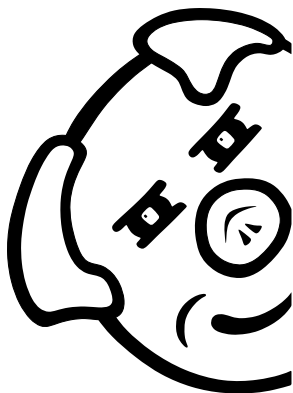


Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !



Dostávají se Ti do rukou rukou druhé komentáře 36. ročníku našeho semináře. Dovol Ti stručně naznačili, co v nich lze nalézt a k čemu Ti to může být dobré.

Zprv bychom se měli ohlédnout za uplynulým rokem 2016. Jako každý rok proběhla dvě nádherná soustředění plná matematiky i zábavy, jarní výlet, několik neformálních setkání organizátorů s účastníky, vánoční besídka, osm standardních sérií a tři série seriálové. A jako každý rok Ti přinášíme vzorová řešení tří posledních opravených sérií – druhé a třetí podzimní a první seriálové.

Termíny odeslání všech sérií podzimní části už jsou ale minulostí, a proto nezbývá, než obrátit svou pozornost k jarní části semináře. V ní budeš čelit čtyřem klasickým sériím a dvěma sériím seriálovým. Jak přitom asi víš, jarní a podzimní části jsou na sobě značně nezávislé. Pořadí v nich se určuje zvlášť a na soustředění zveme vždy několik nejlepších řešitelů z příslušné části. Pokud Ti tedy utekl začátek ročníku, je teď ten optimální čas začít řešit a na podzim s námi vyrazit na soustředění.

A proč o tom tak široce mluvíme? Protože na následujících stránkách najdeš zadání prvních dvou jarních sérií, jakož i druhý díl seriálu o geometrii trojúhelníka¹ a k němu náležející druhou seriálovou sérii.

Naše úlohy ale nejsou to jediné, na co se můžeš v následujících měsících těšit. Na jaře se uskuteční tradiční jarní výlet, jarní soustředění, ale třeba i celostátní kolo matematické olympiády. A pokud jsi na řešení celostátního kola i našeho semináře ještě příliš malé SeLátko, můžeš se podívat na úlohy Pikomatu², které jsou určeny základoškolákům. Ať už jsi tedy maturant, nebo dítě školou povinné, můžeš si užít jaro plné matematiky a zážitků.

Za organizátory,

Martin „E.T.“ Sýkora

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Povídání ke druhé jarní sérii
- Seriál – Geometrie trojúhelníka II.
- Výsledkové listiny
- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

Podzimní soustředění

Tentokrát jsme se s účastníky potkali v Jeseníkách poblíž obce Lipová-lázně. V týdnu od 5. do 13. listopadu byla na horách pořádná zima

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

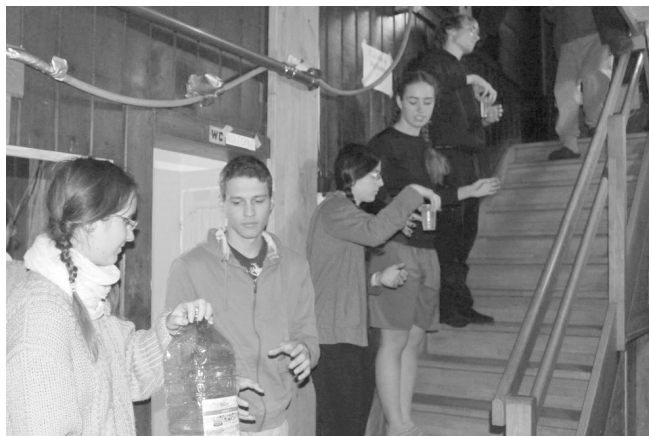


matfyz

¹První díl najdeš na našem webu mks.mff.cuni.cz/commentary/

²Více na pikomat.mff.cuni.cz

(sněhu napadlo dost i na sněhuláka), což ještě umocňovalo mrazivou atmosféru pod nadvládou kruté Strany. Radostnější chvíle nastaly jen při ranních školeních (matematika jest věda apolitická) a odpoledních terénních cvičeních. Zachránila nás až spontánní revoluce, při níž neměli přízemní Straníci žádnou šanci zvítězit nad nadšením zpěváků. Díky nim budeme žít svobodně a v míru! (Alespoň do jarního soustředění.)



