

Geometrie trojúhelníka 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ÚNORA 2017

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
Nechť I_A a I_C jsou postupně A -přípsiště a C -přípsiště trojúhelníka ABC . Na kružnici jemu opsané zvolme libovolný bod P různý od B . Dokažte, že střed úsečky, jejíž krajní body jsou opsiště trojúhelníků $I_A BP$ a $I_C BP$, je opsištěm trojúhelníka ABC .

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB . Označme postupně P , Q , R , S paty kolmic vedených bodem Y k přímkám AX , BX , AZ , BZ . Dokažte, že velikost ostrého úhlu svíraného přímkami PQ a RS je rovna polovině velikosti úhlu XOZ , kde O je střed úsečky AB .

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P . Paty kolmic z bodu P na strany BC , CA a AB označme postupně D , E a F . Dále nechť V je kolmiště trojúhelníku AEF . Dokažte, že pokud $DE \perp DF$, pak platí

$$|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BVC| = 180^\circ + \alpha.$$

Geometrie trojúhelníka 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Nechť I_A a I_C jsou postupně A -přípsiště a C -přípsiště trojúhelníka ABC . Na kružnici jemu opsané zvolme libovolný bod P různý od B . Dokažte, že střed úsečky, jejíž krajní body jsou opsiště trojúhelníků I_ABP a I_CBP , je opsištěm trojúhelníka ABC .

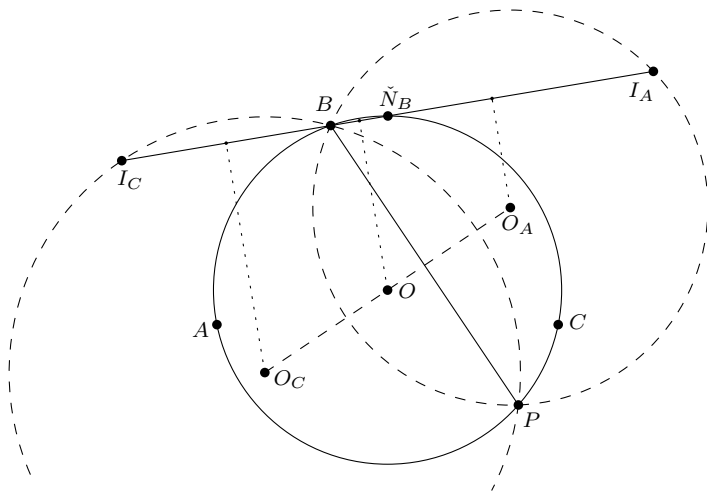
(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Označme si opsiště trojúhelníků ABC , I_ABP a I_CBP jako O , O_A a O_C . Dále buď \check{N}_B antišvrk příslušný bodu B v trojúhelníku ABC . Prvně si povšimněme, že BP je tětivou kružnic opsaných trojúhelníkům ABC , I_ABP i I_CBP , a proto leží O , O_A i O_C na jedné přímce – na ose úsečky BP .

Dále si uvědomme, že O , O_A a O_C leží na osách úseček $B\check{N}_B$, BI_A a BI_C . Protože už víme, že O , O_A a O_C leží na jedné přímce, stačí ukázat, že osa $B\check{N}_B$ je osou pásu určeného osami BI_A a BI_C .

Pokud na tyto tři osy aplikujeme stejnoolehlost se středem v B a koeficientem 2, dostaneme k dokázání, že kolmice na I_AI_C v \check{N}_B je osou pásu z kolmic na tu samou přímku v bodech I_A a I_C . Ale to je pravda, protože \check{N}_B je střed I_AI_C .



POZNÁMKY:

Sešla se plejáda správných řešení založených na spoustě různých přístupů a pohledů. Všechna však zakládala na nějaké technice ze seriálu, obvykle na Švrčkově bodu nebo antišvrku. Objevila se ale třeba i řešení založená na Eulerově přímce a Feuerbachově kružnici.

Taky bych rád podotknul, že ačkoli zadání zakazovalo patologický případ $P = B$, nevyklučovalo jiný patologický případ $P = \tilde{N}_B$. V tu chvíli totiž trojúhelníky $I_A BP$ a $I_C BP$ zdegenerují do úseček. Tvzení je sice stále pravdivé, ale jen ve chvíli, kdy se smíříme s tím, že středem kružnice opsané může být i bod ležící v nekonečnu.¹ Za tuto nedokonalost zadání se omlouváme. Body jsem kvůli ní nikomu nestrhával.

(Rado van Švarc)

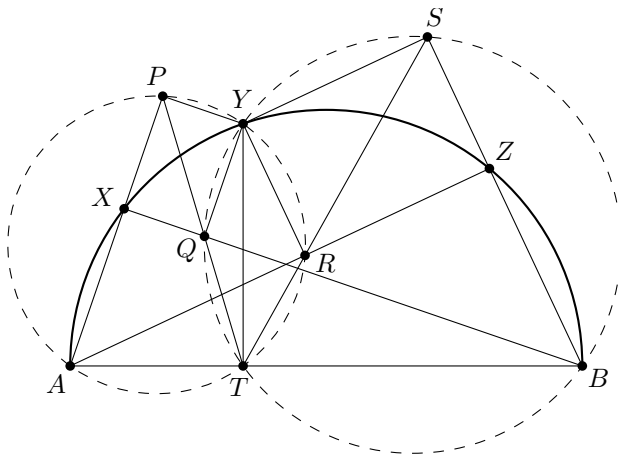
Úloha 2.

Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB . Označme postupně P, Q, R, S paty kolmic vedených bodem Y k přímkám AX, BX, AZ, BZ . Dokažte, že velikost ostrého úhlu svíraného přímkami PQ a RS je rovna polovině velikosti úhlu XOZ , kde O je střed úsečky AB .

