ω označme jako S a T. Potom $|PS| = |PT|$.*



Důkaz. Trojúhelníky PSO a PTO jsou shodné z věty *Ssu*, z čehož tvrzení hned plyne. □

Z tohoto tvrzeníčka vyplývá, že $|AY| = |AZ|$, $|BZ| = |BX|$ a $|CX| = |CY|$. Označme si tyto hodnoty postupně jako x, y a z. Potom dostáváme sérii rovností $y + z = a$, $z + x = b$ a $x + y = c$. Z nich lze dostat vztahy $(-a + b + c)/2 = x$, $(a-b+c)/2 = y$ a $(a+b-c)/2 = z$. To znamená, že umíme vyjádřit délku z vrcholů k bodům dotyku!



Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, budeme ve zbytku seriálu používat značení

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{a} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Poslední z těchto hodnot nazýváme *poloobvod*.

[26] Jejím středem je zjevně I. Proto se vepsišti „oficiálně“ říká *střed kružnice vepsané*.

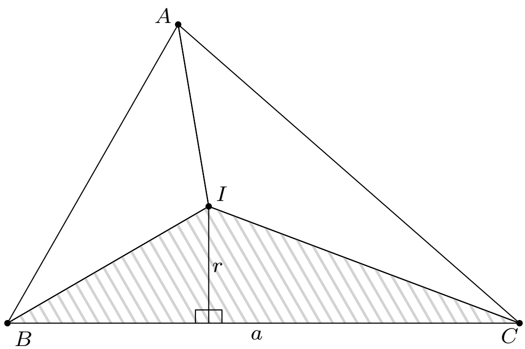
[27] V českém prostředí se často používá r pro poloměr kružnice opsané, což vede k používání ρ v případě vepsané. Ve světě je ovšem obvyklé značit je tak, jak to děláme my.

[28] Tomuto lemmátku se obvykle přezdívá *Equal tangents*.

Jeden ze způsobů, jak interpretovat I, je „bod, který je nad všemi stranami stejně vysoko“. Z toho plyne následující tvrzení.

Tvrzení 40. *Obsah trojúhelníku ABC je roven rs.*

Důkaz. Trojúhelník ABC můžeme rozřezat na trojúhelníky BIC, CIA a AIB. Trojúhelník BIC má stranu o velikosti a a výšku na ni rovnou r. Proto je obsah $\triangle BIC$ roven $r \cdot \frac{a}{2}$. Sečtením analogických hodnot pro zbylé dva trojúhelníky dostaneme, že obsah $\triangle ABC$ je roven $r \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = rs$, což jsme chtěli ukázat.



□

Cvičení 41. Buď ABC trojúhelník s pravým úhlem u A. Ukažte, že

$$r = \frac{b + c - a}{2}.$$

Návod. Buď si všimněte, že $AYIZ$ je čtverec, a proto $r = x$, nebo vypočítejte obsah trojúhelníka dvěma způsoby a upravte pomocí Pythagorovy věty.

Cvičení 42. Buď $ABCD$ rovnoběžník, ve kterém platí $|AB| > |BC|$. Nechť K a M jsou body dotyků kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC a ADC se stranou AC. Podobně nechť jsou L a N body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD se stranou BD. Ukažte, že $KLMN$ je obdélník.

Návod. Ukažte, že průsečík AC a BD má ke K, L, M i N stejnou vzdálenost.

Cvičení 43. Trojúhelník s výškami o velikostech h_1, h_2 a h_3 má obvod p. Ukažte, že trojúhelník se stranami $1/h_1$, $1/h_2$, $1/h_3$ má poloměr kružnice vepsané roven $1/p$.
(MKS 35–4–6)

Návod. Uvědomte si, že nový trojúhelník je podobný novému s koeficientem $\frac{1}{2S}$, kde S je obsah původního trojúhelníka. Použijte vzorec pro obsah.

Připsiště

Můžeme se zabývat otázkou, co se stane, pokud místo os vnitřních úhlů uvažujeme osy vnějších úhlů. Bohužel se tyto tři osy neprotínají v jednom bodě. Ovšem určitá verze tohoto tvrzení stále platí.

Věta 44. *V trojúhelníku ABC se osy vnějších úhlů CBA a BCA protínají na ose vnitřního úhlu BAC.*

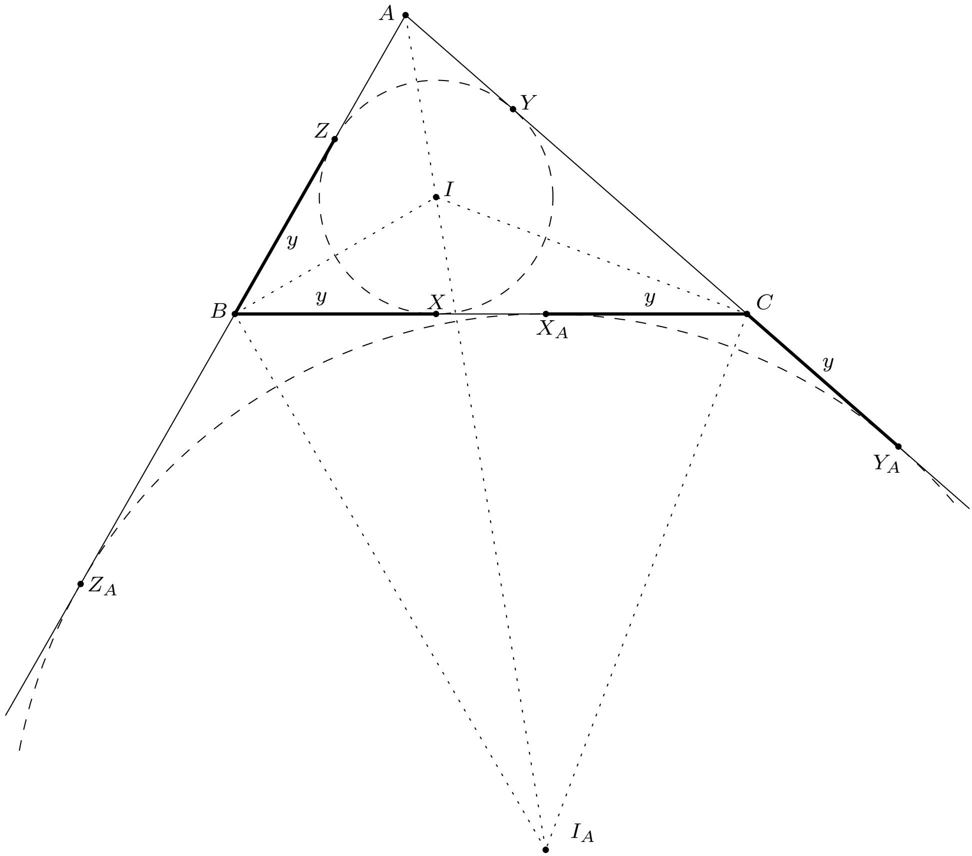
Důkaz. Nechť se osy vnějších úhlů CBA a ACB protínají v bodě I_A. Nechť jsou X_A, Y_A a Z_A postupně paty kolmic z I_A na přímky BC, CA a AB. Protože I_A je na ose úhlu CBZ_A, platí $|I_AZ_A| = |I_AX_A|$. Protože I_A leží i na ose úhlu X_ACB, platí i $|I_AX_A| = |I_AY_A|$. Proto $|I_AZ_A| = |I_AY_A|$, z čehož ale plyne, že I_A skutečně leží na vnitřní ose úhlu BAC. $\square$

Tento průsečík budeme v tomto seriálu označovat jako *připsiště příslušející vrcholu A* a obvykle pro něj budeme používat symbol I_A. Analogické body samozřejmě existují i pro zbylé vrcholy.

Cvičení 45. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme D, E a F postupně paty os úhlů z A, B a C. Dokažte, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Návod. Co jsou připsiště $\triangle ABD$ a $\triangle ACD$?

Obecná pomůcka pro práci s připsištěm zní „pokud něco platí pro vepsiště, dost možná to v nějaké formě platí i pro připsiště“. Porovnáním důkazů existence vepsiště a připsiště vidíme, že většina úvah funguje dosti analogicky. Následuje série tvrzení o připsištích, která jsme v případě vepsiště už potkali. Všechny důkazy jsou podobné důkazům pro vepsiště, a proto je přenecháváme čtenáři jako domácí cvičení.



Tvrzení 46.[29] *Nazvěme jako D patu osy vnějšího úhlu u A. Pak platí $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$.*

Tvrzení 47. *Kružnice opsaná trojúhelníku $X_AY_AZ_A$ má střed v I_A a přímky AC, CB a BA se jí dotýkají. Této kružnici říkáme kružnice připsaná příslušející bodu A a její poloměr značíme r_a.*

Tvrzení 48. *Platí $|BZ_A| = |BX_A| = z$, $|CX_A| = |CY_A| = y$ a $|AY_A| = |AZ_A| = s$. Z toho také plyne, že střed XX_A splývá se středem BC.*

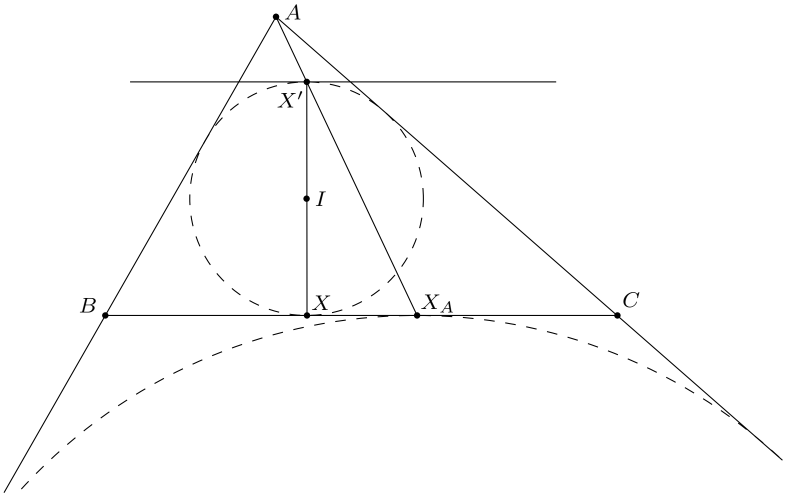
Tvrzení 49. *Obsah trojúhelníku ABC je roven $r_a x$.*

Můžeme vidět, že kružnice připsaná je vlastně jen „nafouklá“ kružnice vepsaná. Toho využívá následující lemma.

Lemma 50. *Nechť X a X_A jsou body dotyku kružnice vepsané a kružnice A-připsané se stranou BC. Nechť přímka XI podruhé protíná kružnici vepsanou v bodě X'. Potom A, X' a X_A leží na jedné přímce.*

[29] Tomuto tvrzení se občas říká *Outer angle bisector theorem.*

Důkaz. Protože se obě kružnice dotýkají polopřímek AB a AC, existuje stejnolehlost se středem v A, která převede připsanou na vepsanou. Bod X_A se v tu chvíli přenese na průsečík kružnice vepsané s obrazem strany BC. A co je obrazem BC? Inu, protože je BC tečna ke kružnici připsané, jejím obrazem je tečna ke kružnici vepsané. Navíc tato tečna musí být s BC rovnoběžná, což nám nechává jen dvě možnosti – tečnu vedenou bodem X a tečnu vedenou bodem naproti X, tedy X'. Proto je obrazem X_A buď X, nebo X'. Protože ovšem X_AX neprochází A, musí hledaným obrazem být X', takže A, X' a X_A skutečně leží na jedné přímce.

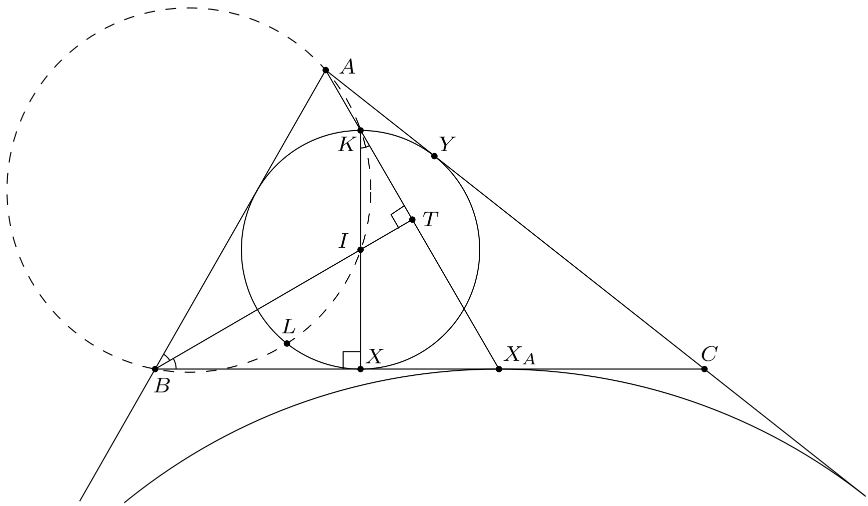


Příklad 51. Trojúhelník ABC splňující $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$ má vepsiště I. Jeho kružnice vepsaná se dotýká stran BC a CA v bodech X a Y. Nechť K a L jsou obrazy X a Y ve středové souměrnosti se středem v I. Ukažte, že A, B, K a L leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 2005)

Řešení. Podmínka $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$ se dá přepsat jako $|AB| = z$. Nechť X_A je bod dotyku kružnice A-připsané se stranou BC. Potom $|BX_A| = z$, takže ABX_A je rovnoramenný trojúhelník. Protože BI je osou úhlu v tomto trojúhelníku, je BI kolmá na AX_A. Nazvěme průsečík těchto dvou přímek jako T.

Díky výše uvedenému lemmatu leží A, K a X_A na jedné přímce. Tudíž $|\sphericalangle KTB| = 90° = |\sphericalangle KXB|$, takže $KTXB$ je tětivový čtyřúhelník. Proto $|\sphericalangle XKT| = |\sphericalangle XBT| = |\sphericalangle XBI| = |\sphericalangle ABI|$. Ale $|\sphericalangle IKA| = 180° - |\sphericalangle XKT| = 180° - |\sphericalangle ABI|$, takže K leží na kružnici opsané AIB. Analogicky dostaneme, že i L leží na té samé kružnici,[30] z čehož už plyne požadované tvrzení.

[30] Všimněte si, že je k tomu potřeba provést znovu úplně celý postup včetně definování nového bodu T.



Cvičení 52. Ukažte, že střed úsečky AX leží na přímce s I a A_0.

Návod. Co se stane, když tyto body posunete do dvojnásobné vzdálenosti od X?

Cvičení 53. Buď Ω kružnice a ℓ tečna k Ω. Nechť bod M leží na ℓ. Najděte množinu všech bodů P, pro něž lze na ℓ najít body Q a R tak, aby byl M střed QR a Ω kružnice vepsaná $\triangle PQR$. (IMO 1992)

Návod. Nechť X je bod dotyku ℓ a Ω. Uvažte bod Y, který je obrazem X ve středové souměrnosti podle M, a bod Z, který leží naproti X v Ω. Jak spolu souvisí P, Y a Z?

Cvičení 54. (těžší) V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky IS a CT jsou rovnoběžné. (MO 62–A–III)

Návod. Využijte výše zmíněného lemmatu pro trojúhelník ABD. Pak dopočítejte poměry.

Závěrem

You can't criticize geometry. It is never wrong. – Paul Rand

Tímto první díl seriálu končí. Doufáme, že vám úvod do říše trojúhelníků líbil a že se k nám příště opět připojíte.[31]

Pokud jste nepochopili všechno, nezoufejte. Nebojte se na cokoliv zeptat, ať už e-mailem nebo na PraSečím chatu. A určitě nepotřebujete vyřešit všechna cvičení, ba

[31] Pokud se vám nelíbil, tak sorry. Napište nám, co se vám nelíbilo, a my to možná příště nebudeme dělat.

ani pochopit celý seriál, na to, abyste byli schopni zvládnout alespoň některé z úloh. Proto se jich nebojte a každopádně je vyzkoušejte. Při jejich řešení pamatujte na to, že v seriálových sériích úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

V příštím díle se můžete těšit na Simsonovu přímku, Švrčkův bod, kamarádství v trojúhelníku a mnoho[32] dalšího.

Geometrii zdar!

[32]Nebo alespoň trochu.

Geometrie trojúhelníka II – Konstrukce pokračuje

Geometry is just plane fun. – neznámý autor

Vítáme vás u druhého dílu seriálu. I tentokrát vám předvedeme několik triků, které se mohou hodit při řešení úloh kteréhokoliv kola matematické olympiády nebo významného matematického semináře. A protože toho máme na programu hodně, nebudeme se zdržovat dlouhým úvodem a rovnou se pustíme do práce!

Rychloúvod do mocnosti

V minulém díle jsme si na začátku stručně popovídali o stejnolehlosti, abychom ji poté mohli využívat. Nyní uděláme něco podobného, tentokrát si ovšem představíme mocnost. Stejně jako posledně, ani tentokrát nebudeme uvedená fakta dokazovat.

Pro kružnici k se středem O a poloměrem R budeme *mocností* bodu X ke kružnici k myslet číslo $p(X,k) = |XO|^2 - R^2$.

Povšimněme si, že mocnost bodu je kladná pro X vně k, nulová pro X ležící na k a záporná[1] pro X ležící uvnitř k.

Tvrzení 1. *Nechť přímka ℓ vedená bodem X protne k v bodech P a Q. Potom $p(X,k) = |XP| \cdot |XQ|$ pro X ležící vně k a $p(X,k) = -|XP| \cdot |XQ|$ pro X ležící uvnitř k.*

Speciálně pokud X leží vně k a T je bod dotyku tečny z X ke k, pak $p(X,k) = |XT|^2$.

Nejdůležitějším důsledkem mocnosti je následující věta.

Tvrzení 2. *Pokud $ABCD$ je čtyřúhelník, X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AC a BD, pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$, a to nastane právě tehdy, když $|YA| \cdot |YC| = |YB| \cdot |YD|$.*

Podobně pro trojúhelník ABC a bod X ležící na přímce AB mimo úsečku AB platí, že XC je tečnou k $\triangle ABC$ právě tehdy, když $|XA| \cdot |XB| = |XC|^2$.

[1] Občas se ovšem v matematické literatuře mocnost definuje jako absolutní hodnota příslušného rozdílu, a pak samozřejmě záporná být nemůže.

Je přirozené ptát se, kdy má daný bod ke dvěma různým kružnicím stejnou mocnost. Odpověď na tuto otázku je druhým nejdůležitějším faktem o mocnosti:

Tvrzení 3. *Pokud ω_1 a ω_2 jsou kružnice s různými středy O_1 a O_2, potom existuje přímka ℓ kolmá na O_1O_2 taková, že pro libovolný bod X platí $p(X, O_1) = p(X, O_2)$ tehdy a jen tehdy když X leží na ℓ. Této přímce říkáme chordála kružnic ω_1 a ω_2.*

Speciálně pro kružnice protínající se ve dvou bodech je chordálou spojnice těchto bodů. Pokud se dvě kružnice dotýkají, potom chordálu představuje společná tečna v bodě dotyku.

Nakonec ještě uveďme tvrzení, které dostaneme využitím poslední věty pro trojici kružnic.

Tvrzení 4. *Nechť ω_1, ω_2 a ω_3 jsou kružnice. Potom pokud ke každé dvojici kružnic sestrojíme jejich chordálu, jsou tyto buď rovnoběžné, nebo se protínají v jednom bodě. V druhém případě tento bod nazýváme potenčním středem kružnic ω_1, ω_2 a ω_3.*

Švrčkův bod

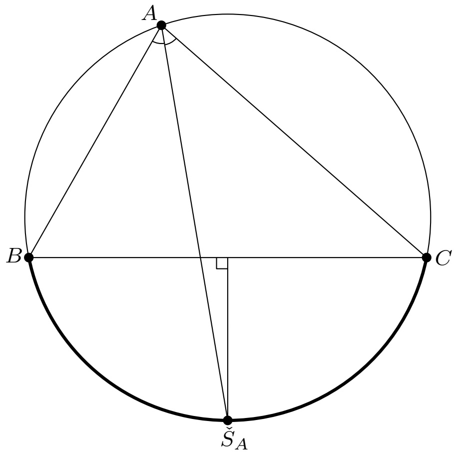
Geometry keeps you in shape. – neznámý autor

V tomto oddíle se budeme věnovat bodu, kterému se v česko-slovenském olympiádním prostředí často říká „Švrčkův“ na počest matematika, geometra a organizátora matematických olympiád Jaroslava Švrčka. Poznamenejme ovšem, že toto označení není žádným způsobem oficiální a v matematických olympiádách (které občas opravuje i sám pan Švrček) doporučujeme ho příliš nepoužívat.

Na příkladě Švrčkova bodu si předvedeme zajímavý geometrický princip. Představte si, že se snažíte dokázat to, že se tři objekty protínají v jediném bodě. Obvyklý postup je nějak si označit průsečík dvou z nich a pak se snažit ukázat, že leží i na tom třetím. Náš princip by se dal shrnout slovy „na pořadí záleží“ – když zvolíte nevhodný průsečík, budete mít mnohem víc práce.