Prvočísla

2. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Čarodějnice Marta si povšimla, že se jí na zahrádce přemnožila prvočísla. Vyslovila tedy složité zaklínadlo a co se nestalo: Nejprve se vypařila všechna prvočísla a na zahrádce je nahradily součty každých dvou z nich, načež všechna složená čísla odletěla pryč. Dokažte, že po dvou provedeníh zaklínadla se Marta všech prvočísel zbavila.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:

Součet dvou prvočísel je určitě větší než dva. Mezi součty vzniklými po prvním vyslovení zaklínadla proto dvojka není. Poté, co zmizí složená čísla, zůstanou na zahrádce pouze prvočísla, která jsou všechna větší než dva a jsou tedy určitě všechna lichá. Po druhém vyslovení zaklínadla dostáváme pouze součty dvou lichých prvočísel, tedy čísla sudá a větší než dva. Ta jsou složená a musí zmizet. Marta se tak po dvou provedeníh zaklínadla zbaví všech prvočísel na své zahrádce.

POZNÁMKY:

Úloha byla dost lehká, což mnohé řešitele svádělo k nepřesnostem. Celkem oblíbené tvrzení bylo, že součet dvou lichých čísel je číslo sudé, a tedy složené. Bylo jasné, že dvojka nám vzniknout nemůže, ale málokdo to i napsal do řešení. Pár řešitelů si zadání vysvětlilo tak, že prvočísla sčítáme po dvojicích a ne každé s každým, nicméně pokud se v jejich řešení i tak objevily všechny myšlenky potřebné na vyřešení původní úlohy, body jsem neodečítala.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 2.

Nalezněte všechna prvočísla, která **nelze** zapsat jako součet dvou složených čísel.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si uvědomme, že všechna sudá čísla větší než dva jsou složená, a tudíž i všechna prvočísla větší než dva jsou lichá. Číslo dva zjevně nelze zapsat jako součet dvou složených čísel (nejmenší složené číslo je čtyři). Dále tedy všechna prvočísla, která nám zbývá vyřešit, jsou lichá.

Jelikož liché číslo lze zapsat pouze jako součet sudého a lichého čísla, všechna prvočísla menší než součet nejmenšího sudého složeného čísla a nejmenšího lichého složeného čísla (tj. čtyři a devět) takto zapsat nelze. Ovšem každé prvočíslu $p \geq 13$ lze zapsat jako $p = 9 + (p - 9)$, kde devět je složené číslo a $p - 9$ je sudé číslo větší než dva, tudíž rovněž složené. Proto žádné takové prvočíslu nebude hledaným řešením.

Řešeními jsou tedy právě ta prvočísla, která jsou ostře menší než 13, tj. 2, 3, 5, 7 a 11.

POZNÁMKY:

Úloha byla poměrně snadná a šlo ji vyřešit mnoha různými způsoby lišícími se především v postupu nalezení rozkladu pro prvočíslu $p \geq 13$. Nejoblíbenější a nejkratší variantou byl rozklad uvedený ve vzorovém řešení. Častý byl také rozklad založený na rozboru možných zbytků po dělení p třemi

(konkrétně pro zbytek jedna rozklad $p = 4 + (p - 4)$ a pro zbytek dva rozklad $8 + (p - 8)$, kde druhý člen součtu je složené číslo dělitelné třemi) či na rozboru podle poslední číslice prvočísla p .

Bohužel kromě mnoha správných řešení přišlo i několik takových, která bez důkazu tvrdila, že žádné další řešení neexistuje, nebo se dokonce o neexistenci dalšího řešení vůbec nezmiňovala (extrémním případem bylo řešení se zapsaným výsledkem bez jediného slova). Takovým řešením jsem musel dát pouze bod, neboť pokud úloha požaduje nalezení **všech** řešení, je třeba dokázat, že jste skutečně všechna našli. (Tomáš Novotný)

Úloha 3.

Když se Marian vrátil ze svých cest, chlubil se kamarádům: „Dojel jsem až k jezeru, na jehož obvodu leželo 1001 měst. Přitom poměr počtu obyvatel každých dvou sousedních měst (větší ku menšímu) byl přirozené číslo a navíc prvočíslu.“ „To kecáš“, podivila se Áďa. Dokažte, že měla pravdu.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Uvažujme dvě sousední města a o_1, o_2 počty obyvatel těchto dvou měst. Fakt, že poměr většího ku menšímu z těchto čísel je prvočíslu, říká, že součty exponentů v prvočíselných zápisech o_1 a o_2 se liší o jedna.