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Nechť T je pata kolmice spuštěné z bodu Y na AB . Body T, P, Q leží na jedné přímce, neboť se jedná o Simsonovu přímkou bodu Y vzhledem k trojúhelníku ABX . Analogicky leží body T, R, S na jedné přímce, neboť se jedná o Simsonovu přímkou bodu Y vzhledem k trojúhelníku ABZ .



Díky pravým úhlům leží body A, Y, R, T na Thaletově kružnici nad průměrem AY , tudíž $|\angle YTR| = |\angle YAR| = |\angle YAZ|$. Podobným způsobem dostaneme $|\angle QTY| = |\angle QBY| = |\angle XBY|$. Nyní využijeme faktu, že $AXYZB$ je tětíkový pětiúhelník. Úhel QTR jakožto součet úhlů QTY a YTR je tedy součtem obvodových úhlů příslušných obloukům XY a YZ . To dohromady dává obvodový úhel oblouku XZ , což je polovina středového úhlu XOZ .

POZNÁMKY:

Úloha byla jednoduchá, a proto naprostá většina došlých řešení byla správná. Chtěl bych pochválit řešitele, kteří použili Simsonovu přímkou, čím si své řešení dosti zjednodušili a zkrátili oproti jiným úhlicím řešením.

Jiný postup, který se mi velice líbil, využíval stejnoolehlost se středem Y a koeficientem 2. Nafoukneme-li pouze přímkou PQ a RS , jejich obrazy obsahují po řadě body X a Z . Zároveň obraz

¹Koho zmínka o bodech ležících v nekonečnu zaujala, ten si může přečíst něco o *projektivní rovině*.

bodou T padne na kružnici opsanou trojúhelníku XYZ , což okamžitě dává kýžený výsledek. Tímto postupem si *Victoria María Nájares Romero* a *Martin Zimen* vysloužili $+i$.

(*Anh Dung* „Tonda“ *Le*)

Úloha 3.

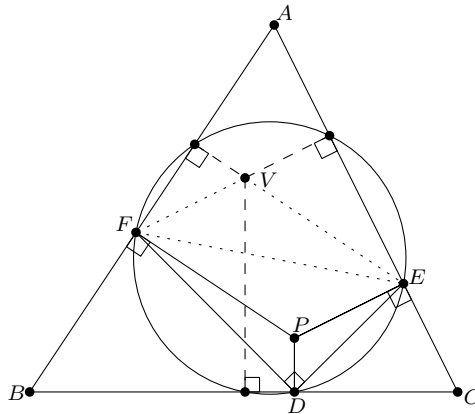
Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P . Paty kolmic z bodu P na strany BC , CA a AB označme postupně D , E a F . Dále necht' V je kolmiště trojúhelníku AEF . Dokažte, že pokud $DE \perp DF$, pak platí

$$|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BVC| = 180^\circ + \alpha.$$

(*Rado van Švarc*)

ŘEŠENÍ:

Podle Six feet theorem² sdílí trojúhelník tvořený patami kolmic z bodu P na strany trojúhelníka ABC kružnici opsanou s trojúhelníkem s vrcholy v analogických patách kolmic vedených kamarádem bodu P . Jelikož je úhel EDF pravý, je podle Thaletovy věty úsečka EF průměrem této kružnice. Uvažme paty kolmic z kamaráda bodu P postupně na strany AC a AB . Vzhledem k výše uvedenému to musejí být průsečíky kružnice nad průměrem EF s příslušnými stranami různé od bodů E a F . To jsou ale zároveň paty dvou výšek v trojúhelníku AEF . Z toho plyne, že kamarádem bodu P musí být bod V . Zbytek řešení je obsažen v následujícím lemmatu.



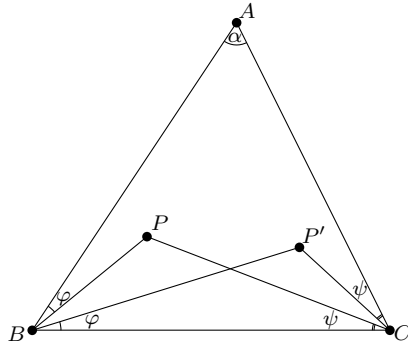
Lemma. Necht' P a P' jsou kamarádi v trojúhelníku ABC . Pak platí $|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BP'C| = 180^\circ + \alpha$ a analogicky $|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle AP'C| = 180^\circ + \beta$ a $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle AP'B| = 180^\circ + \gamma$.

Důkaz. Podívejme se na druhý obrázek. Dvojice stejně velkých úhlů (jelikož P a P' jsou kamarádi) u vrcholů B a C označme φ a ψ . Součet $|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BP'C|$ pak můžeme vyjádřit jako

$$(180^\circ - |\sphericalangle PBC| - \psi) + (180^\circ - |\sphericalangle P'CB| - \varphi) = 360^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ + \alpha,$$

což jsme měli dokázat.

²Tvrzení 54 z druhého dílu seriálu.



POZNÁMKY:

Zhruba polovina z celkových čtrnácti úspěšných řešitelů této úlohy použila podobný postup jako my zde. Ze zadání ale plyne ještě víc. Úhel BPC má totiž velikost $90^\circ + \alpha$, a tedy úhel BVC musí být nutně pravý! To je jistě zajímavé a dá se to s trochou námahy elementárně dokázat, o čemž se přesvědčila druhá zhruba polovina řešitelů. Ještě dodáme, že v námi použitém lemmatu platí dokonce ekvivalence, tedy uvedené tři vztahy pro úhly platí právě tehdy, když jsou P a P' kamarádi.

(David Hruška)