Tvrzení 5. *V trojúhelníku ABC mají osa strany BC, vnitřní osa úhlu CAB a kružnice opsaná společný bod. Tento bod neoficiálně nazýváme Švrčkův bod příslušející vrcholu A a značíme jej $\check{S}_A$.*

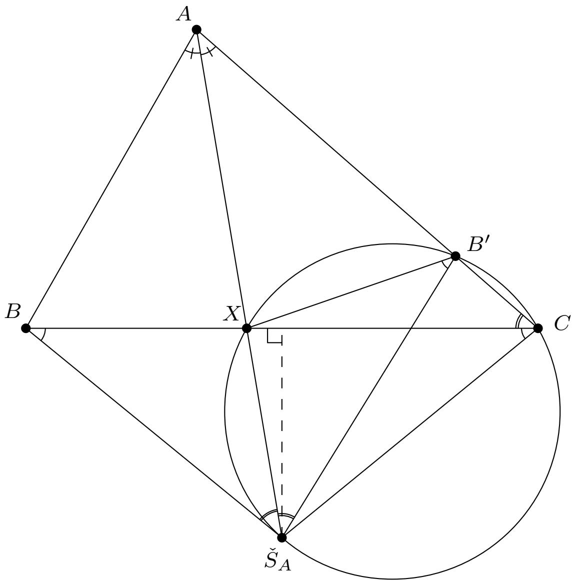
Důkaz. (první) Nazvěme kružnici opsanou $\triangle ABC$ jako Ω. Nechť osa úsečky BC protíná Ω v bodě $\check{S}_A$. (Takové průsečíky jsou dva; vybereme ten, který leží na opačné straně od přímky BC než bod A.) Potom mají oblouky $B\check{S}_A$ a $\check{S}_AC$ stejnou délku, a proto jim přísluší stejný obvodový úhel. Proto $|\sphericalangle BA\check{S}_A| = |\sphericalangle \check{S}_AAC|$, takže $\check{S}_A$ skutečně leží na ose vnitřního úhlu BAC. Lehké, žeano? $\square$



Důkaz. (druhý) Tentokrát $\check{S}_A$ definujme jako průsečík Ω a vnitřní osy úhlu BAC (různý od A). Potom obloukům $B\check{S}_A$ a $\check{S}_AC$ přísluší obvodový úhel stejné velikosti, takže musejí být stejně dlouhé. Proto je i $|B\check{S}_A| = |\check{S}_AC|$, takže $\check{S}_A$ leží na ose strany BC a jsme opět hotovi. Tento důkaz je prakticky stejný jako ten předchozí, jen obrácený a je pořád stejně těžký. □

Důkaz. (třetí) Co se stane, když $\check{S}_A$ definujeme jako průsečík osy BC a vnitřní osy $\sphericalangle BAC$? Tak zaprvé, pro $|BA| = |AC|$ tato definice nedává žádný smysl, protože v tu chvíli tyto dvě přímky splývají. Ale dobře, v tomto speciální případě je zjevné, že tvrzení platí. Takže předpokládejme, že $|BA| \neq |AC|$. Co teď? Situace je oproti předchozím dvěma o dost těžší, protože tu není žádný zjevný způsob, jak přenášet úhly. Řešení stále existuje, ale je poněkud trikové. BÚNO předpokládejme, že $|BA| < |AC|$. Nechť B' je obraz B podle $A\check{S}_A$.[2] Protože $A\check{S}_A$ je osa úhlu, leží B' na straně AC. Nechť X je průsečík $A\check{S}_A$ s BC. Potom platí $|\sphericalangle XB'\check{S}_A| = |\sphericalangle XB\check{S}_A| = |\sphericalangle XC\check{S}_A|$, takže $X\check{S}_ACB'$ je tětivový čtyřúhelník. Potom ale $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle B'CX| = |\sphericalangle B'\check{S}_AX| = |\sphericalangle X\check{S}_AB| = |\sphericalangle A\check{S}_AB|$, z čehož už plyne, že $\check{S}_A$ leží na Ω.

[2] Mluvíme-li o *obrazu podle přímky*, myslíme tím samozřejmě obraz v osové souměrnosti. Podobně *obraz podle bodu* vždy znamená obraz v souměrnosti středové, pokud není přímo zmíněno, že se jedná o stejnolehlost s jiným koeficientem.



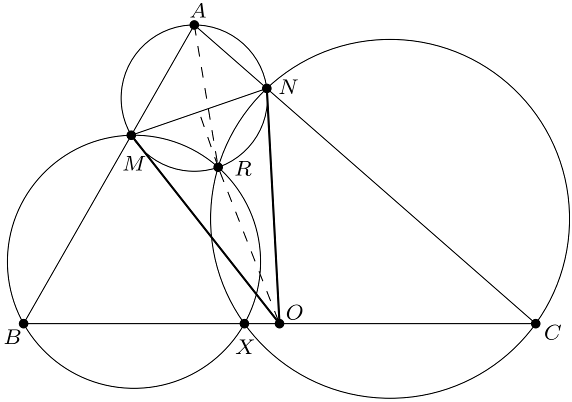
□

Nyní pomocí této vlastnosti Švrčkova bodu vyřešíme příklad z mezinárodní olympiády.

Příklad 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, ve kterém $|AB| \neq |AC|$. Kružnice nad průměrem BC protíná strany AB a AC postupně v bodech M a N. Označme jako O střed strany BC. Vnitřní osy úhlů BAC a MON se protínají v R. Dokažte, že se kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR podruhé protínají na straně BC.

(IMO 2004)

Řešení. Protože O je střed BC, platí $|OM| = |ON|$. Proto v trojúhelníku MON splývá osa úhlu s osou strany, a proto je R vlastně průsečík vnitřní osy úhlu MAN a osy strany MN. To znamená, že R je Švrčkův bod tohoto trojúhelníku, takže $ANRM$ je tětivový čtyřúhelník. Nazvěme jako X druhý průsečík kružnic opsaných $\triangle BMR$ a $\triangle CNR$. Potom z doplňkových úhlů v tětivových čtyřúhelnících platí $|\sphericalangle BXR| = 180° - |\sphericalangle RMB| = |\sphericalangle AMR| = 180° - |\sphericalangle RNA| = |\sphericalangle CNR| = 180° - |\sphericalangle RXC|$, z čehož ovšem plyne, že X leží na BC, což jsme chtěli dokázat.



Cvičení 7. Nechť AL a BK jsou vnitřní osy úhlů v různostranném trojúhelníku ABC (kde L leží na straně BC a K na straně AC). Osa úsečky BK protíná přímku AL v M. Bod N je zvolen na přímce BK tak, že $LN \parallel MK$. Ukažte, že $|LN| = |NA|$.

(Junior Balkan 2010)

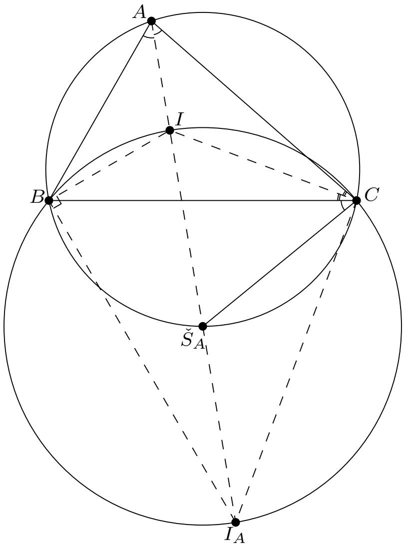
Návod. Uvědomte si, že M je Švrčkův bod v $\triangle ABK$. Pak úhlete.

Proč je Švrček nejlepší

Nyní si dokážeme dost možná nejdůležitější tvrzení o Švrčkově bodu. Připomeňme, že písmenem I označujeme vepsiště a symbolem I_A zase A-připsiště.

Tvrzení 8. *V trojúhelníku ABC je $BICI_A$ tětivový čtyřúhelník a příslušná kružnice má střed v $\check{S}_A$.*

Důkaz. Protože vnitřní a vnější osy úhlu jsou na sebe kolmé, platí $|\sphericalangle I_ABI| = 90^\circ = |\sphericalangle ICI_A|$, takže $BICI_A$ je skutečně tětivový čtyřúhelník. Stačí tedy dokázat, že $\check{S}_A$ je jeho střed.



Platí $|\sphericalangle \check{S}_A CI| = |\sphericalangle \check{S}_A CB| + |\sphericalangle BCI| = |\sphericalangle \check{S}_A AB| + |\sphericalangle BCI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Vzpomeňme si ovšem na vztah $|\sphericalangle AIC| = 90° + \frac{\beta}{2}$, z něhož plyne $|\sphericalangle \check{S}_A IC| = 90° - \frac{\beta}{2}$. Z toho dostáváme, že $I\check{S}_A C$ je rovnoramenný trojúhelník, takže $|I\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$. Protože navíc $|B\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$, je $\check{S}_A$ opsištěm $\triangle BIC$, a tím jsme hotovi. $\square$

Důsledek. *Protože kružnice opsaná $BICI_A$ je kružnicí nad průměrem $I_A I$, je $\check{S}_A$ střed úsečky II_A.*

S touto jednoduchou znalostí najednou bez potíží vyřešíme pár dalších IMO problémů.

Příklad 9. Buď ABC trojúhelník s vepsištěm I. Bod P uvnitř tohoto trojúhelníku splňuje vztah

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Ukažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $P = I$.

(IMO 2006)

Řešení. Zaprvé si všimněme, že pro $P = I$ tvrzení zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $P \neq I$, a dokažme, že $|AP| > |AI|$. Zadruhé se zbavme oné zvláštní podmínky a uvědomme si, co vlastně říká. Protože platí

$$\begin{aligned}(|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA|) + (|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|) &= \\ = (|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PBC|) + (|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle PCB|) &= \\ = \beta + \gamma = 180° - \alpha,&\end{aligned}$$

získáváme ze zadané podmínky, že $|\sphericalangle BPC| = 180° - |\sphericalangle PBC| - |\sphericalangle PCB| = 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° + \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle BIC|$. Z toho plyne, že P leží na kružnici opsané $\triangle BIC$, jejíž střed je $\check{S}_A$. Protože I leží na $A\check{S}_A$, platí z trojúhelníkové nerovnosti

$$|AP| + |P\check{S}_A| > |A\check{S}_A| = |AI| + |I\check{S}_A|.$$

Protože ovšem $|P\check{S}_A| = |I\check{S}_A|$, jsme hotovi.

Cvičení 10. Buď BC průměr kružnice ω se středem v O. Nechť A je bod na ω takový, že $|\sphericalangle AOB| < 120°$. Buď D střed toho oblouku AB, který neobsahuje C. Dále přímka vedená skrze O rovnoběžná s DA protíná AC v I a osa úsečky OA protíná ω v bodech E a F. Dokažte, že I je vepsiště $\triangle CEF$. (IMO 2002)

Návod. Nejprv si uvědomte, že A je Švrčkův bod v $\triangle ECF$. Potom už stačí je ukázat, že $|AE| = |AI|$. Ukažte, že jsou obě tyto délky rovny poloměru ω.

Cvičení 11. (Japanese theorem) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že vepsiště trojúhelníků ABC, BCD, CDA a DAB tvoří obdélník.

Návod. Interpretujte jednotlivá vepsiště jako průsečíky dvojic kružnic ze sousedních Švrčkových bodů. Potom doúhlete.

Antišvrk

Podobně jako vepsiště a připsiště má i Švrčkův bod své „alter ego“, které vznikne tím, že místo vnitřní osy úhlu vezmeme tu vnější.

Tvrzení 12. *V trojúhelníku ABC mají osa strany BC, vnější osa úhlu BAC a kružnice opsaná společný bod (který budeme značit jako $\check{N}_A$). Tento bod neoficiálně (ještě neoficiálněji než „Švrčkův bod“) nazýváme antišvrk příslušející bodu A.*

Toto tvrzení nebudeme dokazovat a přenecháváme ho jako cvičení. Důkaz je analogický důkazu existence Švrčkova bodu.

Povšimněme si, že $\check{N}_A\check{S}_A$ je průměr kružnice opsané $\triangle ABC$. To plyne jednoduše z toho, že jejich spojnice je osa strany BC, která ovšem prochází opsištěm. Takovým bodům se v geometrii říká „antipodální“ a odtud taktéž prochází název antišvrk. Poznamenejme také, že jak $\check{S}_A$, tak $\check{N}_A$ jsou středy jednoho z oblouků BC – Švrčkův bod je střed toho oblouku, který neobsahuje A, zatímco antišvrk toho, který A obsahuje.

Podobně jako u Švrčkova bodu platí pro antišvrk následující tvrzení, jehož důkaz opět přenecháváme jako cvičení.

Tvrzení 13. *Pro zadaný trojúhelník ABC je I_CBCI_B tětivový čtyřúhelník se středem v $\check{N}_A$.*

Důsledek. *Bod $\check{N}_A$ je středem úsečky I_BI_C.*

Cvičení 14. (těžké) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že připsiště $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ a $\triangle DAB$ (všech 12 bodů) leží na obvodu jednoho obdélníka. (Rumunské TST 1996)

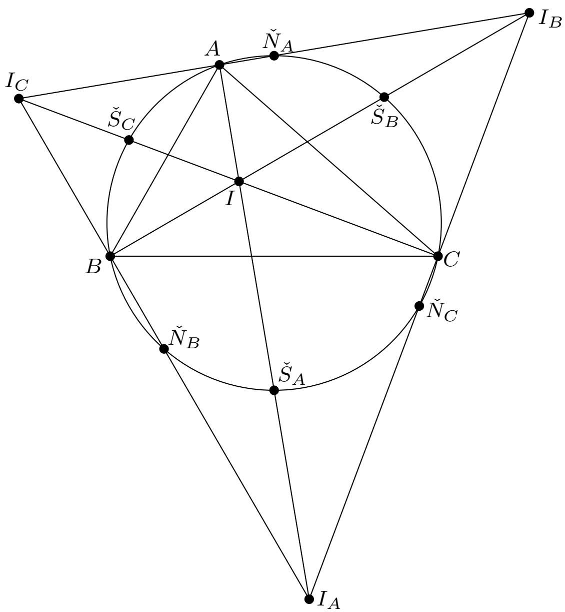
Návod. Interpretujte připsiště jako průsečíky správných kružnic. Vyúhlete, že čtveřice připsišť tvoří vrcholy obdélníka a správné čtveřice připsišť leží na přímce.

The Big Picture

Pomocí různých os rozličných úhlů jsme si v trojúhelníku nadefinovali spoustu bodů. Zajímavé je, že konfiguraci, kterou tvoří, již známe.

Tvrzení 15. (The Big Picture) *V trojúhelníku ABC s naším značením platí, že I je kolmiště trojúhelníku $I_AI_BI_C$ a kružnice opsaná ABC je Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $I_AI_BI_C$.*

Důkaz. Protože vnitřní a vnější osy úhlů ve vrcholu jsou na sebe kolmé, jsou A, B a C paty kolmic v $I_AI_BI_C$. Z toho plyne, že kružnice opsaná $\triangle ABC$ je Feuerbachovou kružnicí $\triangle I_AI_BI_C$. Pokud si nyní ještě k tomu uvědomíme, že tyto kolmice z připsišť do vrcholů jsou vlastně osy úhlů, je zjevné, že I na nich na všech leží, takže se skutečně jedná o kolmiště $\triangle I_AI_BI_C$.

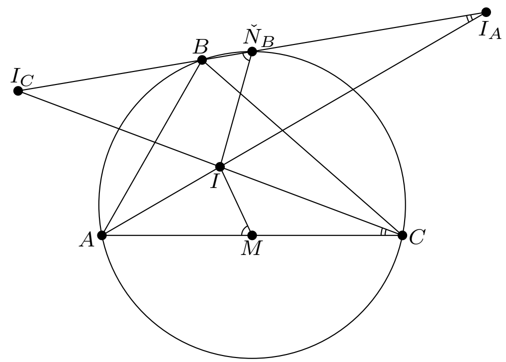


□

Povšimněme si, že skutečnost, že Švrčkovy body a antišvrky jsou středy příslušných úseček, je vlastně jen triviálním důsledkem tvrzení o kružnici devíti bodů.

Příklad 16. V trojúhelníku ABC platí $|AB| < |BC|$. Označme jako M střed AC. Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle I\check{N}_BB|$. (Rusko 2005)

Řešení. Dokresleme si I_A a I_C. Protože I_CACI_A je tětivový čtyřúhelník, platí $|\sphericalangle I_CI_AI| = |\sphericalangle ICB|$, takže trojúhelníky I_CII_A a AIC jsou podobné. Protože $I\check{N}_B$ je těžnice v trojúhelníku I_CIA a IM je těžnice v trojúhelníku AIC, jsou jim příslušné úhly se stranou shodné, takže $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle I\check{N}_BB|$, což jsme chtěli.



Cvičení 17. (těžší) V trojúhelníku ABC s vepsištěm I označme D, E po řadě průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B se stranami BC, AC. Dále označme P, Q body, ve kterých přímka DE protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku PIQ je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. (MKS 30–8–3b)

Návod. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku PIQ je kružnice opsaná trojúhelníku I_AII_B. Potom už tvrzení bude plynout přímo z toho, že díky Big Picture je kružnice opsaná $\triangle ABC$ Feuerbachovou kružnicí $\triangle I_AI_BI_C$ a kružnice opsaná $\triangle I_AII_B$ je kružnicí opsanou $\triangle I_AI_BI_C$ překlopenou přes I_AI_B.

To, že kružnice opsaná $\triangle PIQ$ splývá s kružnicí opsanou I_AII_B, dostaneme z toho, že vyjádříme mocnost D i E ke kružnicím opsaným $\triangle ABC$ a $\triangle I_AII_B$ a zjistíme, že DE je jejich chordála.

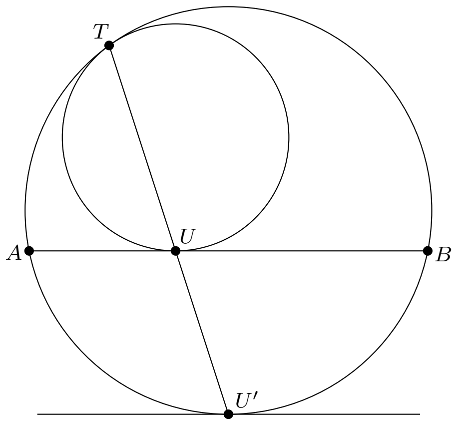
Lemma o ose úhlu

Výhodný způsob, jak o Švrčkově bodě uvažovat, je „ten bod dole". Pokud si totiž nakreslíme $\triangle ABC$ tak, aby přímka BC byla vodorovná, potom $\check{S}_A$ je nejnižší bod na kružnici opsané (ze symetrie). Tento náhled se nám bude hodit při důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 18. *Mají-li kružnice k a ℓ mají vnitřní dotyk v bodě T a tětiva AB kružnice k se dotýká kružnice ℓ v bodě U, potom UT je osa úhlu ATB.*

Řešení. Nakreslíme si obrázek tak, aby bod U byl na kružnici ℓ „dole", tedy body A, B budou „na stejné úrovni". Zobrazíme kružnici ℓ na kružnici k stejnolehlostí se středem v T. Tato stejnolehlost má kladný koeficient, a proto i bod U' (obraz bodu

U) je na kružnici k „dole“, tedy trojúhelník ABU' je rovnoramenný. Potom je ale U' Švrčkův bod v trojúhelníku ATB, z čehož okamžitě plyne požadované tvrzení.



Toto také říká, že pokud se ω zevnitř dotýká kružnice opsané $\triangle ABC$ v B a navíc se dotýká AC v D, potom B, D a $\check{S}_B$ leží na přímce. (Rozmyslete si.)

Příklad 19. Dvě kružnice ω_1 a ω_2 se zvenku dotýkají v bodě T a obě se zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech R a S. Nechť Q je druhý průsečík RT s ω. Ukažte, že $|\sphericalangle QST| = 90°$. (KMS)

Řešení. Sestrojme společnou tečnu ω_1 a ω_2 v bodě T. Nechť tato tečna protíná ω v bodech X a Y. Potom dle předchozího tvrzení je Q Švrčkův bod trojúhelníku XRY. Pokud analogicky vytvoříme bod W jako průsečík ST s ω, pak W je Švrčkův bod v trojúhelníku XSY. To znamená, že Q i W jsou středy oblouků XY (každý jiného), takže QW je průměr ω. Proto $|\sphericalangle QST| = |\sphericalangle QSW| = 90°$, což jsme chtěli.

Shooting lemma

Poslední zajímavé tvrzení, které si o Švrčkově bodě ukážeme, je takzvané Shooting lemma.

Tvrzení 20. *Buď M střed oblouku PQ na kružnici ω a nechť přímka p procházející M protíná přímku PQ v X a ω v Y. Potom platí*

(1) $|MX| \cdot |MY| = |MP|^2$,
(2) *pokud je I vepsiště $\triangle PYQ$, potom $|MX| \cdot |MY| = |MI|^2$,*
(3) *pokud další přímka p' procházející M protíná PQ v X' a ω v Y', potom X, Y, X' a Y' leží na jedné kružnici.*

Důkaz. Začněme s (1). Protože M je střed oblouku, je M Švrčkovým bodem trojúhelníka PYQ. Potom platí $|\sphericalangle PYM| = |\sphericalangle MYQ| = |\sphericalangle MPQ| = |\sphericalangle MPX|$, z čehož zjišťujeme, že trojúhelníky PYM a XPM jsou podobné. Proto $\frac{|MX|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|MY|}$, z čehož plyne požadované tvrzení.

Část (2) okamžitě vyplývá z toho, že $|MI| = |MP|$ (opět, protože M je Švrčkův bod $\triangle PYQ$).

Část (3) snadno odvodíme z (1) za využití mocnosti bodu ke kružnici.

$\square$

Příklad 21. Kružnice ω_1 a ω_2 se obě zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech A a B. Společná tečna ω_1 a ω_2 se jich dotýká postupně v bodech C a D. Ukažte, že $ABDC$ je tětivový čtyřúhelník.

Řešení. Přímka CD protíná ω v bodech X a Y. Nechť M je střed toho oblouku XY, který neobsahuje A a B. Potom AC i BD procházejí M. Ovšem potom máme hotovo z části (3) Shooting lemmatu.

Cvičení 22. Přímka ℓ protíná kružnici Γ v bodech A, B. Kružnice ω_1 a ω_2 jsou vepsané[3] do stejné úseče určené přímkou ℓ a mají vnější dotyk. Dokažte, že jejich vnitřní společná tečna prochází pevným bodem, pohybují-li se ω_1, ω_2 ve vymezené úseči.

Návod. Tím bodem bude střed druhého oblouku. Použijte mocnost.