Úlohu dokážeme sporem. Nechť platí to, co řekl Marian. Zvolme libovolné město u jezera. Bez újmy na obecnosti, nechť součet exponentů v jeho prvočíselném rozkladu je sudý (pokud je lichý, vezmeme vedlejší město). Obejdeme-li po kruhu všechna města, vrátíme se do původního po navštívení 1000 dalších měst. Potom z úvahy na začátku je součet exponentů v jeho prvočíselném rozkladu lichý (1001krát se změní parita). To je ovšem spor s předpokladem, že tento součet je sudý.

POZNÁMKY:

Většina řešení myšlenkou odpovídala vzorovému. Co se týče nejčastějších chyb, našlo se několik řešení, která předpokládala, že se po kruhu musí střídát dva počty obyvatel nebo počet obyvatel musí (při pohybu jedním směrem) růst. Tento předpoklad ovšem nezahrnuje všechny možnosti. Například pokud by kolem jezera byla čtyři města, čtveřice 30, 150, 30, 60 splňuje podmínky zadání (krom faktu, že počet měst není roven 1001), ale nestřídají se v ní dvě různá čísla a také netvoří rostoucí posloupnost čísel.

Často jsem v řešeních narazil na to, že se pracuje s očíslovanými městy, aniž by bylo řečeno, jak očíslování má vypadat. Člověk si domyslí, že očíslování bude fungovat tak, že jedno z měst bude první a zbytek měst se postupně očíslovuje buď po směru nebo proti směru hodinových ručiček, ale je třeba to alespoň trochu popsat. Stejně tak se objevovaly snahy mluvit o „sudých“ a „lichých“ městech, kde je problém úplně stejný, protože jedno město může být (podle zvoleného očíslování) sudé nebo liché. (Honza Krejčí)

Úloha 4.

Rozhodněte, zda pro každých šest po sobě jdoucích čísel existuje prvočíslu, které dělí právě jedno z těchto čísel.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Je zřejmé, že z každých šesti po sobě jdoucích čísel jsou právě tři lichá. Dále dokážeme sporem, že z těchto tří lichých čísel je maximálně jedno dělitelné třemi. Předpokládejme, že jsou dvě z nich dělitelná třemi. Pak je jejich rozdíl také dělitelný třemi a jelikož jsou obě lichá, tak jejich rozdíl je sudý. Tento rozdíl je tedy dělitelný šesti a jelikož jde o různá čísla, tak se musí lišit alespoň o šest. Pak ale nemohou být obě v šesti po sobě jdoucích čísel.

Analogicky dokážeme, že maximálně jedno z těchto tří lichých čísel je dělitelné pěti. Maximálně dvě z nich jsou proto dělitelná třemi nebo pěti, tedy v každých šesti po sobě jdoucích číslech existuje číslo, které není dělitelné dvěma, třemi ani pěti. Toto číslo je buďto rovno jedné, nebo má ve svém prvočíselném rozkladu prvočíslo větší nebo rovno sedmi (pro všechna čísla větší než jedna existuje prvočíselný rozklad). Nejprve vyřešíme první případ. Číslo jedna je obsaženo jen v šestici čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pro tuto šestici je číslo pět prvočíslem, které dělí právě jedno z čísel v ní. Ve druhém případě toto prvočíslo nemůže dělit žádné další číslo ze šestice, jelikož rozdíl každých dvou jeho násobků je větší nebo roven sedmi.

Tedy pro každých šest po sobě jdoucích čísel existuje prvočíslo, které dělí právě jedno z nich.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správná. Několik řešitelů bohužel špatně pochopilo zadání a hledalo prvočíslo, které by dělilo právě jedno číslo z každých šesti po sobě jdoucích čísel (takové však neexistuje). Dále bylo potřeba dát si pozor na číslo jedna, které nemá žádné prvočíselné dělitele.

(Lucien Šíma)

Úloha 5.

Číslo n má tu vlastnost, že $2n + 1$ i $3n + 1$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. Ukažte, že $5n + 3$ není prvočíslo.

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Označme a, b přirozená čísla, pro která platí $a^2 = 2n + 1$ a $b^2 = 3n + 1$. Pak

$$5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b).$$

Tedy jsme vyjádřili $5n + 3$ jako součin dvou přirozených čísel. Abychom dokázali, že $5n + 3$ není prvočíslo, zbývá ukázat, že $2a - b$ a $2a + b$ nejsou rovna jedné. Číslo $2a + b$ je určitě různé od jedné, protože a a b jsou přirozená.

Předpokládejme pro spor, že $2a - b = 1$. Pak $5n + 3 = (2a - b)(2a + b) = 1(b + 1 + b) = 2b + 1$, tedy $5n + 2 = 2b$. Odtud a z definice b dostáváme $\left(\frac{5n+2}{2}\right)^2 = b^2 = 3n + 1$. To upravíme na $25n^2 + 20n + 4 = 12n + 4$, tedy $n(25n + 8) = 0$. Poslední uvedená rovnost je ve sporu s tím, že n je celé číslo větší než nula. Proto ani $2a - b$ není rovno jedné, tudíž $5n + 3$ není prvočíslo.

POZNÁMKY:

Někteří řešitelé odhalili nejmenší přirozené číslo vyhovující zadání, tím je $n = 40$. Je ale třeba uvědomit si, že nalezení jednoho čísla, které splňuje zadané vlastnosti, není požadovaným důkazem daného tvrzení. Důkaz je samozřejmě třeba provést **pro všechna** přípustná n .

(Miša Hubatová)

Úloha 6.

David má n hrušek a Martin s Tondou mu je střídavě ujíždají. Martin začíná a ten, kdo je na řadě, si vybere nějaké prvočíslo p a sní $p - 1$ hrušek. Oba loupežníci se snaží sníst poslední hrušku. Dokažte, že pro nekonečně mnoho n toho může dosáhnout Tonda, ať se mu v tom Martin snaží sebevíc zabránit.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Hra je určitě konečná (hráči zřejmě hrušky někdy dojí, vždy musí sníst alespoň jednu). Definujme pozici, ve které se hra nachází, jako počet zbývajících hrušek. Můžeme si tedy jednotlivé pozice rozdělit do dvou skupin. Pozice n je *vyhrávající*, jestliže hráč, který je na tahu na pozici n , má vyhrávající strategii (tedy umí určitě vyhrát nezávisle na tazích protihráče). Naopak n označíme

jako *prohrávající*, pokud hráč nacházející se na tahu nemá při správné hře druhého hráče šanci na vítězství. Platí, že můžeme-li z pozice n přípustným tahem přejít na nějakou prohrávající pozici, pak je pozice výherní. Naopak, pokud z nějakého n neexistuje žádný přípustný tah do prohrávající pozice, je toto n pozice prohrávající. Pozici 0 definujeme jako triviální prohrávající pozici – hráč, před kterým je nula hrušek, je ten, který právě sledoval, jak je ten druhý dojedl – tedy prohrávající.

Chceme dokázat, že existuje nekonečně mnoho prohrávajících pozic (to jsou přesně ty, ve kterých vyhraje Tonda, protože Martin začíná). Není těžké si všimnout, že pozice 3 je prohrávající, stejně jako např. 8 a 11. Předpokládejme, že prohrávajících pozic je jen konečně mnoho. Potom zřejmě existuje nějaká nejvyšší z nich, označme si ji třeba x . Všechny vyšší pozice než x jsou z tohoto předpokladu vyhrávající.

Nyní zkoumejme pozici $(x+2)! + (x+1)$. Je to zřejmě větší hodnota než x , měla by tedy být vyhrávající, tj. měl by z ní existovat tah do jedné z prohrávajících pozic. Prohrávající pozice jsou některá čísla z čísel $0, 1, 2, \dots, x$. Rozdíl $(x+2)! + (x+1)$ a některého z těchto čísel tedy nutně musí být roven $p-1$ pro nějaké prvočíslo p . Pro nějaké i od 0 do x tedy máme

$$(x+2)! + (x+1) - i = p - 1.$$

To se dá upravit na

$$(x+2)! + (x+2) - i = p.$$

Pro každé i z určeného intervalu se bude rozdíl $(x+2) - i$ nacházet v rozmezí od 2 do $(x+2)$ a tímto číslem bude dělitelné i $(x+2)!$, které je větší než $(x+2)$. Po vytknutí tedy na levé straně dostaneme součin dvou čísel větších než jedna, což se nikdy nemůže rovnat prvočíslu.