Cvičení 23. Nechť kružnice Ω a ω mají vnitřní dotyk v bodě P, přičemž ω leží uvnitř Ω. Buď AB tětiva Ω, která se dotýká ω v bodě C. Průsečík PC s Ω různý od P si označme jako Q. Nechť tečny z bodu Q ke kružnici ω protínají kružnici Ω v bodech R a S. Vepsiště trojúhelníků APB, ARB a ASB si postupně označíme jako I, X a Y. Ukažte, že $|\sphericalangle PXI| + |\sphericalangle PYI| = 90°$. (Rumunsko TST 2013)

Návod. Uvědomte si, že Q je Švrčkův bod a následně použijte Shooting lemma, abyste ukázali, že X a Y jsou dotyky QR a QS s ω. Zbytek doúhlete.

Cvičení 24. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Γ, vepsištěm I a bodem D ležícím na straně BC. Buď ω kružnice dotýkající se úsečky AD v bodě F, strany BC bodě E a kružnice Γ v bodě K. Dokažte, že I leží na přímce EF.

(MKS 29–8–4b)

Návod. Označme si I' průnik EF a $A\check{S}_A$. Díky Shooting lemmatu stačí dokázat, že $\check{S}_A I'$ je tečna ke kružnici opsané $EI'K$. Využijeme-li úsekové úhly, stačí ukázat, že A, F, I' a K leží na jedné kružnici. To zjistíme jednoduchým porovnáním úhlů $I'FK$ a $I'AK$.

Cvičení 25. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Γ, vepsištěm I a bodem D ležícím na straně BC. Nechť ω_1 a ω_2 jsou kružnice se středy O_1 a O_2, které se obě dotýkají úsečky AD, přímky BC a kružnice Γ. Ukažte, že O_1, O_2 a I leží na jedné přímce. (Sawayama–Thébault theorem)

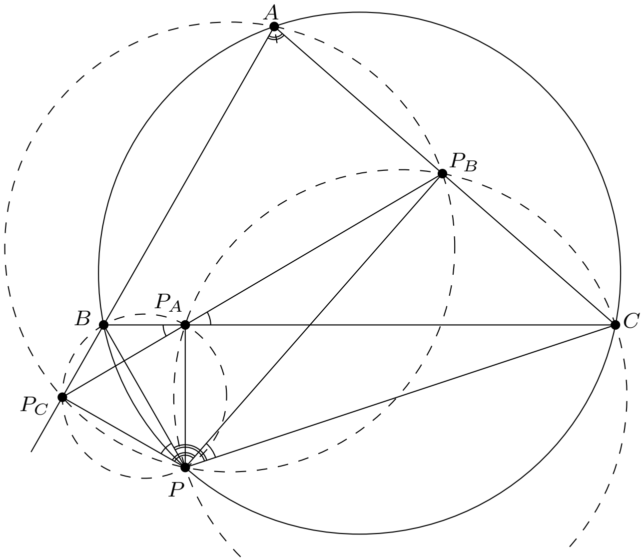
Návod. Využijte předchozí cvičení pro „správnou“ definici bodu I. Najděte v obrázku hodně pravých úhlů a využijte podobnosti trojúhelníků.

[3] To znamená, že mají vnitřní dotek s Γ a navíc ℓ je jejich tečna.

Simsonova přímka

Tvrzení 26. *Označme P_A, P_B, P_C paty kolmic vedených z bodu P na příslušné strany trojúhelníka ABC. Pak body P_A, P_B, P_C leží v přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Této přímce se říká Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.*

Důkaz. Kdybychom chtěli být zcela exaktní, museli bychom buď rozebrat několik možností umístění bodu P vůči trojúhelníku ABC a také to, jak vypadá $\triangle ABC$, nebo použít orientované úhly. Budeme ale pro jednoduchost předpokládat, že situace vypadá tak, jako na obrázku. Ostatní situace se rozeberou podobně a zvídavý čtenář si je může vyzkoušet jako domácí cvičení.[4]



Díky pravým úhlům jsou PP_CBP_A, PP_AP_BC a PP_CAP_B tětivové. Potom platí

$$|\sphericalangle BP_AP_C| = |\sphericalangle BPP_C| = |\sphericalangle P_BPP_C| - |\sphericalangle P_BPB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle P_BPB|.$$

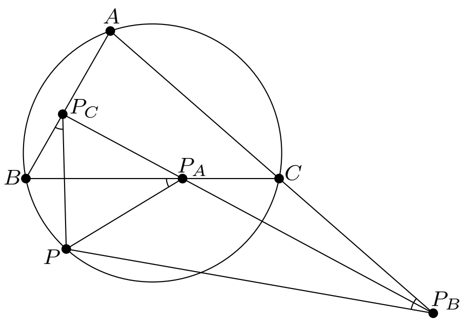
Protože B, P_A a C leží na přímce, leží P_A, P_B, P_C na přímce právě tehdy, když $|\sphericalangle BP_AP_C| = |\sphericalangle CP_AP_B|$. Protože $|\sphericalangle CP_AP_B| = |\sphericalangle CPP_B| = |\sphericalangle CPB| - |\sphericalangle P_BPB|$, je uvažovaná kolineárnost[5] ekvivalentní se vztahem $180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle P_BPB| =$

[4] Jen poznamenejme, že zatímco my jako pisatelé výukového textu máme právo přenechat nějaký kus práce čtenáři, řešitelům není povoleno v odevzdaných řešeních přenechat kus práce opravovateli.

[5] Kolineárnost je vlastnost „býti na jedné přímce“.

$|\sphericalangle CPB| - |\sphericalangle P_B PB|$, což se dá přepsat jako $|\sphericalangle CPB| + |\sphericalangle BAC| = 180°$. Takže shledáváme, že P_A, P_B a P_C leží na přímce právě tehdy, když $PBAC$ je tětivový čtyřúhelník, což je to, co jsme chtěli. $\square$

Poznámka. Povšimněme si, že fakt, že P_A, P_B a P_C jsou paty kolmic, jsme takřka nevyužili. Důležitá byla pouze tětivovost příslušných čtyřúhelníků. Proto existuje takzvaná „zobecněná Simsonova přímka“, pro jejíž konstrukci je potřeba jen, aby přímky PP_A, PP_B a PP_C svíraly s příslušnými stranami stejné úhly. Je to ovšem trošku složitější tím, že se požaduje, aby tyto úhly byly stejně orientovány, tj. „šly všechny na stejnou stranu“. Toto tvrzení si můžete dokázat jako cvičení.



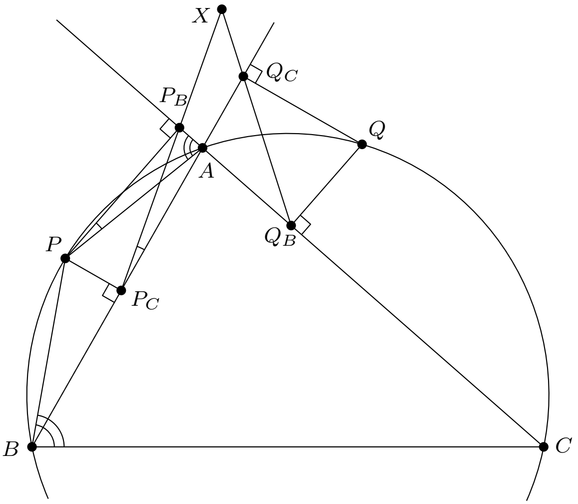
Cvičení 27. Buď ABC rovnostranný trojúhelník a P buď bod na jeho kružnici opsané různý od A, B a C. Přímky rovnoběžné s BC, CA, AB vedené skrz P protínají přímky CA, AB, BC postupně v bodech M, N a Q. Dokažte, že M, N a Q leží na jedné přímce.

Návod. Všechny přímky protínají strany pod úhlem 60°.

Tvrzení 28. *Simsonova přímka bodu P půlí úsečku PH.*

Důkaz. BÚNO nechť P leží na tom oblouku BC, který neobsahuje A. Označme obrazy P podle přímek AB a AC jako P'_C a P'_B. Zjevně stačí ukázat, že P'_C, H a P'_B leží na jedné přímce.

Označme obrazy H dle AC a AB jako H_B a H_C. Protože překlopení je shodné zobrazení, platí $|\sphericalangle AHP'_C| = |\sphericalangle AH_C P|$ a $|\sphericalangle AHP'_B| = |\sphericalangle AH_B P|$. Potom ovšem $|\sphericalangle AHP'_C| + |\sphericalangle AHP'_B| = |\sphericalangle AH_C P| + |\sphericalangle AH_B P| = 180°$, kde poslední rovnost plyne z toho, že H_B, H_C i P leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Pak ale $|\sphericalangle AHP'_C| + |\sphericalangle AHP'_B| = 180°$ přesně dává to, co jsme chtěli.



□

Tvrzení 29. *Simsonovy přímky odpovídající bodům P, Q na kružnici opsané trojúhelníku ABC svírají úhel rovný polovině středového úhlu, který přísluší oblouku PQ.*

Důkaz. Opět platí, že pro formálně správný důkaz bysme museli buď rozebrat velké množství možností, nebo použít orientované úhly. Místo toho radši budeme prostě předpokládat, že situace vypadá tak, jako na obrázku.

Nechť X je průsečík uvažovaných Simsonových přímek. Protože součet úhlů ve čtyřúhelníku XP_CAQ_B je $360°$ a u A je úhel $360° - \alpha$, platí $|\sphericalangle P_CXQ_B| = \alpha - |\sphericalangle P_BP_CA| - |\sphericalangle Q_CQ_BA|$. Z obvodových a doplňkových úhlů plyne

$$|\sphericalangle P_BP_CA| = |\sphericalangle P_BPA| = 90° - |\sphericalangle PAP_B| = 90° - |\sphericalangle PBC| = 90° - \beta - |\sphericalangle PBA|.$$

Analogicky dostaneme i $|\sphericalangle Q_CQ_BA| = 90° - \gamma - |\sphericalangle QCA|$. Proto

$$\begin{aligned}|\sphericalangle P_CXQ_B| &= \alpha - |\sphericalangle P_BP_CA| - |\sphericalangle Q_CQ_BA| \\ &= \alpha + \beta + \gamma - 180° + |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle QCA| \\ &= \frac{|\sphericalangle POA|}{2} + \frac{|\sphericalangle AOQ|}{2} = \frac{|\sphericalangle POQ|}{2}.\end{aligned}$$

Důsledek. *Simsonovy přímky „protějších“ bodů P a Q jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici.*

Důkaz. Kolmost je zjevná z předchozího tvrzení. Pro druhou část si označme jako P' a Q' středy úseček PH a QH a jako X uvažovaný průsečík přímek. Víme, že P' a Q' leží na příslušných Simsonových přímkách. Protože P a Q leží na kružnici opsané a P' a Q' jsou jen obrazy ve stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem H, jsou P' a Q' protilehlé body na kružnici devíti bodů. Potom se ale jedná o kružnici nad průměrem $P'Q'$, takže z $|\sphericalangle P'XQ'| = 90°$ dostáváme, že X na této kružnici vskutku leží. $\square$

Příklad 30. V trojúhelníku ABC označme A_1 patu výšky z vrcholu A. Ukažte, že paty kolmic vedených z A_1 na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

Řešení. Označme si paty výšek z B a C jako B_1 a C_1. Paty kolmic z A_1 na BA, AC, BB_1 a CC_1 si nazvěme jako X, Y, P a Q.

Všimněme si, že C_1 a A_1 leží na kružnici nad průměrem AC. Pokud uděláme Simsonovu přímku vzhledem k $\triangle ACC_1$ a bodu A_1, dostaneme proto, že X, Q a Y leží na jedné přímce. Analogicky zjistíme, že i X, P a Y leží na přímce, z čehož plyne požadované tvrzení.

Cvičení 31. Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58–III–2)

Návod. Dokreslete paty kolmic z P na AD a BC. Nalezněte Simsonovy přímky a uvědomte si díky nim, že $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle APB|$.

Cvičení 32. Na přímce jsou dány body A, B, C a mimo ni bod P. Dokažte, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku tvořenému středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABP, BCP a ACP.

Návod. Díky stejnolehlosti leží středy úseček PA, PB, PC v přímce. Interpretujte je jako paty vhodných kolmic. Pak si uvědomte, že Simsonovu přímku lze vytvořit *právě tehdy*, když uvažovaný bod leží na kružnici opsané.

Antirovnoběžky, izogonály a kamarádi

Where there is matter, there is geometry. – Johannes Kepler

Směřujeme k užitečnému konceptu párování bodů v rovině vzhledem k pevnému trojúhelníku. Jak to tak bývá, nejprve bude třeba zavést několik pojmů.

Mějme daný úhel XVY. Řekneme, že přímky p a q jsou vůči němu *antirovnoběžné*, pokud osový obraz přímky p podle osy úhlu XVY je rovnoběžný s přímkou q. Pokud navíc obě přímky procházejí bodem V, říkáme, že p a q jsou izogonální vzhledem k úhlu XVY. Pokud je z kontextu zřejmé, vzhledem ke kterému úhlu antirovnoběžnost nebo izogonalitu myslíme, vynecháváme tuto část názvu.

Věnujme nyní pár slov motivaci názvů těchto objektů.[6] Přímka rovnoběžná s p svírá s ramenem příslušného úhlu stejný úhel jako p, zatímco obraz přímky p podle

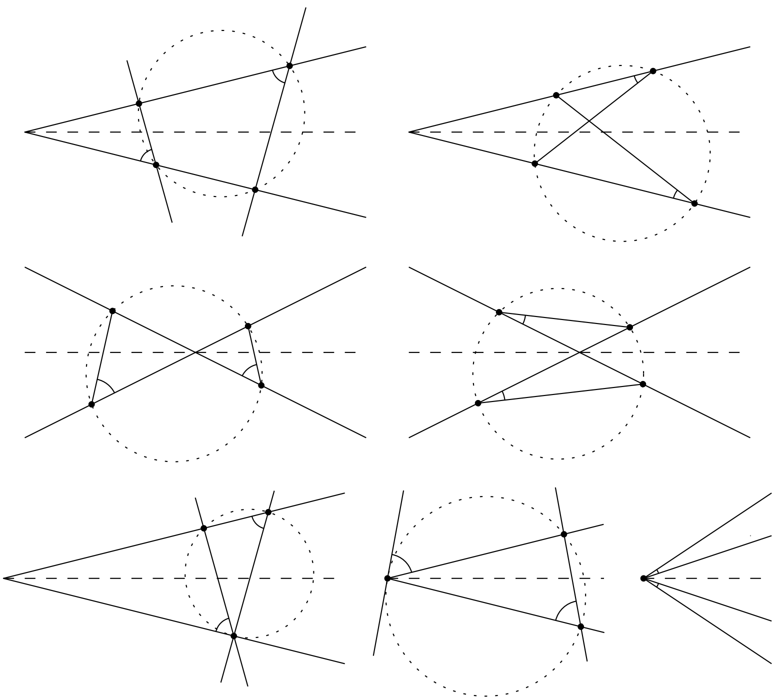
[6] Jejich význam by měl takřka triumfálně vyplynout ze zbytku této kapitoly.

osy onoho úhlu (nebo s obrazem rovnoběžná přímka) svírá tento úhel s jeho druhým ramenem. Proto mluvíme o antirovnoběžkách. Neformálně řečeno, antirovnoběžka se má k jednomu rameni úhlu stejně jako původní přímka ke druhému. Předpona *iso-* pochází z řečtiny a znamená stejný a *gonia* znamená úhel. Těmito stejnými úhly jsou myšleny ty dva výše zmíněné, přičemž nyní mají navíc oba společný vrchol.

Antirovnoběžky poskytují nový pohled na tětivové čtyřúhelníky.

Tvrzení 33. *Je dán čtyřúhelník $ABCD$, P je průsečík přímek AB a CD, Q je průsečík úhlopříček AC a BD a R je průsečík přímek AD a BC. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když jsou nějaké dvě*[7] *přímky obsahující protější strany nebo úhlopříčky v $ABCD$ antirovnoběžné v nějakém z úhlů APD, AQD nebo CRD.*

Důkaz. V každé možné konfiguraci (viz obrázky níže) plyne tvrzení snadno z charakterizace tětivových čtyřúhelníků pomocí obvodových úhlů. Povšimněte si také degenerovaných případů, kde dva z průsečíků splynou a příslušné rameno se stane tečnou. Poslední obrázek ukazuje dvě izogonály.



□

[7] Stačí tedy ověřit antirovnoběžnost jedné konkrétní dvojice přímek v jednom konkrétním úhlu, z ní už vyplyne tětivovost $ABCD$, a tím i antirovnoběžnost každé takové dvojice přímek v každém ze zmíněných úhlů.

Cvičení 34. Rozmyslete si, že (anti)rovnoběžnost má podobné vlastnosti jako parita – antirovnoběžka k rovnoběžce je antirovnoběžka a antirovnoběžka k antirovnoběžce je rovnoběžka.

Cvičení 35. Dokažte, že pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům současně, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.

Návod. Podmínka říká, že když postupně pustíme na p osovou souměrnost podle os obou úhlů, dostaneme rovnoběžnou přímku. Kdy se to může stát?

Cvičení 36. Ať $ABCD$ je tětivový. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů AQB a BPC jsou kolmé.

Návod. Použijte předchozí cvičení.

Cvičení 37. Dokažte Shooting lemma pomocí antirovnoběžek.

Návod. Tečna vedená středem oblouku je antirovnoběžná s jednou tětivou a rovnoběžná s druhou.

Hlavní přínos antirovnoběžek nebo izogonál však leží někde jinde. Pro důkaz příslušného tvrzení budeme ale potřebovat známou větu, se kterou jsme zatím ještě nepracovali.

Tvrzení 38. (Cevova[8] věta) *Je dán trojúhelník ABC, bod D na straně BC, bod E na straně CA a bod F na straně AB. Přímky AD, BE a CF procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí*

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

Důkaz zde uvádět nebudeme.[9]

Cevova věta se hodí, pokud je třeba dát do souvislosti procházení přímek jedním bodem a nějaké poměry délek. My si ji ještě upravíme, abychom místo s délkami mohli pracovat s úhly.

Tvrzení 39. (Goniometrický tvar Cevovy věty) *V situaci z Cevovy věty platí*

$$\frac{\sin(|\sphericalangle ACF|)}{\sin(|\sphericalangle BCF|)} \cdot \frac{\sin(|\sphericalangle BAD|)}{\sin(|\sphericalangle CAD|)} \cdot \frac{\sin(|\sphericalangle CBD|)}{\sin(|\sphericalangle ABE|)} = \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|},$$

takže přímky AD, BE a CF se protínají právě tehdy, když je levá strana výše uvedeného vztahu rovna jedné.

Důkaz. Ze sinové věty pro trojúhelníky ABD a ADC s využitím identity $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ$ dostáváme:

$$\frac{|BD|}{\sin(|\sphericalangle BAD|)} = \frac{|AB|}{\sin(|\sphericalangle ADB|)} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{\sin(|\sphericalangle ADC|)} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|CD|}{\sin(|\sphericalangle DAC|)}.$$

---

[8] Giovanni Ceva ([čéva]; 1647–1734) byl italský geometr.

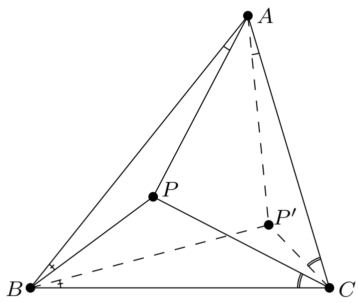
[9] Lze jej najít např. zde *http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Ceva%27s_Theorem*

Tedy $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{\sin(|\sphericalangle BAD|)}{\sin(|\sphericalangle CAD|)}$. Pro poměry $\frac{|CE|}{|EA|}$ a $\frac{|AF|}{|FB|}$ platí analogické vztahy, jejichž vynásobením dostaneme dokazovanou identitu (poměry délek stran trojúhelníka se zkrátí). Zbytek plyne z původní Cevovy věty. □

Dostáváme se ke klíčovému tvrzení.

Tvrzení 40. (O existenci kamarádů) *Je dán trojúhelník ABC a bod P, který neleží na jeho kružnici opsané. Pak izogonály přímek AP, BP a CP procházejí jedním bodem P', který nazýváme kamarádem*[10] *bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.*

Důkaz. (částečný) Předpokládejme, že P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Jelikož se přímky AP, BP a CP protínají v jednom bodě, platí pro příslušné úhly identita z goniometrické Cevovy věty, tedy součin poměrů sinů je roven jedné. Izogonály ke zmíněným přímkám „dělí" příslušné vnitřní úhly trojúhelníka ABC na stejné kusy jako původní přímky AP, BP a CP, ale v opačném pořadí. Zmíněný výraz tedy vyjde jako převrácené číslo než pro původní přímky. To je ale opět jedna, takže zpětným použitím goniometrické verze Cevovy věty dostáváme, že se izogonály také protínají v jednom bodě P'.



□

Pro P mimo trojúhelník bychom postupovali podobně, ale potřebovali bychom Cevovu větu i v této situaci. Neobešli bychom se při tom bez orientovaných vzdáleností a úhlů a sinové věty pro orientované úhly, proto tuto část tvrzení ponecháme bez důkazu. Podíváme se ale, proč pro body na opsané kružnici kamarád neexistuje.