Dostali jsme spor, a prohrávajících pozic tedy nemůže být konečně mnoho. Existuje tedy nekonečně mnoho pozic, pro které Tonda vyhraje nezávisle na Martinových tazích!

POZNÁMKY:

Ten, kdo dokazoval sporem, tj. vybral nějaké nejvyšší prohrávající n , úlohu zpravidla vyřešil. Konstrukci pro nalezení sporu v podobě „ještě větší“ prohrávající pozice bylo více, ve vzoráku je popsána ta nejčastější. Někteří řešitelé si mysleli, že pokud má hráč na tahu před sebou n hrušek a nemůže je všechny sníst (aneb $n \neq p-1$), pak „nevychraje“. To, že hráč zrovna nemůže sníst všechny hrušky najednou, ještě neznamená, že nemůže udělat takovou sekvenci tahů, aby toho po nějaké době skutečně dosáhl.

(Marian Poljak)

Úloha 7.

Nalezněte všechny 2016-tice ne nutně různých přirozených čísel, pro které platí, že kdykoli z nich vybereme³ čtveřici (a, b, c, d) , tak splňuje $abcd \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4$.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Nejdříve vyzorujeme, že kdyby byla všechna čísla 2016-tice dělitelná nějakým číslem větším než jedna, pak tímto dělitelem můžeme každé z čísel vydělit a na platnosti tvrzení nic nezměníme. Uvažujme tedy nyní jenom 2016-tice čísel, která nejsou všechna dělitelná číslem větším než jedna. Jistě si hned všimneme, že všechny jedničky vyhovují zadání.

Dále mějme nějakou 2016-tici splňující zadání a předpokládejme, že v ní existuje nějaké číslo větší než jedna, označme jej a . Potom je toto číslo a zřejmě dělitelné nějakým prvočíslem p . Nyní pro spor předpokládejme, že v 2016-tici existují nějaká dvě čísla x, y , jejichž čtvrté mocniny nedávají stejný zbytek modulo p . Potom můžeme vzít nějaká b, c ze zbývajících 2013 čísel (tedy všech různých od a, x, y).

$$p \mid abcx \mid a^4 + b^4 + c^4 + x^4$$

³Jedno číslo můžeme vybrat jen tolikrát, kolikrát se vyskytuje v naší 2016-tici.

$$p \mid abcy \mid a^4 + b^4 + c^4 + y^4$$

Odečtením dělitelností od sebe dostaneme $p \mid x^4 - y^4$, což je spor s tím, že čtvrté mocniny čísel x, y dávají různý zbytek modulo p . Čtvrté mocniny všech čísel kromě a tedy musí nutně být kongruentní modulo p . Označme jejich společný zbytek po dělení p písmenkem z . Nyní uvažujme obecnou čtveřici s číslem a :

$$p \mid abcd \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

Všechny hodnoty z z pravé strany dělitelnosti můžeme ekvivalentně nahradit jejich zbytkem po dělení p , dostáváme tedy (a je z předpokladu dělitelné p):

$$p \mid 0 + z + z + z = 3z$$

Jelikož je p z předpokladu prvočíslo, dostáváme dvě možnosti:

- (1) $p \mid z$. Potom p dělí čtvrté mocniny všech čísel, musí tedy nutně dělit všechna čísla – tady se dostáváme do sporu s naším předpokladem, že 2016-tice čísel nemá mít žádného dělitele většího než jedna společného všem.
- (2) $p \nmid z \implies p \mid 3$. Potom je trojka nutně jediným prvočíslem, které může dělit nějaký prvek naší 2016-tice. Námi vybrané číslo a je přitom jediné číslo, které může být touto trojkou dělitelné. Kdyby totiž bylo ještě nějaké jiné číslo než a dělitelné třemi, tak jeho čtvrtá mocnina dává zbytek nula po dělení třemi – všechna čísla mimo a ale mají tento zbytek společný, dostaneme tedy 2016-tici čísel, z nichž každé je dělitelné třemi, což je opět spor se stejným předpokladem. Všechna čísla různá od a tedy mohou být jediné jedničky, zato a musí nutně být mocnina trojky.

Již víme, že je-li a nultá mocnina trojky, tak získáme řešení tvořené 2016 jedničkami. Je-li první mocnina trojky, dostaneme taky vyhovující řešení, protože $3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \mid 3^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 = 84$. Je-li a vyšší mocninou trojky, pak je dělitelné devíti. Potom ovšem výběrem a spolu s třemi jedničkami získáváme dělitelnost $9 \mid a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \mid a^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 = a^4 + 3$, která vzhledem k $9 \mid a^4$ neplatí. Jediné vyhovující 2016-tice za předpokladu nesoudělnosti jsou $(1, 1, \dots, 1)$ a $(3, 1, \dots, 1)$. Všechna vyhovující řešení jsou tedy 2016-tice tvaru $(n, n, \dots, n)$ nebo $(3n, n, \dots, n)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

POZNÁMKY:

Kdo pracoval s kongruencemi čtvrtých mocnin, úlohu zpravidla vyřešil. Někteří z vás mlčky předpokládali, že když je součet dvou zlomků celé číslo, pak musí být i oba zlomky celá čísla. Jenomže např. $1/3 + 2/3 = 1$. Samozřejmě, že v některých speciálních případech toto tvrzení může platit, ale je to potřeba řádně odůvodnit. (Marian Poljak)

Úloha 8.

Nechť $p(n)$ je nejvyšší prvočíselný dělitel čísla $n > 1$. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho čísel $n > 2$, pro která platí $p(n-1) < p(n) < p(n+1)$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si dokážeme několik lemat, potom si ukážeme, jak s úlohou souvisí.

Lemma. Nechť a, b jsou přirozená čísla. Potom platí $p(ab) = \max\{p(a), p(b)\}$.

Důkaz. Označme $q = p(ab)$. Jistě je q prvočíslo a platí $q \mid ab$ (z definice funkce $p(n)$). Potom ale $q \mid a$ nebo $q \mid b$, tedy $p(a) \geq q$ nebo $p(b) \geq q$, ale kdyby některé z $p(a), p(b)$ bylo větší než q , tak by to byl spor s $q = p(ab)$. $\square$

Všimněme si, že $q^{2^k} - 1 = (q-1)(q+1)(q^2+1) \dots (q^{2^{k-1}}+1)$, což získáme postupným použitím vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Lemma. *Nechť $q \in \mathbb{N}$. Potom pro každá přirozená $a < b$ a každé liché prvočíslo r platí, že pokud $r \mid q^{2^a} + 1$, potom $r \nmid q^{2^b} + 1$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $r \mid q^{2^a} + 1$. Podle vzorečku, který jsme odvodili výše, můžeme napsat

$$q^{2^b} + 1 = 2 + q^{2^b} - 1 = 2 + (q - 1)(q + 1)(q^2 + 1) \dots (q^{2^{b-1}} + 1),$$

přičemž protože $a < b$, tak se v součinu jistě vyskytuje i $q^{2^a} + 1$. Ale $r \mid q^{2^a} + 1$, a tedy i $r \mid (q - 1)(q + 1)(q^2 + 1) \dots (q^{2^{b-1}} + 1)$. To ale znamená, že $q^{2^b} + 1 = kr + 2$ pro nějaké přirozené k , ale protože r je liché prvočíslo, tak jistě $r \nmid kr + 2$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Důsledek. *Nechť $q > 2$ je prvočíslo. Potom pro každé k přirozené existuje takové prvočíslo $r > 2$, že $r \mid q^{2^k} + 1$, ale $r \nmid q^{2^\ell} + 1$ pro všechna $\ell < k$ přirozená.*

Důkaz. Protože je $q > 2$, tak je q liché, a tedy $q^2 \equiv 1 \pmod{4}$. To znamená, že $4 \nmid q^{2^k} + 1$ pro žádné k (protože $q^{2^k} = (q^2)^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{4}$, a tedy $q^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$). A protože $q^{2^k} + 1 > 2$, tak jistě bude existovat nějaké liché prvočíslo r , které dělí $q^{2^k} + 1$.