Tvrzení 41. *Pokud P leží na kružnici opsané a není jedním z vrcholů trojúhelníku, pak jsou izogonály v tvrzení o existenci kamarádů rovnoběžné.*[11]

Důkaz. BÚNO nechť P leží uvnitř oblouku BC neobsahujícího bod A. Označme P_A, P_B a P_C obrazy bodu P podle os vnitřních úhlů s příslušnými vrcholy. Pak AP_A je

[10] V angličtině se používá termín *isogonal conjugate.*

[11] A mohli bychom tedy jeho kamaráda definovat jako „bod v nekonečnu v příslušném směru", provést to korektně by však dalo práci.

izogonála k AP a svírá s přímkou BC úhel $|\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle BAP_A| = |\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle PAC|$. Podobně přímka CP_C svírá s přímkou BC úhel $|\sphericalangle P_CCA| + |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle PCB| + |\sphericalangle ACB|$. Jelikož P leží na opsané kružnici, platí $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PAB|$ a můžeme oba výše vyjádřené úhly sečíst:

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle PCB| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ,$$

protože $|\sphericalangle PCB|+|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle BAC|$. Z toho už vidíme, že $AP_A \parallel CP_C$. Analogicky bychom dokázali, že i třetí izogonála je s prvními dvěma rovnoběžná. □

Cvičení 42. Rozmyslete si, že kamarád kamaráda je opět původní bod.

Staří známí kamarádi

Tak fajn, ke skoro každému bodu v rovině trojúhelníka umíme najít jeho kamaráda. A k čemu je to dobré? Nejsou třeba nějací dva kamarádi mezi významnými body trojúhelníka, které už známe? Následující cvičení a tvrzení na tuto otázku částečně odpoví. Ve všech máme daný trojúhelník ABC a hovoříme-li o nějakých významných bodech, jsou to ty jeho.

Cvičení 43. Najděte všechny body, které jsou svými vlastními kamarády.

Návod. Jsou čtyři.

Tvrzení 44. *V daném trojúhelníku jsou body O a H kamarádi.*

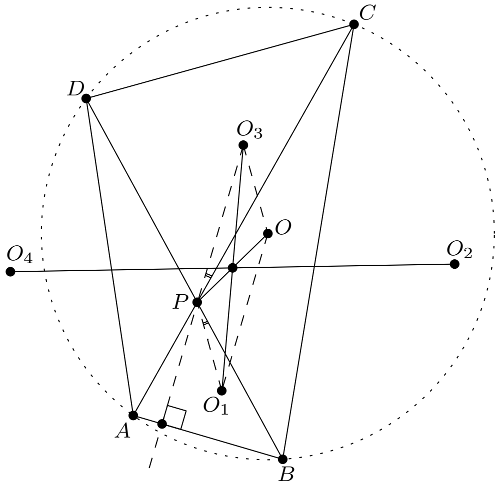
Důkaz. Platí $|\sphericalangle BAO| = 90^\circ - \gamma = |\sphericalangle HAC|$, takže AH je izogonála k AO. Analogicky odvodíme rovnosti i pro zbylé vrcholy. □

Toto tvrzení není samo o sobě moc objevné. Už jsme jej vlastně znali, ale pouze jako rovnost nějakých náhodných úhlů. Pamatovat si ho v naší nové formulaci je ale výrazně efektivnější.

Příklad 45. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P. Dále nazvěme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsiště trojúhelníků APB, BPC, CPD a DPA jako O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že přímky PO, O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Řešení. Použijeme předchozí tvrzení na trojúhelníky ABP a CDP. Jelikož je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, jsou tyto trojúhelníky podobné a sdílejí osu úhlu u vrcholu P. Navíc platí, že když jeden z těchto trojúhelníků zobrazíme podle oné osy, bude obrazem druhého v nějaké stejnolehlosti se záporným koeficientem (odpovídá prostřednímu obrázku vlevo za tvrzením o antirovnoběžkách a tětivovosti). Obrazem PO_1 podle této osy je tedy jednak přímka PH_{ABP} a zároveň přímka PO_3. Toto vyplývá z předchozího popisu toho, jak jsou příslušné trojúhelníky podobné, a toho, že zmíněná stejnolehlost zobrazuje přímky procházející jejím středem P samy na sebe. Z toho plyne, že PO_3 je kolmá na AB a analogicky PO_1 je kolmá na CD, tedy PO_1OO_3 je rovnoběžník (OO_1 je osa strany AB, tedy je na ni kolmá, podobně pro

OO_3). Analogicky bychom dokázali, že PO_2OO_4 je rovnoběžník, a jelikož se úhlopříčky v rovnoběžníku půlí, prochází všechny tři přímky ze zadání středem úsečky PO.



Cvičení 46. (těžší) Ukažte, že rovnost $|IH| = |IO|$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven $60°$.

Návod. Buď jsou trojúhelníky AIH a AIO podobné, nebo je $AOIH$ tětivový čtyřúhelník, to samé platí i pro vrcholy B a C. Druhá možnost nemůže nastat ve všech případech a z první plyne, že $AOŠ_AC$ je kosočtverec.

Cvičení 47. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Buďte D a E body na stranách AB a AC takové, že B, C, E a D leží na kružnici. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná D, E a A protne stranu BC ve dvou bodech X a Y. Ukažte, že střed XY je zároveň patou výšky z A na BC. (Baltic Way 2010)

Návod. Stačí dokázat, že výška z A obsahuje opsiště trojúhelníku ADE. Díky antirovnoběžnosti je to totéž, jako že kolmice z A na DE prochází opsištěm trojúhelníku ABC.

Cvičení 48. (těžší) V trojúhelníku ABC osa úsečky AH protíná strany AB a AC po řadě v bodech D a E. Ukažte, že $|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle AOE|$.

Návod. Díky kamarádství O a H a tomu, že DE je osa AH, jsou rovnoramenné trojúhelníky ADH a AOC podobné. Z toho vyvoďte, že $|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle ACH| = 90° - \alpha$, a analogicky postupujte pro bod E. (Crux)

Cvičení 49. V rovině se kružnice k_1 a k_2 o středech po řadě I_1 a I_2 protínají v bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

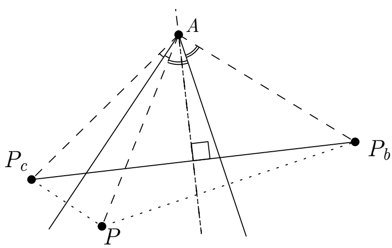
Návod. Vyúhlete, že E je opsiště trojúhelníku ACD.

Obecné vlastnosti kamarádů

Začneme alternativním způsobem konstrukce kamaráda.

Tvrzení 50. (Alternativní definice kamaráda) *Kamarád bodu P je opsiště trojúhelníku s vrcholy v osových obrazech P přes strany.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že P leží uvnitř trojúhelníka. Jinak je důkaz obdobný, pouze výpočty úhlů vypadají trochu jinak. Označme P' zmíněné opsiště a dále P_c a P_b osové obrazy bodu P po řadě přes strany AB a AC. Vrchol A zřejmě leží na ose úsečky P_cP_b, stejně jako bod P'. Díky definici bodů P_b a P_c pomocí osové souměrnosti platí $|\sphericalangle P_bAP_c| = 2\alpha$, a tedy $|\sphericalangle P'AP_b| = \alpha$. Nyní už snadno dopočítáme $|\sphericalangle P'AC| = |\sphericalangle P!AP_B| - |\sphericalangle CAP_b| = \alpha - |\sphericalangle PAC| = \alpha - (\alpha - |\sphericalangle PAB|) = |\sphericalangle PAB|$, takže AP je izogonální s AP'. Analogicky bychom dokázali i ostatní izogonality, a tedy P' je opravdu kamarád bodu P.



□

Poznámka 51. Naše nová definice kamaráda by měla selhávat na stejné množině bodů jako definice původní. Že tomu tak skutečně je, říká tvrzení o Simsonově přímce – trojice bodů na přímce nemá žádné opsiště.

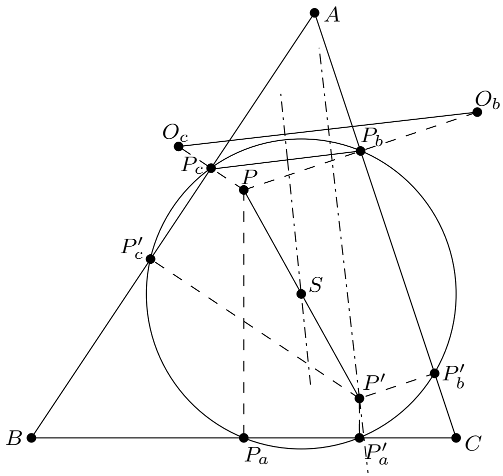
Poznámka 52. V prvním vzorovém řešení druhé úlohy první seriálové série jsme dokazovali, že H je opsištěm v trojúhelníku $O_aO_bO_c$. Nyní už je nám to jasné z předchozího tvrzení a toho, že O a H jsou kamarádi.

Cvičení 53. Kružnice k vytne na každé straně trojúhelníka ABC úsečku. Ukažte, že potenční střed kružnic sestrojených nad těmito úsečkami je kamarád středu kružnice k. (zobecněné IMO 2008)

Návod. Díky předchozímu tvrzení stačí dokázat, že opsiště trojúhelníka s vrcholy v osových obrazech středu k přes strany má stejnou mocnost k libovolným dvěma z kružnic nad průměry. Napište mocnosti ve tvaru „vzdálenost od středu na druhou minus poloměr na druhou".

Tvrzení 54. (Six feet theorem) *Paty kolmic bodu P a jeho kamaráda P' na strany trojúhelníka ABC leží na jedné kružnici.*

Důkaz. Označme paty kolmic ze zadání P_a, P_b, P_c a P'_a, P'_b, P'_c. Střed S úsečky PP' zřejmě leží na osách úseček $P_aP'_a$, $P_bP'_b$, $P_cP'_c$. Jinými slovy, S je stejně vzdálený vždy od dvou pat na jedné straně. Stačí tedy dokázat, že leží také na ose úsečky P_bP_c (a pak analogicky na dalších osách). Nyní použijeme tvrzení o alternativní konstrukci kamaráda. Bod P' jakožto kamarád bodu P je opsiště osových obrazů P přes strany. Označme je O_a, O_b a O_c. Bod P' tedy speciálně leží na ose úsečky O_bO_c. Stejnolehlost se středem v P a koeficientem $\frac{1}{2}$ pak ukazuje, že S leží na ose P_bP_c, a jsme hotovi. □



Cvičení 55. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Nechť A', B' , C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A''. Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$.

Návod. Dokreslete kamaráda P a použijte předchozí tvrzení. Doúhlete.

Symediány

Jediným základním středem trojúhelníka, o jehož kamarádovi dosud nic nevíme, je těžiště. Faktem, který už tak zřejmý není, je, že tento bod ani jednodušeji než jako kamarád těžiště popsat nejde. Na druhou stranu má vlastnosti, díky nimž stojí za to se jím zaobírat.

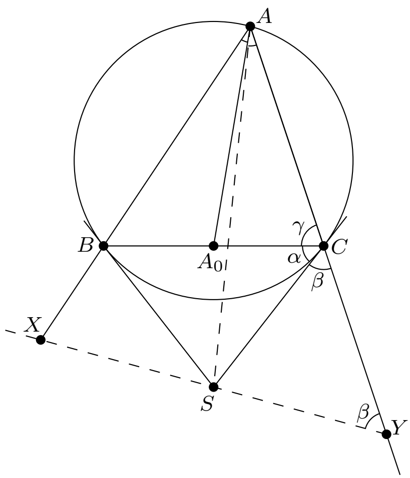
Izogonálu k a-těžnici (tedy přímce AA_0) budeme nazývat *a-symediánou*. Kamarád těžiště, který je zřejmě průsečíkem symedián, nazýváme *Lemoinův*[12] *bod* a značíme jej K.

[12] Émile Lemoine ([lemuán]; 1840–1912) byl francouzský inženýr a matematik.

Nyní se podíváme na vlastnosti symedián, na Lemoinův bod si posvítíme příště.

Tvrzení 56. (O průsečíku tečen) *Je dán trojúhelník ABC. Průsečík tečen ke kružnici jemu opsané vedených body B a C označme S. Pak AS je a-symediána.*

Důkaz. Bodem S veďme antirovnoběžku k BC vzhledem k úhlu BAC a její průsečíky s přímkami AB a AC označme X a Y. Díky antirovnoběžnosti platí $|\sphericalangle XYA| = \beta$ a díky vlastnostem CS (úsekový úhel) platí $|\sphericalangle SCY| = \beta$. Trojúhelník CSY je tedy rovnoramenný se základnou CY. Analogicky je trojúhelník BXS je rovnoramenný se základnou BX. Díky definici bodu S (stejně dlouhé úseky tečen) je tedy S středem úsečky XY. Nyní už by nám mělo být jasné, že AS je a-symediána, protože je „těžnicí vůči antirovnoběžce“. Přesněji řečeno, osová souměrnost podle osy úhlu BAC zobrazí XY na rovnoběžku s BC a přímku AS na spojnici bodu A a jejího středu, čili a-těžnici. Tedy AS je izogonála k a-těžnici, neboli a-symediána.



□

Cvičení 57. V ostroúhlém trojúhelníku leží symediána vždy mezi osou úhlu a výškou.

Návod. Použijte poslední tvrzení a dokreslete bod $\check{S}$.

Cvičení 58. Symediána z vrcholu A je množina vnitřních bodů X úhlu BAC, jejichž poměr vzdáleností od strany b a c je roven b/c.

Návod. Pro každý bod těžnice je tento poměr přesně opačný.

Cvičení 59. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AC| = 2|AB|$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k. (Výběrko 2013)

Návod. Poznejte symediánu, dokreslete příslušný střed strany a dokažte, že ona symediána protíná k ve středu oblouku BC.

Cvičení 60. Symediána je množina středů antirovnoběžek s protější stranou.

Návod. Je to jen „izogonální“ verze faktu, že těžnice je množina středů rovnoběžek s protější stranou a také důsledek posledního tvrzení.

Závěr

The only angle from which to approach a problem is the TRY-Angle. – neznámý autor

Gratulujeme všem, kteří dočetli seriál až sem. V příštím díle se můžete těšit na drsnější pokračování povídání o kamarádech, konkrétně půjde o vlastnosti Lemoinova bodu a o nějaké další dvojice kamarádů. Dále s námi pak, alespoň doufáme, stanete v úžasu nad Ponceletovým porismatem a větami od pánů jako Feuerbach nebo Fontené.

Přejeme dobré nápady při řešení úloh druhé seriálové série, jejíž úlohy jsou řazeny ne podle obtížnosti, ale podle témat v pořadí kopírujícím druhý díl seriálu.[13] S jakýmikoliv dotazy k zadáním úloh, ke cvičením (jsme si vědomi toho, že návody k nim jsou někdy hodně stručné) nebo k čemukoliv jinému se na nás neváhejte obrátit.

autoři

[13] Tentokrát to nejen nenápadně naznačíme.

Geometrie trojúhelníka 3 – Trojúhelník vrací úhel

Hamiltonova kružnice se dotýká Pascalova trojúhelníku v bodě varu. – neznámý autor

Vítejte u dalšího dílu seriálu. V tomto díle už budeme skutečně pracovat s těžkým kalibrem. Začneme pokračováním z minulého dílu, povídáním o Lemoinově bodě a Tuckerových kružnicích. Zadefinujeme Gergonnův a Nagelův bod a vyslovíme další kamarádská tvrzení. Potom nás bude čekat Ponceletovo porisma, které následně rozšíříme na obecnější tvrzení (stále zvané Ponceletovo porisma). Zakončíme formulací Feuerbachovy věty, kterou rozšíříme na takzvanou třetí Fonteného větu. Tu pak společně s prvními dvěma dokážeme.

Lemoinův bod

Minulý díl jsme zakončili zkoumáním symedián a slíbili jsme si něco říct o jejich průsečíku – Lemoinově[1] bodu, jenž značíme K. Než se do toho pustíme, připomeneme si krátce symediány, neboť je budeme hodně používat.

Tvrzení. (Opakování o symediánách) *Je dán trojúhelník ABC. Izogonály (přímky osově souměrné podle příslušných os úhlů) k těžnicím se nazývají symediány a protínají se v Lemoinově bodě. Symediána z bodu A (a-symediána) je množinou středů všech antirovnoběžek (jakožto úseček s krajními body na přímkách AB a AC) se stranou BC (vůči úhlu BAC). Také je množinou všech takových bodů roviny, jejichž poměr vzdáleností od přímek AB a AC je roven $\frac{|AB|}{|AC|}$.*

Cvičení. Ke stranám AB a AC trojúhelníka ABC připíšeme zvenku čtverce a průsečík jejich stran rovnoběžných s přímkami AB a AC (ale různých od nich) označíme X. Dokažte, že X leží na a-symediáně.

Návod. Bod X má správný poměr vzdáleností od AB a AC.

Teď už nám[2] nic nebrání pustit se do Lemoinova bodu.

Tvrzení. (Kosinová kružnice) *Když bodem K vedeme antirovnoběžky se stranami, vytnou na stranách trojúhelníka (přesněji na přímkách jimi určených) šestici bodů ležících na jedné kružnici. Středem této kružnice je bod K.*

Důkaz. Z opakovacího tvrzení víme, že K leží ve středu všech tří antirovnoběžek. Stačí tedy dokázat, že průsečíky antirovnoběžek s AB a AC se stranou BC tvoří spolu s K rovnoramenný trojúhelník. To je ale jasné díky antirovnoběžkám – oba vnitřní úhly zmíněného trojúhelníka při straně ležící na BC mají velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Analogická tvrzení platí pro zbylé dvě antirovnoběžky a my vidíme, že K je skutečně od všech šesti bodů stejně vzdálený.

[1] Émile Lemoine ([lemuán]; 1840–1912) byl francouzský inženýr a matematik. Máme ho rádi.

[2] A vám snad také ne.

Cvičení. Dokažte, že šest bodů z posledního tvrzení leží uvnitř stran, právě když je daný trojúhelník ostroúhlý.

Návod. Zkoumejte limitní případ, kdy je nějakou z antirovnoběžek z minulého tvrzení přímo symediána. Zbývá dokázat nerovnost pro úhel u symediány (ten je z definice roven nějakému úhlu u těžnice) v ostroúhlém trojúhelníku.

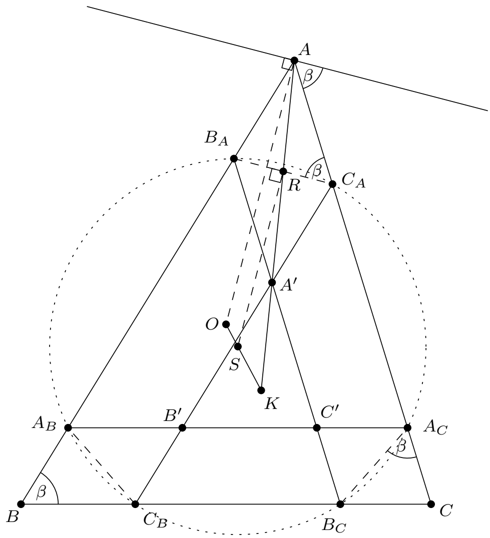
Cvičení. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku leží Lemoinův bod na některé výšce.

Cvičení. (těžší) Ukažte, že trojice úseček spojujících střed strany se středem odpovídající výšky prochází Lemoinovým bodem.

Návod. Ukažte, že každá z přímek je množina středů obdélníků vepsaných do ABC ležících na jedné ze stran. Rozmyslete si, že všechny vepsané obdélníky ležící na BC dostanete aplikováním vhodné stejnolehlosti se středem v A na nějaký obdélník zvenku připsaný ke straně BC, jehož střed umíte dobře popsat. Dopočítejte. Také se dá rovnoměrně hýbat s jedním vrcholem BÚNO po AB a nahlédnout, že střed obdélníka se pohybuje po správné úsečce. Nakonec použijte kosinovou kružnici.

Tvrzení. (Tuckerovy kružnice) *Uvažme vhodnou*[3] *stejnolehlost se středem v K a obrazy přímek AB, BC a CA v ní. Ty vytnou na obvodu trojúhelníka šestici bodů ležících na kružnici, jejíž střed leží na úsečce OK. Takové kružnice nazýváme Tuckerovy kružnice.*

Důkaz.



Označme si průsečíky podle obrázku. Čtyřúhelník $AB_AA'C_A$ je zřejmě rovnoběžník, takže úsečka B_AC_A je rozpůlena a-symediánou. Z toho plyne, že je to antirovnoběžka s BC. Vskutku, nechť B_AX je antirovnoběžka s BC a X leží na AC. Pak i B_AX je rozpůlena a-symediánou (opakovací tvrzení), z čehož plyne, že XC_A je rovnoběžná s a-symediánou, čili musí být $X = C_A$. S pomocí tohoto a analogických tvrzení jsou všechny tři „rohové“ trojúhelníčky (AB_AC_A a další dva) podobné

[3]Omezíme se jen na takové případy, v nichž každá z těchto zobrazených přímek protíná strany (úsečky) trojúhelníka ABC právě ve dvou bodech. Koeficient stejnolehlosti budeme tedy uvažovat z intervalu $\langle x, 1)$, kde x je vhodné záporné číslo. Nakreslete si v Geogebře.

trojúhelníku ABC. Speciálně je čtyřúhelník $B_A C_A A_C B_C$ rovnoramenný lichoběžník, tedy jeho vrcholy leží na jedné kružnici, a analogicky pro zbylé dvě strany.

Nabízí se otázka, zda už je z toho jasné, že všech šest bodů leží na jedné kružnici. Úplně jasné to není, ale pomůžeme si jednoduchým trikem. Dejme tomu, že by se ve skutečnosti jednalo o tři různé kružnice (zřejmě nemohou být právě dvě různé). Pak ale chordály jejich dvojic jsou přímky AB, BC a CA. Ty se mají podle tvrzení o potenčním středu protínat, což ale evidentně neplatí. Takže musí být všechny tři kružnice shodné a jsme hotovi, co se týče koncykličnosti.

Nyní uvažme stejnolehlost se středem v K takovou, že obraz bodu A je střed rovnoběžníka $AB_A A' C_A$ (označme jej R) a označme S obraz opsiště O v ní. Obraz tečny ke kružnici opsané ABC vedené bodem A je přímka $B_A C_A$, protože první z nich prochází bodem A, druhá bodem R a obě jsou antirovnoběžné s BC (u tečny to plyne z úsekového úhlu). Dále AO se zobrazí na RS (z definice), a tedy RS je kolmice na $B_A C_A$ procházející jejím středem, čili je to osa úsečky $B_A C_A$. Analogicky bychom dokázali, že S leží i na dalších osách, takže S je středem naší Tuckerovy kružnice.