Potom ale už stačí použít předchozí lemma – kdyby to liché prvočíslo r , které dělí $q^{2^k} + 1$, dělilo i nějaké $q^{2^\ell} + 1$, byl by to spor s předchozím lemmatem. $\square$

Důsledek můžeme nahlédnout (a větší část úspěšných řešení to tak i udělala) i pomocí tzv. Zsigmondyho věty. Ale jak můžeme vidět, v tomto případě byl Zsigmondy zbytečně veliké kladivo.

Lemma. *Nechť $q > 2$ je prvočíslo. Potom existuje přirozené číslo $k > 0$ takové, že $p(q^{2^k} + 1) > q$.*

Důkaz. Uvědomme si, že z důsledku plyne, že pro $k \neq \ell$ nemůže nastat $p(q^{2^k} + 1) = p(q^{2^\ell} + 1)$. Víme, že každý výraz tvaru $q^{2^k} + 1$ je dělitelný nějakým lichým prvočíslem, tedy i $p(q^{2^k} + 1)$ bude nějaké liché prvočíslo. A důsledek říká, že žádné prvočíslo nedělí zároveň $q^{2^k} + 1$ a $q^{2^\ell} + 1$, tedy speciálně to platí i pro prvočíslo $p(q^{2^k} + 1)$, a proto $p(q^{2^\ell} + 1)$ bude jiné.

To znamená, že pokud se podíváme na čísla $p(q^{2^i} + 1)$ pro $1 \leq i \leq q + 1$, tak dostaneme $q + 1$ různých prvočísel, ale to znamená, že některé z nich jistě bude větší než q^4 . $\square$

Nyní už máme připravené všechno pro dokázání úlohy. Ukážeme, že pro každé liché prvočíslo q existuje n (pro každé prvočíslo jiné n), které splňuje zadání úlohy. To společně s tím, že prvočísel je nekonečně mnoho, již úlohu řeší.

Mějme tedy nějaké pevné prvočíslo $q > 2$ a vezměme k nejmenší takové, že $p(q^{2^k} + 1) > q$. Jistě $k \geq 1$. Ukážeme, že $n = q^{2^k}$ vyhovuje. (Zřejmě pro různá prvočísla dostaneme různá n .)

Jistě platí $p(n) = p(q^{2^k}) = q$ a z volby k máme $p(n + 1) = p(q^{2^k} + 1) > q$. Potřebujeme tedy dokázat, že $p(n - 1) = p(q^{2^k} - 1) < q$.

Platí

$$q^{2^k} - 1 = (q - 1)(q + 1)(q^2 + 1) \dots (q^{2^{k-1}} + 1),$$

a tedy

$$p(q^{2^k} - 1) = \max \{p(q - 1), p(q + 1), p(q^2 + 1), \dots, p(q^{2^{k-1}} + 1)\}.$$

Jistě $p(q - 1) < q$ a z volby k nejmenšího takového, že $p(q^{2^k} + 1) > q$ máme, že pro všechna $\ell < k$ platí $p(q^{2^\ell} + 1) < q$, přičemž nerovnost je ostrá, protože q jistě nedělí $q^{2^\ell} + 1$. To ale znamená, že i maximum z těchto výrazů je menší než q , a tedy skutečně $p(n - 1) < p(n) < p(n + 1)$.

⁴Samozřejmě by tu stačilo vzít si těch čísel i méně.

POZNÁMKY:

Všechna správná řešení použila stejné myšlenky, jako jsme si zde ukázali. Několik řešitelů se snažilo najít prvočísla tvaru $2p + 1$, kde p je prvočíslo. Potom stačí zvolit $n = 2p$ a to splňuje zadání.

Takovým prvočíslem se říká *prvočísla Sophie Germainové* nebo také tzv. *bezpečná prvočísla* (protože mají dobré kryptografické vlastnosti⁵), ale nikdo zatím bohužel (nebo naštěstí?) neumí dokázat, že je jich nekonečně mnoho. Předpokládá se, že tomu tak je, ale důkaz zatím nemáme. (Což je ostatně také důvod, proč jsme tuhle úlohu mohli zadat. Kdyby měla takovéhle řešení, tak by to nebyla moc dobrá úloha.)

(Matěj Konečný)

⁵Multiplikativní grupa čísel modulo $2p + 1$ má velkou podgrupu prvočíselného řádu.