Důsledek. (Lemoinova kružnice) *Rovnoběžky se stranami vedené bodem K vytnou na obvodu trojúhelníka šestici bodů, které leží na jedné kružnici, kterou nazýváme Lemoinova kružnice.*[4] *Její střed je středem úsečky OK.*

Důkaz. Je to Tuckerova kružnice pro „koeficient stejnolehlosti rovný nule“. Přísně vzato by taková stejnolehlost všechny tři přímky zobrazila do bodu K. My ji ale v tomto případě bereme tak, že je posune do nulové vzdálenosti od K, tedy uvažujeme trojici rovnoběžek se stranami vedených bodem K. Její existence by se dokázala zcela analogicky jako v případě Tuckerových kružnic (onu stejnolehlost jsme používali pouze na rovnoběžnost se stranami, takže úvahy o rovnoběžnících atd. projdou úplně stejně). Jelikož v našem případě splývá bod A' z minulého důkazu s bodem K, musí mít stejnolehlost použitá v jeho poslední části koeficient $\frac{1}{2}$, z čehož plyne, že její střed leží uprostřed úsečky OK.

Na tvrzení o Tuckerových kružnicích lze pohlížet i jinak. V důkazu jsme nakreslili nějaké rovnoběžky se stranami a dokázali, že spojnice jejich průsečíků jsou antirovnoběžky (s něčím, viz důkaz a obrázek). Vytvořili jsme tedy šestiúhelník (přesněji uzavřenou lomenou čáru o šesti úsecích), který dvakrát „objede“ obvod trojúhelníka a je tvořen střídavě rovnoběžkami a antirovnoběžkami s protější stranou. To vede k následující formulaci tvrzení o Tuckerových kružnicích.

Cvičení. (Tuckerův magický šestiúhelník[5]) Zvolme bod na obvodu trojúhelníka. Konstruujme lomenou čáru s vrcholy na sousedních stranách po směru hodinových ručiček, jejíž úseky jsou střídavě rovnoběžkami a antirovnoběžkami s protější stranou. Předpokládejme, že celá leží uvnitř trojúhelníka. Dokažte, že tato lomená čára se po šesti úsecích uzavře a její vrcholy leží na kružnici se středem na úsečce OK.

Návod. Stačí dokázat, že „rovnoběžkové části“ lomené čáry se protínají na symediánách. Z toho už plyne, že jsme je mohli obdržet z přímek AB, BC a CA pomocí vhodné stejnolehlosti se středem v K. Tím jsme převedli úlohu na tvrzení o Tuckerových kružnicích. První zmíněnou vlastnost ale snadno dostaneme z obrácené úvahy o rovnoběžníku – jeho vrchol a střed úhlopříčky (antirovnoběžka) leží na symediáně, tedy tam leží i jeho protější vrchol.

Na této formulaci je pozoruhodné, že Lemoinův bod K se objeví až při zkoumání středu výsledné kružnice – konstrukce lomené čáry ho nijak nepoužívá.

[4]Terminologie kolem Lemoinovy a kosinové kružnice kolísá. Například v angličtině převažuje po řadě First Lemoine Circle a Second Lemoine Circle, v češtině se jim někdy říká první a druhá Lemoinova kružnice, avšak naopak.

[5]Název je odvozen od notoricky známého kabaretního triku, ve kterém iluzionista vyzve diváka, aby ve zcela obyčejném trojúhelníku začal dokola po jeho obvodu kreslit střídavě rovnoběžky a antirovnoběžky.

Je dobré si uvědomit, jaké speciální případy Tuckerových kružnic už známe. Pokud zvolíme stejnolehlost s koeficientem 1 (což striktně vzato nesmíme, ale je to limitní případ), zdegenerují antirovnoběžky do bodů a výsledkem bude samotný obvod trojúhelníka, potažmo jeho kružnice opsaná. Pro „nulový koeficient“ dostaneme Lemoinovu kružnici. Pokud budeme pokračovat dál (pošleme koeficient do záporných čísel) a rovnoběžky budeme kreslit „až za“ bod K, projdou v jednom okamžiku bodem K všechny antirovnoběžky, kteréžto situaci odpovídá tvrzení o kosinové kružnici. Že se tak pro všechny tři antirovnoběžky stane v jednom okamžiku, plyne z toho, že poměr $\frac{|KR|}{|KA|}$ lze vyjádřit jen pomocí koeficientu původní stejnolehlosti, takže bod R a jeho dva analogy splynou s bodem K ve stejném okamžiku.

Cvičení. Ukažte, že kosinová kružnice je rozpůlena Lemoinovou kružnicí.

Návod. Stačí, že K leží na jejich chordále.

Nechť X je bod uvnitř trojúhelníka ABC. Jeho *úpatnicovým*[6] *trojúhelníkem* myslíme trojúhelník s vrcholy v patách kolmic z X na strany AB, BC a CA. S použitím tohoto pojmu můžeme například Tvrzení 54 z minulého dílu (Six feet theorem) zformulovat tak, že úpatnicové trojúhelníky kamarádů sdílejí kružnici opsanou.

Vzhledem k tomu, kolik věcí o Lemoinově bodu platí, bylo by zvláštní, aby žádné známé tvrzení neneslo jméno stejného velikána.

Tvrzení. (Lemoine theorem) *Lemoinův bod je jediný bod, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka.*

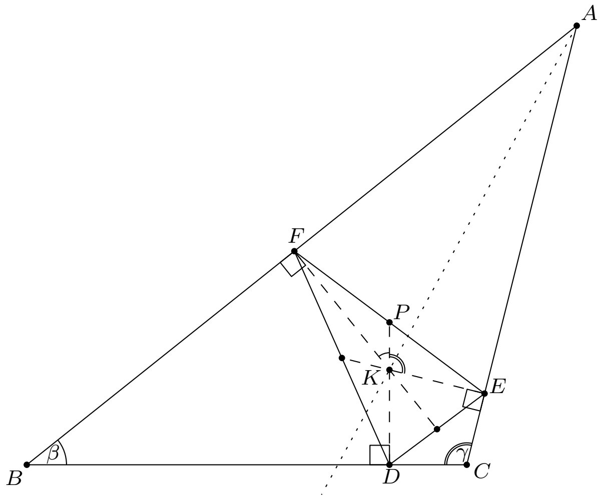
There is no royal road to geometry. – Eukleides

Důkaz. Jak naznačuje citát, budeme muset trochu počítat. Označme paty kolmic z K na strany BC, AC a AB po řadě D, E a F a dále průsečík přímky DK s úsečkou EF jako P. Pro první implikaci stačí dokázat, že bod P je středem úsečky EF. Tím bude přímka PK těžnicí v trojúhelníku DEF na stranu EF a analogicky to bude platit pro ostatní strany, čili K bude vskutku těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka DEF. Ze sinové věty pro trojúhelník KFP plyne: $|FP| = |FK|\frac{\sin|\sphericalangle FKP|}{\sin|\sphericalangle FPK|}$. Analogicky z trojúhelníku KPE odvodíme $|EP| = |KE|\frac{\sin|\sphericalangle PKE|}{\sin|\sphericalangle KPE|}$. Díky pravým úhlům u bodů E a F (paty kolmic) víme, že $|\sphericalangle FKP| = \beta$ a $|\sphericalangle EKP| = \gamma$. Jelikož K leží na a-symediáně a vzdálenost od přímky se měří na komici, platí $\frac{|KF|}{|KE|} = \frac{c}{b}$. Dohromady dostáváme

$$\frac{|FP|}{|PE|} = \frac{|FK|}{|EK|}\frac{\frac{\sin\beta}{\sin|\sphericalangle FPK|}}{\frac{\sin\gamma}{\sin|\sphericalangle KPE|}} = \frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma} = 1,$$

což plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC (v předposlední rovnosti jsme využili, že úhly, jejichž součet je 180°, mají stejnou hodnotu sinu).

[6] Tento název je sice krásně český, ale téměř výhradně se místo něj používá anglický *pedal triangle*.



Pro opačnou implikaci uvažme bod X, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka, a uvažme stejnou konstrukci jako na obrázku (pro jednoduchost použijeme i stejné označení, pouze místo K máme X). Postupem podobným tomu z předchozí části můžeme vyjádřit poměr délek XE a XF jako

$$\frac{|XF|}{|XE|} = \frac{|FP|}{|PE|} \frac{\frac{\sin|\sphericalangle FPX|}{\sin\beta}}{\frac{\sin|\sphericalangle XPE|}{\sin\gamma}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b},$$

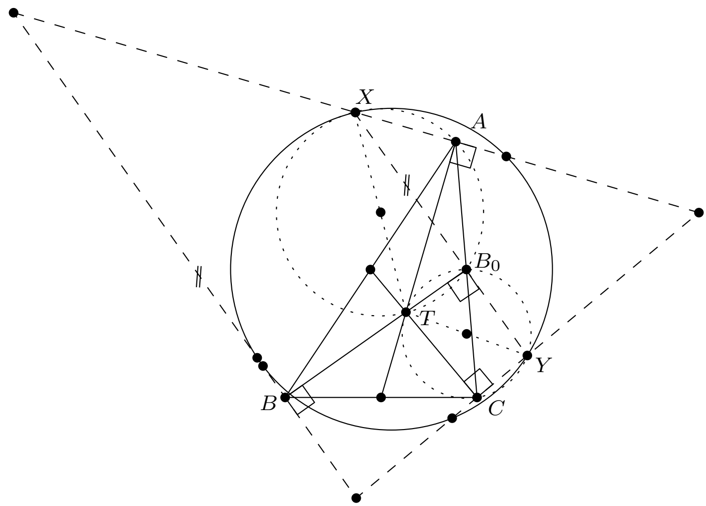
z čehož vyvodíme, že X leží na a-symediáně. Analogicky leží i na zbylých dvou symediánách, tedy platí $X = K$.

Ukážeme si, jak lze teorii získanou v této části aplikovat na úlohu, jejíž formulace obsahuje jen ty nejzákladnější středy, a přesto je k jejímu řešení potřeba[7] teorie z této části seriálu.

Příklad. Tři těžnice dělí trojúhelník ABC na šest trojúhelníků. Ukažte, že jejich opsiště leží na jedné kružnici.

Řešení. Vrcholy A, B a C veďme kolmice na příslušné těžnice. Tak vznikne trojúhelník, v němž je ABC úpatnicový trojúhelník bodu T, který je v něm těžištěm. Z minulého tvrzení plyne, že T je Lemoinův bod v novém trojúhelníku.

[7] Pravděpodobně; autorům není znám jednodušší důkaz.



Když se ale podíváme na obrázek, jsou opsiště malých trojúhelníčků nějak divně uvnitř a kružnice, kterou by měly určovat, nevypadá povědomě. Není ale třeba si zoufat. Uvažujme stejnolehlost se středem v T (jako vždy stejnolehlíme z Lemoinova bodu) a koeficientem 2. Kam se při ní zobrazí našich šest opsišť? Každé z nich leží na osách stran malých trojúhelníčků, jejich obrazy tedy budou ležet na přímkách dvakrát vzdálenějších od T. Speciálně každý z obrazů opsišť leží na osách spojnic vrcholů s těžištěm, které od těžiště dvakrát vzdálíme. To znamená, že leží na stranách nového trojúhelníku, protože ten má strany kolmé na těžnice v ABC.

Nyní stačí dokázat, že těchto šest bodů na obvodu trojúhelníka, v němž něco víme o Lemoinově bodu, leží na kružnici. Zní to povědomě? Asi tušíte, že naše kružnice je jedna z Tuckerových. Označme B_0 střed strany AC a zobrazená opsiště trojúhelníků ATB_0 a CTB_0 po řadě X a Y (viz obrázek). Obě původní opsiště leží na ose úsečky TB_0, takže X a Y leží na kolmici na b-těžnici vedené bodem B_0. To je jedna ze stran velkého trojúhelníka (kolmice na b-těžnici vedená bodem B) zobrazená ve stejnolehlosti se středem v T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Analogicky to platí i pro zbylé dvě dvojice sousedních trojúhelníčků. Tedy naše šestice bodů leží na Tuckerově kružnici ve velkém trojúhelníku odpovídající koeficientu $-\frac{1}{2}$.

Cvičení. (Kružnice šesti bodů) Z paty výšky z vrcholu A trojúhelníku ABC spustíme kolmice na strany AB a AC a uvážíme jejich paty. Podobně sestrojíme další čtyři paty. Dokažte, že všech šest takto získaných bodů leží na kružnici.

Návod. Je to jedna z Tuckerových kružnic. Spojte body lomenou čarou střídavě rovnoběžnou a antirovnoběžnou s protější stranou.

Cvičení. Mějme různostranný trojúhelník ABC, jeho těžiště označme T a kolmiště H. Jeho vrcholy veďme kolmice na příslušné těžnice (jako v minulém příkladu). Dokažte, že těžiště vzniklého trojúhelníka leží na přímce TH.

Návod. Použijte Lemoine theorem stejně jako v posledním příkladě. Vzpomeňte si na Eulerovu přímku a Six feet theorem.

Další kamarádi

Těsně před koncem minulého dílu jsme tvrdili, že z kamarádů nejdůležitějších středů trojúhelníka nám chybí jen kamarád těžiště, neboli Lemoinův bod. Vzhledem k času, který jsme s ním strávili, jej tímto prohlašujeme za dostatečně prozkoumaný. Z těch pokročilejších středů jsme ještě nemluvili o kamarádovi středu Feuerbachovy kružnice F. Následující tvrzení to alespoň informativně napravuje, nebudeme ho totiž dokazovat.

Tvrzení. *Kamarád bodu F (středu Feuerbachovy kružnice) je průsečík přímek AO_A, BO_B a CO_C, kde O_A je opsiště trojúhelníku OBC atd.*

A kde ještě můžeme potkat kamarády? Jste-li alespoň trochu obeznámeni s elipsami, můžete si dokázat následující tvrzení.

Tvrzení. *Ohniska elipsy vepsané do trojúhelníku spolu kamarádí.*

A nakonec jedno malé okénko do třetího rozměru.

Cvičení. Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E. Koule jemu připsaná vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F. Dokažte, že E a F jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. (MKS–33–3j–7)

Návod. Dokažte izogonalitu v jednom vrcholu. Vepsaná koule a připsaná koule jsou stejnolehlé podle D. Pomocí toho a stejných tečen najděte shodné trojúhelníky a dopočítejte. Podívejte se na řešení. :-)

Kdybyste stále nebyli zcela přesvědčeni, že jsou kamarádi v geometrii trojúhelníka opravdu na každém rohu, další kapitolka by to mohla napravit.

Gergonnův a Nagelův bod

Abychom neměli v seriálu málo exoticky znějících jmen, přidáme si dvě další.

Mějme trojúhelník ABC. Dotyky jeho kružnice vepsané se stranami BC, AC a AB označíme po řadě D, E, F a dotyky kružnic připsaných ke stejným stranám po řadě P, Q a R. Z Cevovy věty (viz začátek sekce o kamarádech z prvního dílu) plyne, že se úsečky AD, BE a CF protínají v jednom bodě. Opravdu, jelikož se jedná o kružnici vepsanou, platí díky stejně dlouhým úsekům tečen $|AF| = |AE|$, $|BF| = |BD|$ a $|CD| = |CE|$, takže poměr z Cevovy věty vyjde 1. Tento průsečík nazýváme *Gergonnovým*[8] *bodem* a značíme jej G. Jelikož jsou na každé straně body dotyku vepsané a opsané kružnice symetrické podle středu oné strany (viz Tvrzení 48 z prvního dílu), plyne z Cevovy věty, že se úsečky AP, BQ a CR protínají v jednom bodě. Ten nazýváme *Nagelův*[9] *bod* a značíme jej N.

Cvičení. Při značení zavedeném výše platí, že Gergonnův bod v trojúhelníku ABC je Lemoinovým bodem trojúhelníka DEF.

Návod. Vzpomeňte si na Tvrzení o průsečíku tečen z minulého dílu.

Cvičení. (těžší) Nagelův bod trojúhelníku ze středních příček je vepsištěm původního trojúhelníku. Dokažte.

Návod. Nejprve dokažte pomocné tvrzení: Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a body X, Y leží postupně na jeho stranách BC a CD tak, že $|BX| = |DY|$. Označme Z průsečík úseček BY a DX. Dokažte,

[8] Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) byl francouzský matematik a logik.
[9] Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) byl německý matematik a geometr.

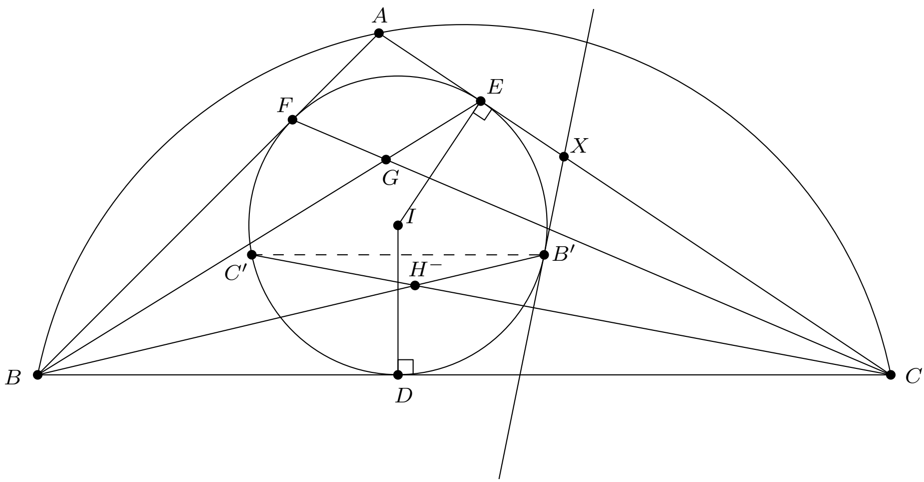
že přímka AZ je osou úhlu BAD. Toto tvrzení aplikujte na každý z rovnoběžníků vzniklých v daném trojúhelníku po dokreslení středních příček.

Důsledek. *Jelikož je Nagelův bod trojúhelníka ze středních příček (čili vepsiště původního trojúhelníka) obrazem Nagelova bodu původního trojúhelníka ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $-\frac{1}{2}$, leží body I, T a N na jedné přímce v poměru $|IT| : |TN| = 1 : 2$. Tato přímka se nazývá Nagelova přímka.*

Před následujícími dvěma tvrzeními je dobré si připomenout, že dvě kružnice (až na degenerované případy) mají dva středy stejnolehlosti, z nichž jedna má kladný koeficient a druhá záporný.

Tvrzení. *Kamarádem Gergonnova bodu G je střed záporné stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na vepsanou.*

Důkaz. Na úvod poznamenejme, že tento důkaz funguje pouze pro situace podobné té na našem obrázku, ostatní případy nebudeme rozebírat. Označme D, E a F doteky vepsané kružnice po řadě se stranami BC, AC a AB. Gergonnův bod označme G, obraz bodu E v osové souměrnosti podle osy vnitřního úhlu ABC označme B' a obraz bodu F v osové souměrnosti podle osy vnitřního úhlu ACB označme C'. Jelikož je vepsaná kružnice osově souměrná podle osy úhlu, leží body B' a C' na ní. Přímky BB' a CC' jsou izogonály přímek BG a BE, takže jejich průsečík je kamarád bodu G. Označme jej sugestivně H^-. Pokud dokážeme, že je přímka $B'C'$ rovnoběžná s BC, budeme mít vyhráno, protože pak bude platit $\frac{|H^-B|}{|H^-B'|} = \frac{|H^-C|}{|H^-C'|}$. Z toho a z analogických tvrzení pro analogicky definovaný bod A' dostaneme, že stejnolehlost se středem v H^- mající takový (rozmyslete si, že musí být záporný) koeficient, aby se bod B zobrazil na B', zobrazuje i C na C' a A na A'. Zobrazuje na sebe tedy i kružnice opsané těmto trojicím, což jsou přesně kružnice opsaná a vepsaná.



Vraťme se k důkazu zmíněné rovnoběžnosti. Vyjádříme velikost úhlu DIB'. Platí $|\sphericalangle DIB'| = |\sphericalangle DIE| - |\sphericalangle EIB'|$. Z deltoidu $IDCE$ vidíme, že $|\sphericalangle DIE| = 180° - \gamma$. Dále nechť tečna ke kružnici vepsané vedená bodem B' protne stranu AC v bodě X. Vzhledem ke konstrukci bodu B' musí být tato tečna osově souměrná s přímkou AC podle osy úhlu ABC. Z toho dopočítáme $|\sphericalangle EIB'| = |\sphericalangle B'XC| = 180° - (360° - 2\alpha - \beta)$. Získané vztahy dosadíme do prvního výpočtu a dostáváme

$$|\sphericalangle DIB'| = 180° - \gamma - 180° + 360° - 2\alpha - \beta = 180° - \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že tato hodnota nezávisí na β a γ, musí být ze symetrie stejná jako velikost úhlu DIC'. Jelikož je úsečka ID kolmá na BC, plyne z dokázaného, že je úsečka $B'C'$ opravdu rovnoběžná s BC, a jsme hotovi.

Z podobných úvah vyplývá následující tvrzení.

Tvrzení. *Kamarádem Nagelova bodu N je střed kladné stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na vepsanou.*

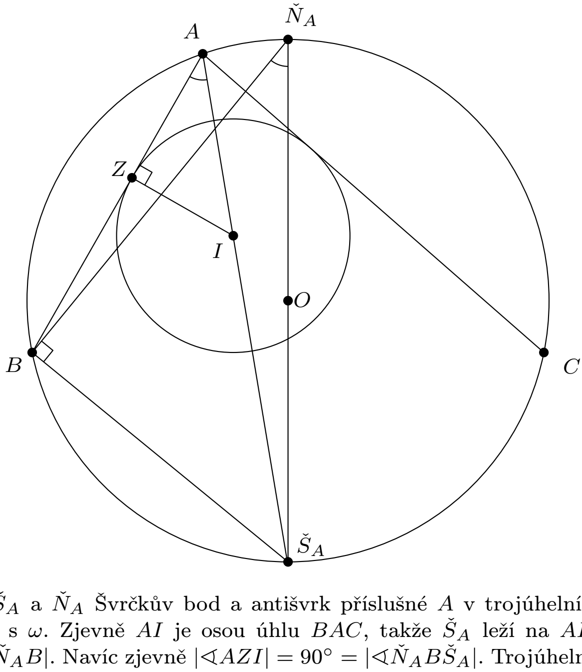
Ponceletovo porisma

Kružnice je zakulacená přímka s dírou uprostřed. – neznámý autor

V tomto oddíle bude třeba zavzpomínat na předcházející díl. Konkrétně budeme pracovat se Švrčkovými body, antišvrky a některými jejich vlastnostmi.

Věta. *(Eulerova formule, Ponceletovo porisma) Nechť kružnice ω se středem I a poloměrem r leží uvnitř kružnice Γ se středem O a poloměrem R. Nechť A, B a C jsou body na Γ takové, že AB i AC se dotýkají ω. Potom se BC dotýká ω právě tehdy, když $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$.*

Důkaz. Zjevně platí, že BC se dotýká ω právě tehdy, když je ω kružnice vepsaná trojúhelníku ABC.



Označme jako $\check{S}_A$ a $\check{N}_A$ Švrčkův bod a antišvrk příslušné A v trojúhelníku ABC. Dále buď Z bod dotyku AB s ω. Zjevně AI je osou úhlu BAC, takže $\check{S}_A$ leží na AI. Proto $|\sphericalangle IAZ| = |\sphericalangle \check{S}_A AB| = |\sphericalangle \check{S}_A \check{N}_A B|$. Navíc zjevně $|\sphericalangle AZI| = 90^\circ = |\sphericalangle \check{N}_A B \check{S}_A|$. Trojúhelníky AZI a $\check{N}_A B \check{S}_A$ jsou tudíž podobné.

Proto

$$|AI| \cdot |B\check{S}_A| = |\check{S}_A \check{N}_A| \cdot |IZ| = 2Rr.$$

Zároveň z mocnosti I ku Γ plyne

$$|AI| \cdot |I\check{S}_A| = R^2 - |OI|^2.$$

Z toho vyvodíme, že $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ právě tehdy, když $|I\check{S}_A| = |B\check{S}_A|$. Ale protože I leží na $A\check{S}_A$, je I vepsiště trojúhelníku ABC právě tehdy, když $|I\check{S}_A| = |B\check{S}_A|$. Tím máme hotovo.

Implikaci „pokud ω je kružnice vepsaná, potom $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$“ se obvykle říká Eulerova formule,[10] zatímco implikace „pokud $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$, potom ω je kružnice vepsaná“ se občas označuje jako Ponceletovo porisma. Toto označení je ovšem poněkud zavádějící, protože Ponceletovo porisma je daleko obecnější tvrzení, které nemluví jen o trojúhelnících, ale i o mnohoúhelnících a dokonce i o ještě obecnějších útvarech.

Protože se jedná o velmi zajímavou geometrii, v následujících několika odstavcích si Ponceletovo porisma přiblížíme v jeho plné kráse. Musíme se ovšem připravit na pár věcí, které nás tam čekají.

Zaprvé překročíme pravomoce dané jménem seriálu, tj. nepůjde nám pouze o geometrii trojúhelníka, nýbrž i o daleko různorodější figury. Vězte, že se za toto pro nic za nic porušení pranic tradic a hranic omlouváme, a pokud to váš hněv nesmíří, budeme se i náležitým způsobem káti.[11]

Zadruhé bude velká část následujícího výkladu podána způsobem, který bychom lidově nazvali „mlha“ nebo „mávání rukama“, tj. leccos bude podáno neformálně a s nevelkou dbalostí na detaily. Je tomu tak proto, že pro přesné definice, formálně správné popisy a řádný důkaz bychom potřebovali strašidelná slova jako „limita“ a „integrál“, která zde nechceme (a kvůli nedostatku místa ani nemůžeme) zavádět.[12] Navíc bychom se tím příliš ponořili do algebry a místo kreslení neobvyklých obrázků bychom jenom přidávali a přeskupovali symboly, dokud by to nevyšlo. A to přece nikdo nechce.

Zatřetí může být nadcházející část z výše uvedených důvodů poněkud obtížná. Nebojte se ji při prvním (a třeba i jakémkoliv dalším) čtení přeskočit. Slibujeme, že žádná seriálová úloha nebude stavět na ní. Uvádíme ji pouze proto, že nám přijde dobrá.

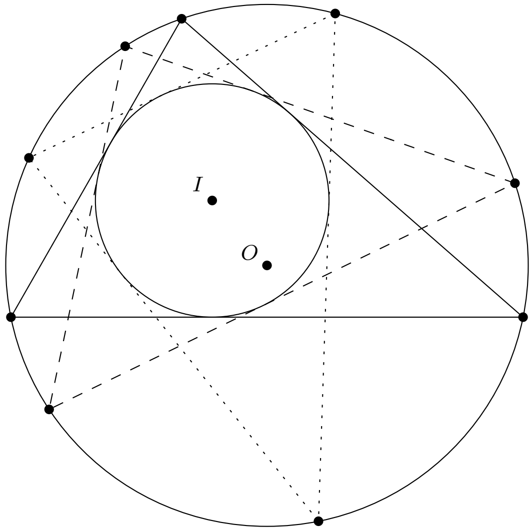
Nyní se už konečně pusťme do práce.

Na výše uvedené verzi Ponceletova porismatu nás nebude příliš zajímat vztah $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$, ten je spíše náhodný. Uchopitelnější myšlenka, která odtud plyne, je následující: Představte si, že vám někdo dal obrázek, na kterém jsou nakresleny dvě kružnice. Dostanete za úkol nakreslit trojúhelník, pro který je jedna ze zadaných kružnic kružnicí opsanou a druhá kružnicí vepsanou. Pokud byste měli k dispozici i jeden z vrcholů tohoto trojúhelníka, pak je to jednoduché – z prvního vrcholu udělat tečnu k vepsané, tu protnout s opsanou, tím získat druhý vrchol a dál pokračovat stejně. Jenže co když ten první vrchol nemáte? Inu, Ponceletovo porisma říká, že to nevadí – pokud tento postup funguje v nějakém bodě kružnice opsané, pak funguje v *každém* jejím bodě. Platí totiž, že libovolném bodě uspějeme právě tehdy, když $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$, což je nezávislé na volbě bodu.

[10]Způsob, jakým jsme ji zavedli, je ovšem poněkud nestandardní a možná z něj úplně dobře není vidět, co tato formule vlastně říká. Klasické znění je následující: Pokud ABC je trojúhelník s vepsištěm I, opsištěm O, a poloměry kružnice vepsané a opsané postupně r a R, pak $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$.

[11]Své kreativní návrhy odpovídajících trestů, způsobů pokání a mučicích technik můžete zasílat na e-mail *mks@mff.cuni.cz*.

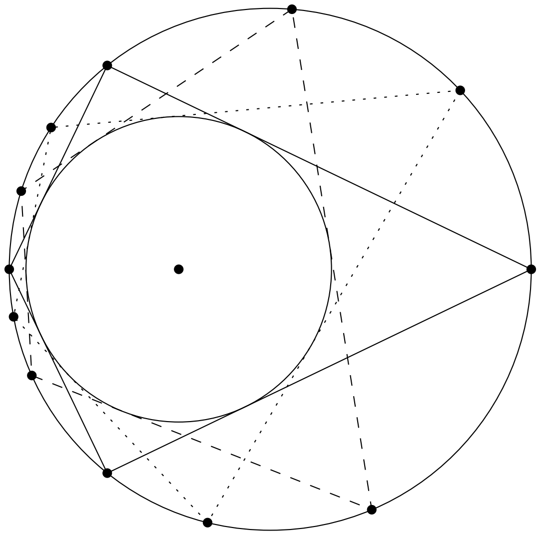
[12]Místo nich budeme používat slova jako „malý“, „skoro“ a „přibližně“.



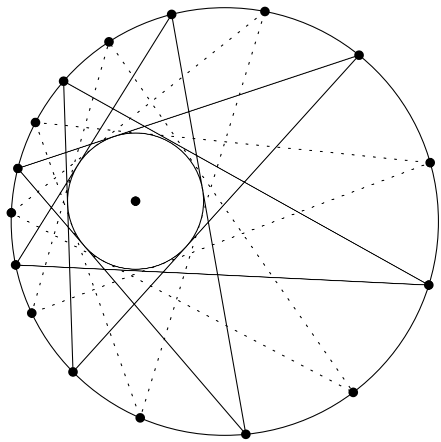
$k = 3$, $n = 1$

Nyní si Ponceletovo porisma zobecníme. Představte si, že jste dostali stejnou úlohu jako předtím (máte tedy na papíře nakreslenou kružnici Γ, která má být opsaná, a v ní menší kružnici ω, která má být vepsaná[13]), jen nemáte za úkol sestrojit trojúhelník, nýbrž obecnější útvar – uzavřenou lomenou čáru. No, co dělat, začnete v náhodném bodě a potom, co nakreslíte k úseček a celou kružnici Γ obkroužíte n-krát, se skutečně náhodou vrátíte do výchozího bodu. Inu, obecné Ponceletovo porisma tvrdí, že pokud vám to jednou takhle vyšlo, pak ať začnete kdekoliv, vždy se po k úsečkách a n obejitích celé kružnice vrátíte na výchozí pozici. (Všimněte si, že výše uvedené tvrzení je speciální případ pro $k = 3$ a $n = 1$.)

[13] Ve skutečnosti se nemusí ani jednat o kružnice; aby tvrzení fungovalo, stačí uvažovat kuželosečky. Ale to už je skutečně nad rámec našeho seriálu.



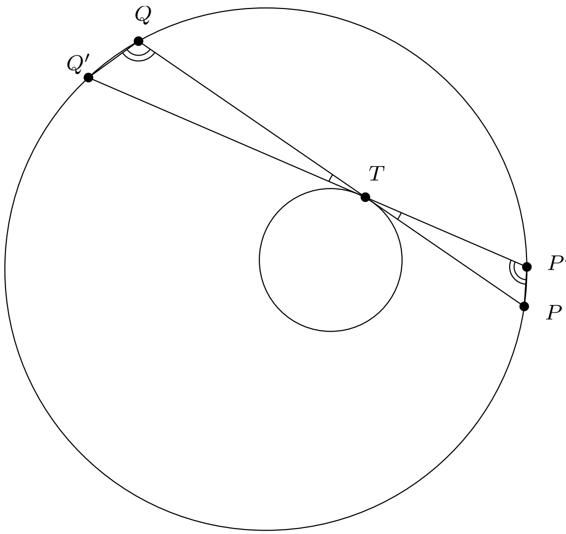
$k = 4$, $n = 1$



$k = 8$, $n = 3$

Důkaz je vskutku podivuhodný. Představte si, že po obvodu Γ postavíte zeď. A ne jen tak ledajakou, nýbrž takovou, která má v každém bodě X kružnice Γ výšku rovnou $\frac{1}{d(X)}$, kde $d(X)$ značí délku tečny z X k ω. K čemu vám taková zeď bude?

Uvažujte tětivu PQ kružnice Γ. Tětiva PQ rozděluje zeď na dvě části. Nechť $S(PQ)$ je povrch té části zdi, která přísluší oblouku Γ směřujícímu od P do Q po směru hodinových ručiček. Důležité pozorování je, že pokud se PQ dotýká ω, pak hodnota $S(PQ)$ je nezávislá na konkrétní poloze PQ. To rozhodně není vidět, a právě tuto část nebudeme dělat příliš rigorózně. Přesto se pokusíme ji trochu přiblížit.



Vezměme si dvě tětivy, PQ a $P'Q'$, které se dotýkají ω, a to konkrétně takové, aby body P a P' byly u sebe blízko (BÚNO tak, že P' je kousek po směru hodinových ručiček od P). Protože $S(PQ)$ i $S(P'Q')$ obě obsahují $S(P'Q)$, stačí ukázat, že $S(PP') = S(QQ')$. Buď T průsečík PQ a $P'Q'$. Všimněme si, že délka oblouku PP' je skoro rovna $|PP'|$ a analogicky délka oblouku QQ' je téměř rovna $|QQ'|$. Navíc T je velmi blízko bodům dotyku PQ a $P'Q'$ s ω, takže[14] $d(P) \approx |PT| \approx d(P')$ a analogicky $d(Q) \approx |Q'T| \approx d(Q')$. Proto $S(PP')$ a $S(QQ')$ umíme přibližně vyjádřit jako $\frac{|PP'|}{|PT|}$ a $\frac{|QQ'|}{|Q'T|}$. Jenže tyto dvě hodnoty jsou stejné, protože trojúhelníky $PP'T$ a $Q'QT$ jsou podobné.

Mohlo by se zdát, že jsme nic objevného nezjistili. Nějaké aproximace[15] $S(PP')$ a $S(QQ')$ jsou sice stejné, ale protože $S(PP')$ i $S(QQ')$ jsou (z toho, jak jsme volili PQ a $P'Q'$) takřka nula, tak dává jen smysl, že nějaké dva odhady jsou stejné.

Trik je v tom, že si rozkrájíme oblouk PP' na spoustu malinkatých obloučků a jejich koncové body spojíme. Tím dostaneme lomenou čáru jdoucí z P do P', která je složená ze spousty malinkatých úseček. Protože naše aproximace oblouku funguje tím lépe, čím menší oblouk zkoumáme, je na každém obloučku naše přiblížení *fakt dobré*. Důležité je, že není dobré pouze ve smyslu „rozdíl naší aproximace a správné hodnoty je fakt blízko nule“, nýbrž i ve smyslu „podíl naší aproximace a správné hodnoty je fakt blízko jedné“. To totiž znamená, že pokud všechny přibližné hodnoty přes všechny obloučky sečteme, dostaneme hodnotu, která bude $S(PP')$ stále aproximovat *fakt dobře*.

K tomuto přiblížení ovšem existuje odpovídající přiblížení oblouku QQ', které dle předchozího dává stejnou hodnotu. Navíc na QQ' budou příslušné obloučky taktéž malinké, takže i tam bude naše aproximace fakt dobrá. To znamená, že $S(PP')$ i $S(QQ')$ umíme libovolně dobře aproximovat stejnou hodnotou. To ale už potom musí znamenat, že $S(PP') = S(QQ')$.

No dobře, to je sice hezké, ale co z toho? Inu, důležité je, že pro každou tětivu PQ dotýkající se ω je $S(PQ)$ rovno nějakému pevnému c. Pokud označíme povrch celé zdi jako z a budeme předpokládat, že se po k přesunech po tečně dostaneme do výchozího bodu a obejdeme přitom kružnici n-krát, pak musí platit $ck = nz$. Potom ale ať začneme kdekoliv, pak během k kroků projdeme kolem zdi o celkovém povrchu $ck = nz$. Ale to přesně znamená, že ujdeme n koleček, což je to, co jsme chtěli ukázat.

[14]Znakem $\approx$ myslíme „je přibližně rovno“.

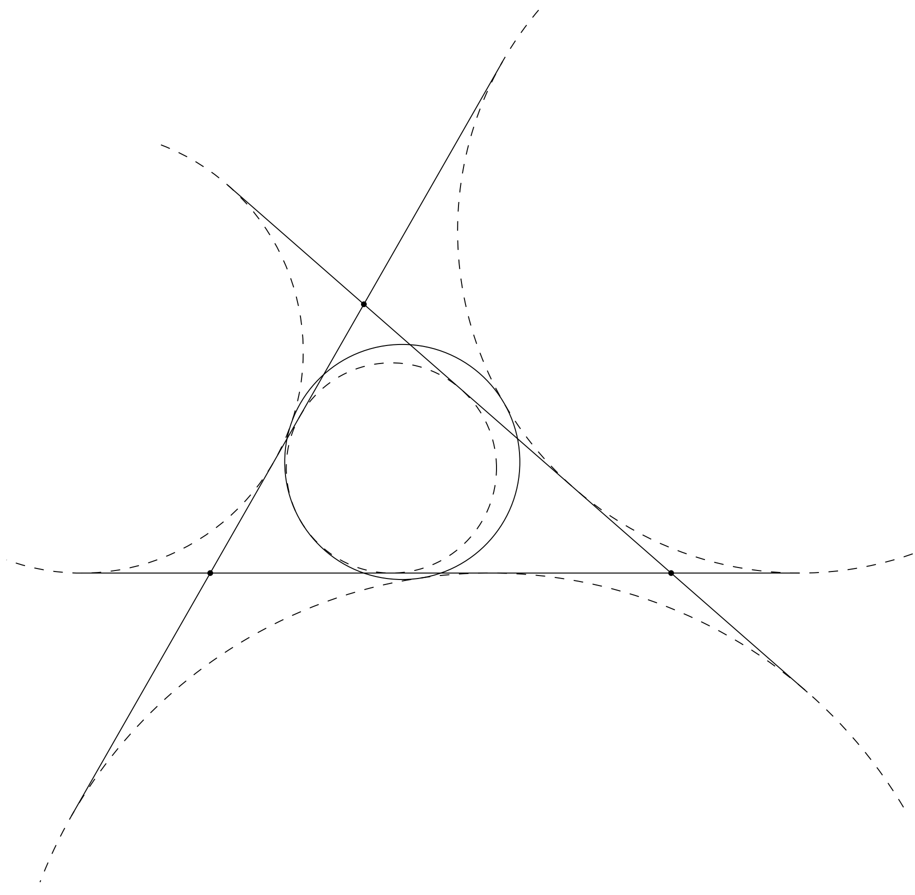
[15]Aproximace znamená „přibližné vyjádření“.

Fonteného věty

Dyť ty přiblblý citáty stejně nikoho nezajímaj'. – Rado, psa[16] *seriál ve čtyři ráno*

Někteří z vás už zajisté slyšeli o následující větě:

Věta. *(Feuerbachova) Kružnice vepsaná i všechny kružnice připsané se dotýkají Feuerbachovy kružnice.*



[16]Od tohoto slovesného patvaru se korektorská sekce distancuje.

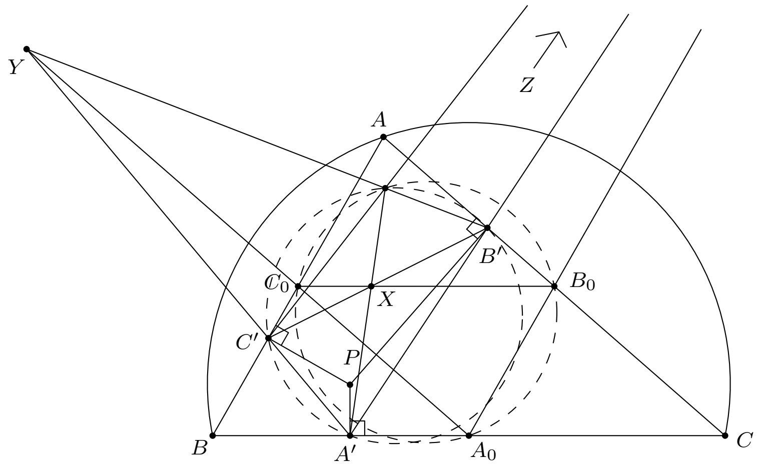
Důkazů této věty je několik a všechny jsou vcelku obtížné. Když už si s ní budeme tedy dávat tu práci, proč rovnou nedokázat něco obecnějšího? Povšimněme si, že kružnice vepsaná a připsané jsou kružnice opsané trojúhelníků postavených z projekcí vepsiště, respektive připsišť na strany trojúhelníka. Budeme se tedy zajímat o to, kdy pro bod P, jehož projekce na přímky BC, CA a AB jsou postupně A', B' a C', platí, že se kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ dotýká Feuerbachovy kružnice.

Všimněme si, že o zmíněné kružnici opsané už něco víme. Six feet theorem nám totiž říká, že splývá s analogickou kružnicí pro je kamaráda bodu P. Tedy bod P „vyhovuje“ právě tehdy, když „vyhovuje“ jeho kamarád. Nakonec si všimněme, že O a H se možná dají považovat za vyhovující, protože by se tak trochu dalo říci, že kružnice se dotýká sama sebe. Tato drobná pozorování nás vedou k následující (správné) domněnce:

Věta. *(Zobecněná Feuerbachova) Buď ABC trojúhelník s opsištěm O a dále P libovolný bod s kamarádem P'. Buďte A', B' a C' paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB. Potom se kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ dotýká Feuerbachovy kružnice trojúhelníku ABC právě tehdy, když P, O a P' leží na jedné přímce.*

Této větě se také říká třetí Fonteného věta. K jejímu důkazu budeme potřebovat druhou Fonteného větu a k důkazu té je zase zapotřebí věta první. Vezměme je tedy pěkně popořadě.

Věta. *(První Fonteného) Nechť je dán trojúhelník ABC. Nechť A_0, B_0 a C_0 jsou po řadě středy stran BC, CA a AB. Buď P libovolný bod a označme A', B' a C' postupně paty kolmic z P na přímky BC, CA, AB. Dále označme X průsečík přímky B_0C_0 s $B'C'$, Y průsečík přímky A_0C_0 s $A'C'$ a Z průsečík přímky A_0B_0 s $A'B'$. Pak platí, že přímky $A'X$, $B'Y$ a $C'Z$ se protínají v jednom z průsečíků kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$.*

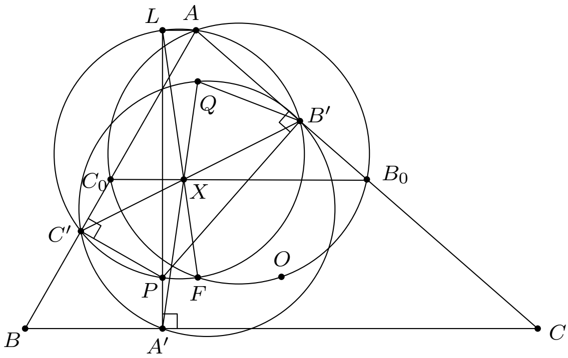


Důkaz. Nazvěme průsečík přímky $A'X$ s Feuerbachovou kružnicí (tj. kružnicí opsanou $A_0B_0C_0$) jako Q. Ukážeme, že Q leží na kružnici opsané trojúhelníku $A'B'C'$.

Zadefinujeme si několik pomocných bodů. Označme jako F druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům $AB'C'$ a AB_0C_0 a jako L průsečík přímky $A'P$ s kružnicí opsanou trojúhelníku $AB'C'$. Ukážeme, že LF prochází bodem X a $A'Q$ je obraz LF při překlopení přes B_0C_0. Potom bude z mocnosti X ke kružnici opsané trojúhelníku $AB'C'$ platit

$$|XQ| \cdot |XA'| = |XF| \cdot |XL| = |XB_0| \cdot |XC_0|,$$

z čehož již plyne, že Q leží na kružnici opsané trojúhelníku $A'B'C'$.



Povšimněme si, že kružnice opsaná trojúhelníku $AB'C'$ je kružnicí nad průměrem AP. Tedy $PL \perp AL$. Ale zároveň $PL \perp BC$. Proto $AL \parallel BC$.

Díky tomu platí,[17] že přímka LF svírá s přímkou B_0C_0 stejný úhel jako s přímkou AL. Tento úhel ale umíme upravit na $|\sphericalangle ALF| = |\sphericalangle AC'F|$. Abychom ukázali, že L, X a F leží na jedné přímce, chceme ukázat, že přímka FX svírá s B_0C_0 tentýž úhel, tedy že $|\sphericalangle AC'F| = |\sphericalangle B_0XF|$. To je ovšem ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník $XC_0C'F$ je tětivový. A tuto skutečnost ukážeme jednoduchým vyúhlením:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle C_0FC'| &= |\sphericalangle AFC'| - |\sphericalangle AFC_0| \\
&= |\sphericalangle AB'C'| - |\sphericalangle AB_0C_0| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle XB'B_0| - |\sphericalangle B'B_0X| \\
&= |\sphericalangle B_0XB'| \\
&= |\sphericalangle C_0XC'|.
\end{aligned}$$

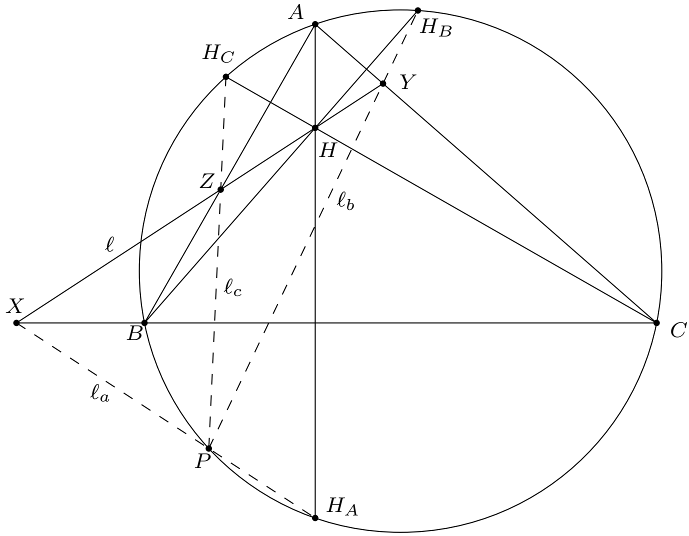
Tím jsme tedy ukázali kolineárnost bodů L, X a F. Zbývá ukázat, že se při osové souměrnosti podle osy B_0C_0 zobrazí A' do L a F do Q. První z těchto souměrností plyne z toho, že $AL \parallel B_0C_0 \parallel BC$, B_0C_0 je střední příčka a $LA' \perp B_0C_0$. Druhá vyplývá z toho, že díky kolineárnosti L, X a F je obrazem F průsečík obrazu přímky LX s obrazem kružnice opsané AB_0C_0. Přitom obrazem L je A', obrazem X je X a obrazem kružnice opsané $\triangle AB_0C_0$ je kružnice opsaná $A_0B_0C_0$. Ale to je přesně definice Q. Tím máme hotovo.

Důkaz celý ovšem zatím hotov není. Ukázali jsme, že AX prochází průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$. Analogicky totéž platí pro BY a CZ. Zatím ale nevíme, že se ve všech třech případech jedná o ten samý průsečík. Z důvodu přehlednosti nebudeme tuto skutečnost dokazovat hned, nýbrž si její zdůvodnění schováme do důkazu druhé Fonteného věty.

Proč část důkazu odkládáme místo toho, abychom se s ní vypořádali okamžitě? To proto, že k ní budeme potřebovat pomocné lemma, se kterým se pak tato část dokáže najednou s druhou Fonteného větou.

Lemma. *Buď ℓ přímka procházející skrz kolmiště H trojúhelníku ABC. Označme si jako ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c obrazy přímky ℓ přes přímky BC, CA a AB. Pak se ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c protínají v jednom bodě P na kružnici opsané $\triangle ABC$. Tento bod se nazývá Anti-Steinerův bod přímky ℓ vzhledem k trojúhelníku ABC. Toto přiřazení je navíc prosté, tj. žádné dvě různé přímky procházející skrze H nemají stejný Anti-Steinerův bod.*

[17] V případě, že konfigurace vypadá jako na obrázku – jiné případy se řeší analogicky, respektive úplně stejně, pokud umíte používat orientované úhly.



Důkaz. Opět uvažujme konfiguraci jako na obrázku, ostatní se řeší podobně. Označíme si jako X, Y a Z průsečíky ℓ s přímkami BC, CA a AB. Dále budeme obrazy H přes přímky BC, CA a AB nazývat H_A, H_B a H_C. Z prvního dílu víme, že H_A, H_B a H_C leží na kružnici opsané $\triangle ABC$.

Zjevně ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c splývají s H_AX, H_BY a H_CZ. Nechť H_AX, H_BY a H_CZ protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodech P_A, P_B a P_C. Ukážeme, že $P_B = P_C$, zbytek by se provedl analogicky.

Budeme prostě a jednoduše trochu úhlit:

$$\begin{aligned}
180^\circ - |\sphericalangle BAC| &= |\sphericalangle AYZ| + |\sphericalangle AZY| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle CYH_B| + 180^\circ - |\sphericalangle BZH_C| \\
&= |\sphericalangle ACH_B| + |\sphericalangle P_BH_BC| + |\sphericalangle ABH_C| + |\sphericalangle BH_CP_C| \\
&= |\sphericalangle ACH| + |\sphericalangle P_BAC| + |\sphericalangle ABH| + |\sphericalangle BAP_C| \\
&= (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) + |\sphericalangle P_BAC| + (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) + |\sphericalangle BAP_C|,
\end{aligned}$$

neboli $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAP_C| + |\sphericalangle P_BAC|$, což už implikuje, že $P_B = P_C$.

Abychom ukázali jednoznačnost bodu P, stačí si všimnout, že $|\sphericalangle P_CH_CC| = |\sphericalangle H_CHX|$, tedy velikost oblouku PC je jednoznačně dána úhlem, který ℓ svírá s výškou z C.

S tímto lemmatem jednoduše dokážeme druhou Fonteného větu a doděláme důkaz té první:

Věta. *(Druhá Fonteného) Mějme pevně zvolenou přímku ℓ procházející opsištěm O trojúhelníku ABC. Nechť se P pohybuje po ℓ. Pak se poloha průsečíku kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$ nemění.*

Důkaz. Všimněme si, že O je kolmiště $\triangle A_0B_0C_0$. Protože ℓ prochází bodem O, nabízí se možnost, že Q v důkazu první věty by mohl být Anti-Steinerovým bodem příslušným ℓ a $A_0B_0C_0$. Pokud toto dokážeme, pak zjevně budeme hotovi jak s první, tak s druhou Fonteného větou.

Povšimněme si, že F z minulého důkazu leží na kružnicích nad průměry AP a AO. Tedy $PF \perp AF \perp FO$, z čehož plyne, že F leží na ℓ. Protože Q je obraz F při překlopení přes přímku B_0C_0, leží Q na překlopení ℓ podle B_0C_0. Jedná se proto o průsečík tohoto překlopení a kružnice opsané $\triangle A_0B_0C_0$, tedy je to příslušný Anti-Steinerův bod.

Nyní už přicházíme do velkého grandfinále.

Věta. *(Třetí Fonteného) Buď P' kamarád bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC. Pak se kružnice opsané trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$ dotýkají, právě když body O, P a P' leží na jedné přímce.*

Důkaz. Všimněme si, že pokud jsou přímky PO a $P'O$ různé, pak i jim odpovídající Anti-Steinerovy body Q a Q' jsou různé. To nám přímo dokazuje jednu implikaci.

Při důkazu opačné implikace jsme v situaci, kdy P' leží na OP. V tu chvíli si pomůžeme pohyblivým bodem R, jehož kamaráda označíme R'. Ten se bude pohybovat do P tak, aby R, O a R' neležely na přímce. Pokud si ještě dokreslíme jim příslušné kružnice k_R opsané trojúhelníku $A'_RB'_RC'_R$, pak k_R má s kružnicí opsanou $A_0B_0C_0$ vždy dva průniky – Anti-Steinerův bod OR a Anti-Steinerův bod OR'. Ale OR i OR' se přesunou na stejnou přímku OP. To znamená, že i jim příslušné průsečíky se posunou do jednoho bodu, a tudíž se z nich stane jeden. Protože se vše pohybuje spojitě, nemůže nám najednou vzniknout úplně nový průsečík. To znamená, že $A'B'C'$ a $A_0B_0C_0$ budou mít jen jeden průsečík a máme tedy hotovo.

Cvičení. Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0. Nechť P je bod a paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB jsou A', B' a C'. Obrazy bodů A', B', C' podle A_0, B_0, C_0 si označíme A'', B'', C''. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $A_0B_0C_0$, $A'B'C'$ a $A''B''C''$ se protínají v jednom bodě.

Návod. Uvažte obraz bodu P přes opsiště $\triangle ABC$.

Cvičení. Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0. Nechť P je bod a paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB jsou A', B' a C'. Nechť Q je Anti-Steinerův bod přímky OP vzhledem k trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Označme jako P' kamaráda bodu P a $A''B''C''$ trojúhelník z pat kolmic P' na strany trojúhelníku ABC. Ukažte, že Simsonovy přímky bodu Q vzhledem k trojúhelníkům $A'B'C'$ a $A''B''C''$ jsou rovnoběžné.

Návod. Trochu úhlete a s použitím druhé Fonteného věty ukažte, že jsou obě rovnoběžné s OP.

Závěr

Geometers don't die, they become angles. – neznámý autor.

Gratulujeme! Právě jste se prokousali třetím, pravděpodobně nejsložitějším dílem našeho seriálu. Tím ovšem nekončíme. Geometrie trojúhelníka je velmi rozsáhlý obor a témata v prvních třech dílech musela být pečlivě vybrána s přihlédnutím k mnoha kritériím. Kvůli tomu jsme ovšem museli vypustit mnoho dalších pěkných tématek. Proto na vás v příštích komentářích bude čekat exkluzivní čtvrtý díl. V tom budeme prezentovat několik dalších větiček, tvrzeníček a lemátek. Tentokráte s nimi ovšem nebude z časových důvodů spojená soutěžní série, text bude určený pouze pro nadšené zájemce. Přesto budeme rádi, pokud si i příští část přečtete. Slibujeme, že se vynasnažíme, aby to stálo za to.

K tomuto dílu se asi opět hodí zmínit, že v případě jakýchkoliv otázek byste se neměli zdráhat na nás obrátit. Rádi vám pomůžeme s jakýmikoliv nejasnostmi. Zároveň opět podotýkáme, že v seriálových sériích nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, nýbrž dle tématiky.

Přejeme hodně zdaru!

autoři

Geometrie trojúhelníka 4 – Co se jinam nevešlo

Vítejte u posledního dílu seriálu. Zde si ukážeme několik dalších tvrzení o trojúhelnících. Většina z nich není příliš užitečná v MO, přesto jsou však zajímavá a myslíme si, že určitě stojí za to si je projít.

Než začneme, zopakujeme si značení z předchozích dílů, které zde budeme používat. Konkrétně to, že v trojúhelníku ABC značí I vepsiště; I_A, I_B a I_C připsiště; R, r, r_a, r_b a r_c poloměry kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnic připsaných; $\check{S}_A$, $\check{S}_B$ a $\check{S}_C$ Švrčkovy body; $\check{N}_A$, $\check{N}_B$ a $\check{N}_C$ antišvrky a A_0, B_0 a C_0 středy stran.

Středy středů

Ve druhém dílu jsme si mimo jiné řekli, že Švrčkův bod je středem úsečky spojující vepsiště a příslušné připsiště a že antišvrk je středem úsečky spojující příslušná připsiště. Díky této vlastnosti můžeme o některých dalších bodech prohlásit, že jsou „uprostřed“ mezi jinými, a některé vzdálenosti prohlásit za průměry jiných.

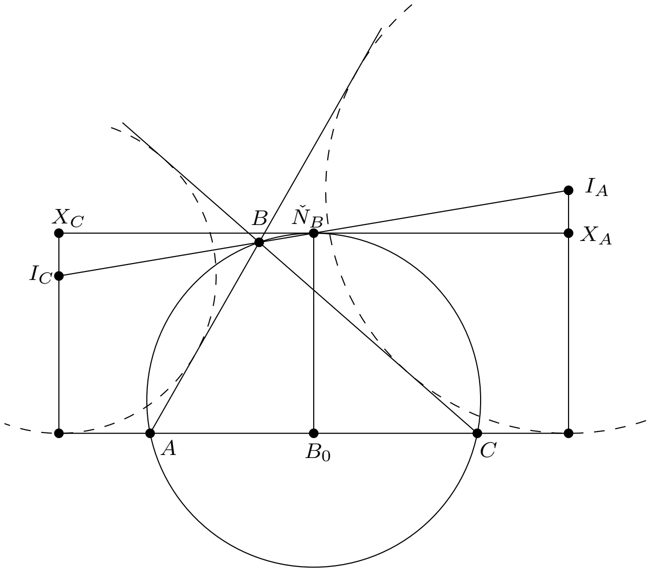
Tvrzení. *Platí* $|\check{N}_B B_0| = \frac{r_a + r_c}{2}$ *a* $|\check{S}_B B_0| = \frac{r_b - r}{2}$.

Toto tvrzení je lehce nahlédnutelné. Pokud si přímku AC nakreslíme vodorovně, pak velikost r_a, resp. r_c, popisuje, jak „vysoko“ je I_A, resp. I_C, nad přímkou AC. Protože $\check{N}_B$ je střed $I_A I_C$, bude nad AC „ve výšce“ $\frac{r_a + r_c}{2}$. Na druhou stranu $\check{N}_B B_0 \perp AC$, takže $|\check{N}_B B_0|$ opravdu vyjadřuje, jak „vysoko“ je $\check{N}_B$ nad AC. To nám dává první rovnost.

Druhou dokazovanou rovnost dostáváme analogicky díky tomu, že r a r_b popisují, jak vysoko jsou I nad a I_B pod AC, že $\check{S}_B$ je středem II_B a že $\check{S}_B B_0$ je úsečka, která měří příslušnou kolmou vzdálenost. Znaménko mínus se v rovnosti objevuje proto, že I je na opačné straně od AC než $\check{S}_B$ a I_B.

Kdybychom chtěli tyto myšlenky převést do formálnější podoby, mohli bychom to udělat takto:

Důkaz. Buď ℓ přímka skrze $\check{N}_B$ rovnoběžná s AC. Nechť X_A a X_C jsou paty kolmic z I_A a I_C na ℓ. BÚNO nechť I_C leží v pásu mezi přímkami AC a ℓ. Protože $I_A X_A \perp \ell \perp I_C X_C$ a $|I_A \check{N}_B| = |I_C \check{N}_B|$, jsou trojúhelníky $I_A X_A \check{N}_B$ a $I_C X_C \check{N}_B$ dle věty *usu* shodné. Proto $|I_A X_A| = |I_C X_C|$. Ale protože vzdálenost mezi přímkami ℓ a AC je $|\check{N}_B B_0|$, platí $|I_A X_A| = r_a - |\check{N}_B B_0|$ a $|I_C X_C| = |\check{N}_B B_0| - r_c$. Z toho už dostaneme první část zkoumaného tvrzení. Druhá část se provede analogicky.



Důsledek. *Platí* $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Důkaz. Úsečka $\check{N}_B\check{S}_B$ obsahuje B_0 a tvoří průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Platí tedy

$$4R = 2 \cdot |\check{N}_B\check{S}_B| = 2 \cdot \left(|\check{N}_B B_0| + |B_0\check{S}_B|\right) = 2 \cdot \left(\frac{r_a + r_c}{2} + \frac{r_b - r}{2}\right) = r_a + r_b + r_c - r.$$

Cvičení. Ukažte, že obvod šestiúhelníku $A\check{S}_C B\check{S}_A C\check{S}_B$ je alespoň $4(R + r)$.

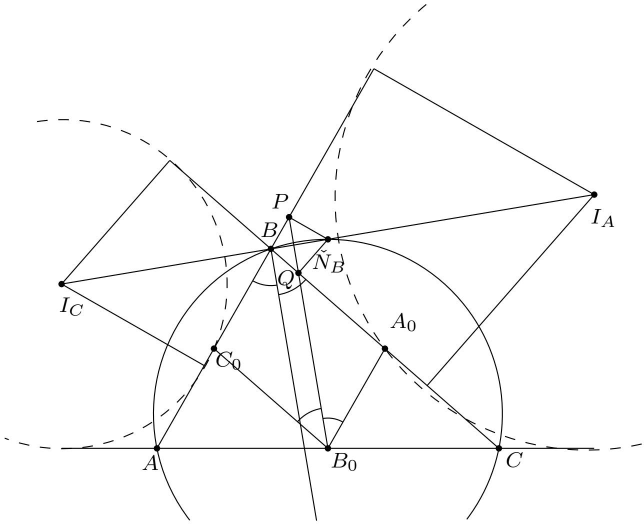
Návod. Uvědomte si, že $|A\check{S}_B| + |\check{S}_B C| = |II_B|$, a použijte $|II_B| \geq r + r_b$ spolu s předchozím důsledkem.

Průměrovat různé délky však lze i jinými způsoby. Příkladem budiž následující tvrzení.

Tvrzení. *Potenční střed kružnic připsaných trojúhelníku* ABC *je vepsištěm trojúhelníku* $A_0B_0C_0$.

Důkaz. Označme si kružnice připsané jako ω_A, ω_B a ω_C. Dále si označme Simsonovy přímky bodů $\check{N}_A$, $\check{N}_B$ a $\check{N}_C$ vzhledem k trojúhelníku ABC jako ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C. Začneme pozorováním, že ℓ_B je chordálou kružnic ω_A a ω_C.

Proč tomu tak je? Přímky AB, BC i CA jsou společné tečny ω_A a ω_C. Vyberme si libovolnou z nich a spusťme na ni kolmice z I_A, $\check{N}_B$ a I_C. Ty ji protnou v bodech X, Y a Z. Protože $\check{N}_B$ je střed I_AI_C, dá se lehce nahlédnout (a dokázat podobně jako v předchozím tvrzení), že Y je střed XZ. Ovšem X a Z jsou doteky ω_A a ω_C s naší vybranou přímkou, takže mocnost bodu Y k ω_A, resp. ω_C, je $|XY|^2$, resp. $|YZ|^2$. Ale protože Y je střed XZ, jedná se o stejnou hodnotu, a tedy Y má k oběma kružnicím stejnou mocnost, neboli leží na jejich chordále. Toto platí pro patu kolmice z $\check{N}_B$ na libovolnou stranu trojúhelníka, takže ℓ_B skutečně splývá s chordálou ω_A a ω_C.



Nyní potřebujeme ukázat, že ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C skutečně procházejí vepsištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Zjevně to stačí ukázat jen pro ℓ_B.

Bod B_0 je patou kolmice z $\check{N}_B$ na AC, takže ℓ_B bodem B_0 prochází. Takže (protože trojúhelník $A_0B_0C_0$ je jen obraz ABC ve stejnolehlosti) stačí ukázat, že přímka ℓ_B je rovnoběžná s osou úhlu ABC.

Nechť P a Q jsou paty kolmic z $\check{N}_B$ na AB a BC. Protože $\check{N}_B$ je středem přímky I_AI_C, platí $|\check{N}_BP| = \frac{|r_a - r_c|}{2} = |\check{N}_BQ|$. (To nahlédneme podobným způsobem jako předchozí tvrzení.) Dále $|\sphericalangle BP\check{N}_B| = 90^\circ = |\sphericalangle BQ\check{N}_B|$, takže z věty *Ssu* jsou trojúhelníky $B\check{N}_BP$ a $B\check{N}_BQ$ shodné. To ale znamená, že $PQ \perp \check{N}_BB$. Protože přímka PQ splývá s přímkou ℓ_B, přímka $\check{N}_BB$ je osou vnějšího úhlu ABC a osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou kolmé, dostáváme to, co jsme chtěli.

Cvičení. Pomocí úvah tohoto typu si uvědomte, proč se na sebe body dotyku kružnice vepsané a připsané vzájemně zobrazují přes střed strany.

Návod. Využijte toho, že se jedná o projekce z vepsiště, připsiště a Švrčkova bodu mezi nimi.

Cvičení. Ukažte, že pokud $r + r_a = |BC|$, pak je trojúhelník ABC pravoúhlý. (MO 2016)

Návod. BÚNO zvolte $|AB| < |AC|$ a označte X jako patu kolmice z $\check{S}_A$ na AB. Podívejte se na čtyřúhelník $BX\check{N}_BB_0$ a všimněte si, že má protější strany stejně dlouhé. Za pomoci tětivovosti a kolmostí pak ukažte, že se jedná o obdélník.

Sondatova věta

V této kapitolce si ukážeme nejjednodušší část takzvané Sondatovy věty. Ta se ve skutečnosti skládá ze tří dílčích tvrzení, ale pro důkaz zbylých dvou bychom museli vybudovat další arzenál, čítající mimo jiné Newtonovu–Gaussovu větu o čtyřúhelníku a Desarguesovu větu. I s nimi by důkaz byl velmi dlouhý a náročný, rozhodli jsme se tedy druhou a třetí část věty neuvádět. První část si však můžete vychutnat v její plné kráse.

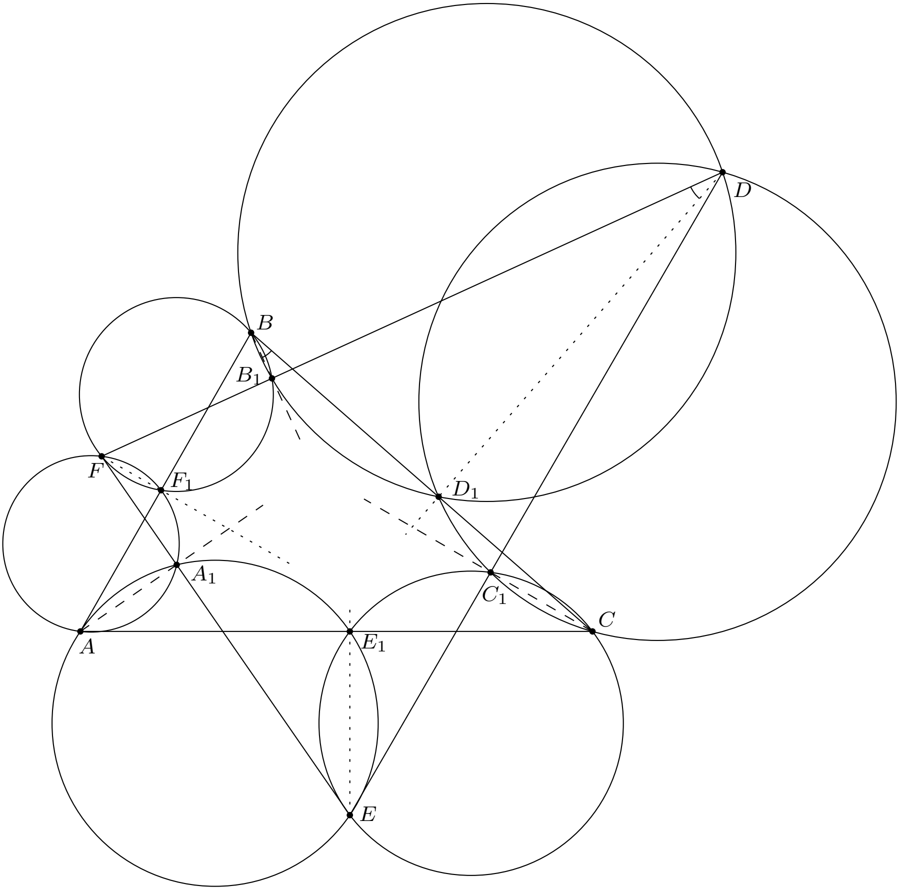
Budeme říkat, že trojúhelník ABC je *kolmý na trojúhelník* DEF, pokud platí, že kolmice z A na EF, kolmice z B na FD a kolmice z C na DE se protínají v jednom bodě. Uvědomme si, že výrok

„trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník DEF“ je ekvivalentní s „trojúhelník BCA je kolmý na trojúhelník EFD“, ale ne s „trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník EFD“.

Věta. (Sondatova) *Trojúhelník ABC je kolmý na trojúhelník DEF právě tehdy, když je trojúhelník DEF kolmý na trojúhelník ABC.*

Důkaz. Paty kolmic z A, B, C, D, E a F na EF, FD, DE, BC, CA a AB označme A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 a F_1. Chceme ukázat, že AA_1, BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě právě tehdy, když se DD_1, EE_1 a FF_1 protínají v jednom bodě.

Pro jednoduchost předpokládejme, že konfigurace odpovídá našemu obrázku (pro obecnost bychom zavedli orientované úhly). Potom jsou čtyřúhelníky AA_1F_1F, FF_1B_1B, BB_1D_1D, DD_1C_1C, CC_1E_1E a EE_1A_1A tětivové, protože pravé úhly nám dávají Thaletovy kružnice. To znamená, že $|\sphericalangle B_1BC| = |\sphericalangle B_1BD_1| = |\sphericalangle B_1DD_1| = |\sphericalangle FDD_1|$. Analogicky dostaneme rovnost dalších pěti dvojic úhlů.



To, že se přímky AA_1, BB_1 a CC_1 protínají v jednom bodě, je podle goniometrické Cevovy věty ekvivalentní vztahu

$$\frac{\sin|\sphericalangle A_1AB| \sin|\sphericalangle B_1BC| \sin|\sphericalangle C_1CA|}{\sin|\sphericalangle A_1AC| \sin|\sphericalangle B_1BA| \sin|\sphericalangle C_1CB|} = 1.$$

Analogicky to, že se přímky DD_1, EE_1 a FF_1 protínají v jednom bodě, je ekvivalentní

$$\frac{\sin|\sphericalangle D_1DF|\sin|\sphericalangle E_1ED|\sin|\sphericalangle F_1FE|}{\sin|\sphericalangle D_1DE|\sin|\sphericalangle E_1EF|\sin|\sphericalangle F_1FD|}=1.$$

Ovšem díky našim vztahům mezi úhly je

$$\frac{\sin|\sphericalangle A_1AB|\sin|\sphericalangle B_1BC|\sin|\sphericalangle C_1CA|}{\sin|\sphericalangle A_1AC|\sin|\sphericalangle B_1BA|\sin|\sphericalangle C_1CB|}=\frac{\sin|\sphericalangle D_1DF|\sin|\sphericalangle E_1ED|\sin|\sphericalangle F_1FE|}{\sin|\sphericalangle D_1DE|\sin|\sphericalangle E_1EF|\sin|\sphericalangle F_1FD|},$$

neboli levé strany uvedených vztahů jsou si rovny. Tím je důkaz dokončen.

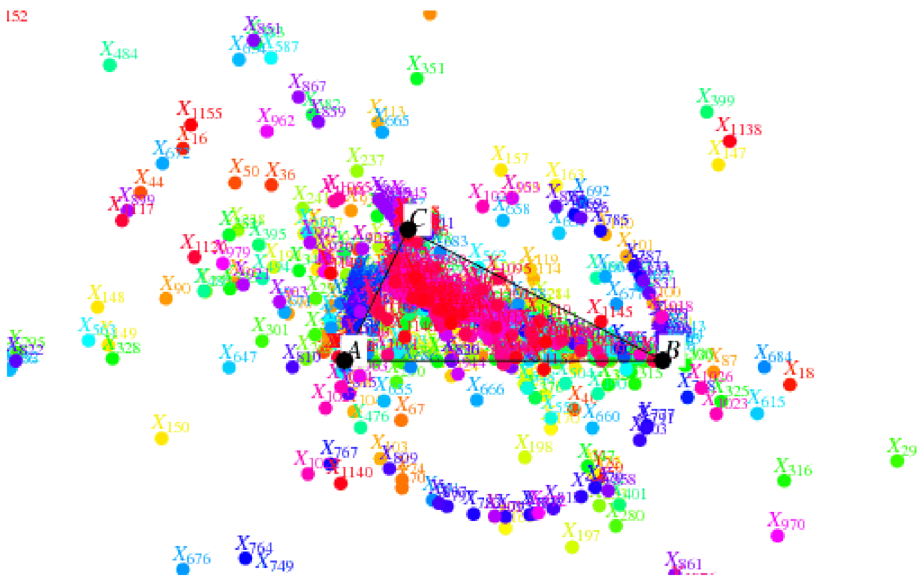
Cvičení. Buď ABC trojúhelník a D, E a F body takové, že $|BD|=|DC|$, $|CE|=|EA|$ a $|AF|=|FB|$. Ukažte, že kolmice z A, B a C na EF, FD a DE se protínají v jednom bodě.

Návod. Použijte Sondatovu větu.[1] Potom si uvědomte, že chcete ukázat, že se osy stran protínají v jednom bodě.

Cvičení. V trojúhelníku ABC si označme paty výšek jako D, E a F. Označme X, Y a Z středy úseček AD, BE a CF. Dokažte, že kolmice z D, E a F na YZ, ZX a XY se protínají v jednom bodě. (EMC 2013)

Podivné přátelství mezi středy

V průběhu seriálu jsme si ukázali několik středů trojúhelníka. Známých středů existuje opravdu nezměrné množství; encyklopedie středů trojúhelníka[2] jich v době psaní tohoto dílu vedla 13390. Zde je vykresleno několik prvních:[3]



[1]Vřele doporučujeme si úlohu vyřešit i bez použití Sondatovy věty. Cvičení se tím stane o dost obtížnějším, ale řešení je velmi pěkné. Návod zní (a pozor, přicházejí spoilery), že si chcete dokreslit tři vhodné kružnice a všimnout si, že se vlastně jedná o tvrzení o potenčním středu.

[2]Viz *http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html*.

[3]Na adrese *http://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html* najdete tento obrázek v duhově barevné formě.

Zajímavým cvičením v matematické výřečnosti je úkol formulovat, co vlastně slovní spojení „střed trojúhelníka“ přesně znamená. Zkuste teď na chvíli přestat číst a zamyslet se nad tím. (Varujeme, že následující dva odstavce a výsledná definice možná budou někomu připadat nehezké, některým mohou až působit pocity nevolnosti. V případě silné alergické reakce na algebru je možné příslušný úsek přeskočit, pro pochopení dalšího textu není příliš důležitý.)

Máte? Pokud ano, pravděpodobně jste došli k lehce neintuitivnímu poznání, že střed trojúhelníka vlastně není bod, ale funkce, která vrcholům každého trojúhelníka daný bod přisuzuje. A to ještě relativně specifickým způsobem. Zaprvé by střed měl být přiřazen symetricky, bez ohledu na pojmenování bodů. Takže připsiště není střed. Navíc asi platí, že při zmenšení/posunutí/otočení/překlopení by se střed měl stejným způsobem zmenšit/posunout/otočit/překlopit. A nezapomeňte na to, že naše funkce není nutně definovaná úplně pro všechny trojice bodů v rovině – pro degenerované trojúhelníky mnoho středů přestává existovat. A když už jsme u toho definování, možná není úplně od věci zamyslet se, co je to vlastně bod v rovině. Většinou se k pořádné definice roviny používají kartézské souřadnice a tam je opravdu nemotorné mluvit o obecném otáčení, překlápění a podobných zobrazeních.

Kdybychom opravdu chtěli střed definovat formálně, bylo by asi nejvhodnější si body zavést pomocí komplexních čísel[4], kde se se zobrazeními obvykle pracuje vcelku dobře. Nejlepší definice, se kterou autoři přišli, je následující:

Definice. Nechť T je množina všech trojic $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, kde $A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A} \neq \overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A$.[5] Potom jako *střed trojúhelníka* označujeme jakoukoliv symetrickou funkci $f : T \to \mathbb{C}$, která pro každé $(A, B, C) \in T$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $\alpha \neq 0$ splňuje $f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \overline{f(A, B, C)}$ a $f(\alpha A + \beta, \alpha B + \beta, \alpha C + \beta) = \alpha f(A, B, C) + \beta$.

Některé z vás určitě tato podivná a pro naše účely zbytečně formální definice vyděsila nebo odradila. Nic si z toho nedělejte. Pro naše účely je důležité primárně to, že na střed spíš než jako na konkrétní bod budeme koukat jako na způsob, jak trojúhelníku bod přiřadit. A s touto vědomostí se můžeme vrátit zpátky ke geometrii.

Některé dvojice středů nyní budeme označovat jako *přátele*[6] (pozor, neplést s kamarády). O dvojici středů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ řekneme, že $\mathcal{P}$ je přítel $\mathcal{Q}$, pokud platí následující výrok: Když v libovolném trojúhelníku ABC sestrojíme čtverce nad stranami A_BBCA_C, B_CCAB_A a C_AABC_B neprotínající ABC a když si označíme jako P^A, P^B a P^C postupně $\mathcal{P}$-středy trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C, pak se přímky AP^A, BP^B a CP^C protínají v jednom bodě Q, který je $\mathcal{Q}$-středem trojúhelníka ABC.

Zmatení? Ukažme si to na příkladu.

Tvrzení. *Opsiště je přítel Lemoinova bodu.*

Důkaz. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC a příslušné čtverce. Označíme si jako O^A, O^B a O^C opsiště trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C. Abychom ukázali, že opsiště je přítel Lemoinova bodu, je třeba ukázat, že AO^A, BO^B a CO^C se protínají v Lemoinově bodě K trojúhelníku ABC, neboli že se jedná o symediány.

Jak uděláme toto?

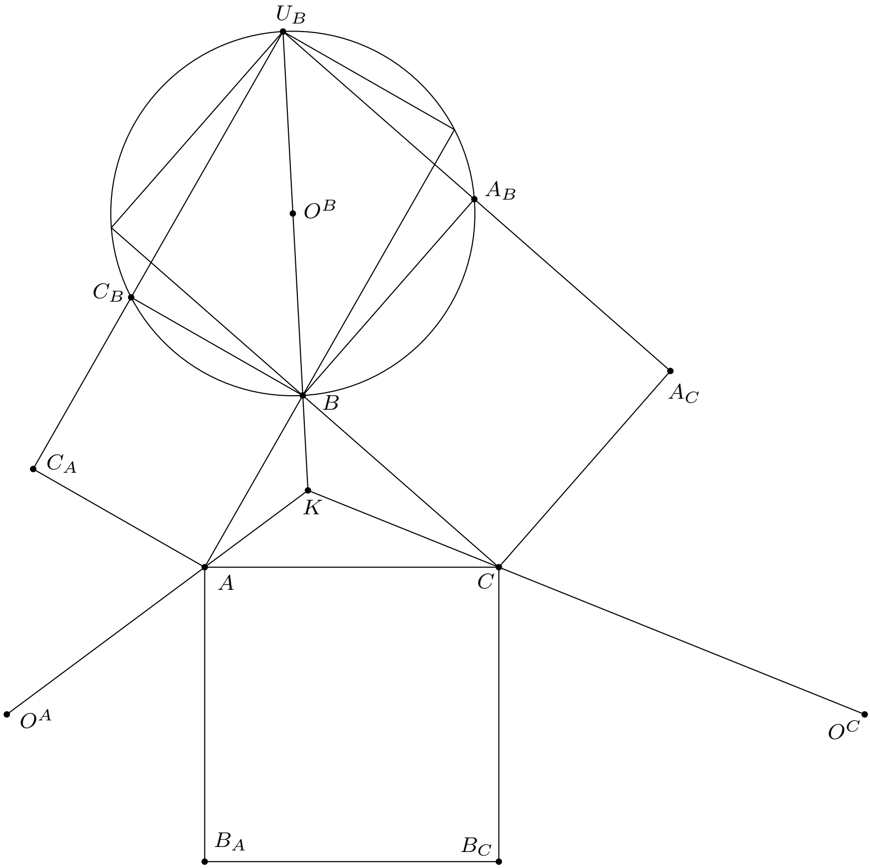
Buď U_B obraz bodu O^B ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem 2. Zjevně stačí ukázat, že BU_B je symediána v ABC. Protože O^B je střed trojúhelníku C_BBA_B, platí $|\sphericalangle U_BA_BB| = |\sphericalangle U_BC_BB| = 90°$. Tedy U_B je průsečík přímek C_AC_B a A_BA_C. Protože se jedná o rovnoběžky se stranami AB a BC, dostáváme, že vzdálenost bodu U_B od přímek AB a BC je (díky pravým úhlům ve čtverci) rovna $|C_BB|$ a $|A_BB|$, což je zase rovno $|AB|$ a $|BC|$. Ale symediána je tvořena právě

[4] Pokud jste komplexní čísla v životě nepotkali, následující definici zcela beze studu přeskočte.

[5] Jak asi chápete, toto jsou přesně trojice tvořící nedegenerované trojúhelníky.

[6] Anglická literatura využívá termínu *friends*. V české literatuře tento termín vzhledem ke své obskurnosti nemá ustálený překlad.

body, které mají poměr vzdáleností ke stranám trojúhelníku roven poměru délek těchto stran.[7] Takže U_B leží na B-symediáně a jsme hotovi.



Je jasné, že každý střed $\mathcal{P}$ má nanejvýš jednoho přítele – střed, který případně můžeme zadefinovat právě jako průsečík zmíněných přímek AP^A, BP^B, CP^C. Na druhou stranu kupříkladu střed Feuerbachovy kružnice přítele nemá, protože se příslušná trojice přímek neprotne. O tom se můžeme rychle přesvědčit například rychlým nákresem v nějakém kreslicím programu. (Tady pozor, kreslicí program nás o tomto sice může rychle přesvědčit, to však samozřejmě není pořádný důkaz. Ten by však byl vcelku technický, proto ho zde nebudeme provádět.)

Je asi zjevné, že když vztah nazýváme přátelstvím, měl by být symetrický. Tak si dokažme, že vskutku je.

Tvrzení. *Pokud je $\mathcal{P}$ přítel $\mathcal{Q}$, pak je $\mathcal{Q}$ přítel $\mathcal{P}$.*

Důkaz. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC a k němu příslušné body A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B. Označme jako Q^A, Q^B a Q^C postupně $\mathcal{Q}$-středy trojúhelníků B_AAC_A, C_BBA_B a A_CCB_C.

[7] Viz Cvičení 58 v druhém dílu.

Dále si jako P označme $\mathcal{P}$-střed trojúhelníku ABC. Chceme ukázat, že $Q^A A$, $Q^B B$ a $Q^C C$ se protínají v bodě P.

Zaměřme se na trojúhelník $C_B B A_B$. Čtverce $C_B B A C_A$ a $A_B B C A_C$ jsou čtverce i nad jeho stranami a ABC je trojúhelník příslušející vrcholu B v $C_B B A_B$. Proto použitím skutečnosti, že $\mathcal{P}$ je přítel $\mathcal{Q}$, na trojúhelník $C_B B A_B$ dostaneme, že PB prochází Q^B. To ale znamená, že $Q^B B$ prochází P. Analogicky dokážeme tvrzení pro zbylé dvě přímky.

Uvědomme si, čím se přátelství liší od kamarádství. Kamarádství je závislé na trojúhelníku a pojí dvojice bodů v rovině. Přátelství je daleko abstraktnější pojem, mluví totiž o dvojicích obecných středů, nevázaných na konkrétní trojúhelník. Přesto spolu kamarádství a přátelství trochu souvisí.

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ je dvojice přátel. Jako $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{Q}'$ si označme středy definované jako kamarády $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. Pak $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{Q}'$ jsou přátelé.*

Důkaz. Osa úhlu ABC na sebe převádí AB a BC. Protože $AB \perp BC_B$ a $A_B B \perp BC$, převádí na sebe i BC_B a BA_B. Takže se jedná i o osu úhlu $C_B B A_B$. Proto se na sebe převádějí i spojnice B s příslušnými středy, a my máme hotovo.

Důsledek. *Kolmiště a těžiště jsou přátelé.*

Cvičení. Dokažte, že vepsiště je svým vlastním přítelem.

Cvičení. Dokažte, že kolmiště a těžiště jsou přátelé, bez použití předchozího tvrzení.

Návod. Ukažte, že těžiště je přítelem kolmiště – uvažujte bod X takový, že $A_B X C_B B$ je rovnoběžník, a ukažte $XB \perp AC$.

Pokud vymyslíte, jak bez použití symetrie přátelství ukázat, že kolmiště je přítel těžiště, zašlete prosím své řešení na *mks@mff.cuni.cz*. Autoři seriálu jsou na něj zvědaví a pěkným řešením si získáte jejich nehynoucí obdiv (a za obzvlášť pěkné možná i nějakou čokoládu).

Závěr

Tímto bychom se s vámi rádi rozloučili. Doufáme, že jste si naši okružní jízdu trojúhelníkem užili a že jste se během ní něco naučili. Jako vždy platí, že se v případě jakýchkoliv dotazů můžete bez obav obrátit na mail *mks@mff.cuni.cz* nebo přímo na autory. Přejeme vám, ať se vám i vaše další setkání s trojúhelníkem (a obecně geometrií) líbí.

Zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Titu Andreescu: *106 Geometry Problems from the AwesomeMath Summer Program*,

[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Titu Andreescu: *107 Geometry Problems from the Awesomemath Year-Round Program*,

[3] Cosmin Pohoata, Titu Andreescu: *110 Geometry Problems for the International Mathematical Olympiad*,

[4] Bocanu Marius: *On Fontené's Theorems*,

[5] Linh Nguyen Van: *Fontene Theorems and Some Corollaries*,

[6] Michal „Kenny“ Rolínek, *Geometrie trojúhelníka*, sborníkový příspěvek MKS, Staré město, 2009,

[7] Michal „Kenny“ Rolínek, *Antirovoběžnost*, sborníkový příspěvek MKS, Oldřichov, 2012,

[8] Michal „Kenny“ Rolínek, *Trojúhelník tam, zpátky a ještě dál*, sborníkový příspěvek iKS, Hostětín, 2012,

[9] Josef Tkadlec, *Dokreslování*, sborníkový příspěvek MKS, Horní Lysečiny, 2013,

[10] Dominik Teiml, *The Euler Line*, Extended Essay in Mathematics, The English College in Prague, 2013.