Mnohoúhelníky

3. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

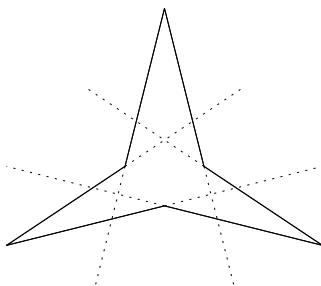
Úloha 1.

Nalezněte takový mnohoúhelník, aby každá jeho strana prodloužená na přímku protínala právě jednu další stranu v jejím vnitřním bodě.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Řešení je nekonečně mnoho, jeden z možných mnohoúhelníků je třeba tento:



POZNÁMKY:

Ačkoli mě potěšilo, že mnoho řešitelů bere úlohy vážně a snaží se okomentovat myšlenkový postup a dokázat jeho správnost i u jedničky, zadání říkalo „nalezněte“. Z obrázku je snadno vidět, jestli mnohoúhelník podmínku protínání stran splňuje, proto není potřeba nic dokazovat a zcela dostatečné je prostě nějaký vhodný načrtnout.

Někteří řešitelé si ale na obrázku nedali příliš záležet a nebylo jasné, jestli jejich mnohoúhelník splňuje zadání, nebo třeba prodloužená strana protíná místo jiné strany ve vnitřním bodě nějaký vrchol. Nakonec jsem za to body nestrhávala, protože je těžké najít hranici mezi „jasným“ a „nejasným“ obrázkem. Ale pro příště bych všem doporučila poslat dostatečně názorné řešení, aby neriskovali bodovou ztrátu.

(Bára Kociánová)

Úloha 2.

Červenáčkovi došly omalovánky, a tak vzal svůj oblíbený pravidelný 2016úhelník a začal jeho vrcholy barvit načerveno. Dokažte, že když jich obarvil 1010, některé čtyři červené body tvořily vrcholy obdélníku⁶.

(Marian Poljak)

⁶Obdélníkem je i čtverec.

ŘEŠENÍ:

O dvou vrcholech pravidelného mnohoúhelníka řekneme, že jsou *protějšší*, pokud je úsečka je spojující průměrem kružnice opsané danému mnohoúhelníku. Protože 2016 je sudé číslo, v Červenáčkově 2016úhelníku existuje ke každému vrcholu protějšší vrchol. Každý vrchol je obsažen v právě jedné dvojici a těchto dvojic protějšších vrcholů je 1008.

Červenáček obarvil 1010 vrcholů, takže musel z Dirichletova principu obarvit v alespoň dvou dvojicích protějšších vrcholů oba vrcholy. Vyberme tedy libovolné dvě takové dvojice a označme je $\{A_1, A_2\}$ a $\{B_1, B_2\}$.

Protože úsečka A_1A_2 je průměr kružnice opsané Červenáčkovu mnohoúhelníku, z Thaletovy věty jsou úhly $\sphericalangle A_1B_1A_2$ a $\sphericalangle A_1B_2A_2$ pravé. Analogicky odvodíme, že i úhly $\sphericalangle B_1A_1B_2$ a $\sphericalangle B_1A_2B_2$ jsou pravé, takže čtyřúhelník $A_1B_1A_2B_2$ je obdélník.

POZNÁMKY:

Ač se jednalo o dvojku, úloha se pro mnohé řešitele ukázala jako poměrně složitá. Ve vzorovém řešení je část s Dirichletovým principem popsána velmi stručně – z Dirichletova principu plyne jen, že jedna dvojice protějšších vrcholů je obarvená načerveno. Jednoduchou aplikací stejné věty na zbylé vrcholy pak získáme existenci druhé červené dvojice. Takovéto rozepisování je ale zbytečně složitě. Dokonce i bez Dirichletova principu je jasné, že obarvením 1010 vrcholů z 1008 dvojic jsme museli alespoň dvě obarvit celé. Je ale nutné zmínit, že vrcholy rozdělíme do dvojic. Kdo tento argument zamřel, ztratil body.

Mnozí řešitelé se snažili nějak popsat „nejhorší případ“. Někteří tvrdili, že nejhorším případem je situace, kdy Červenáček barví vrcholy, které spolu sousedí. Tuto skutečnost ale nijak nedokazovali a proto se dopustili zjednodušení úlohy.

Podobně někteří argumentovali tak, že Červenáček nejdřív obarvil z každé dvojice protilehlých vrcholů jeden vrchol a poté přibarvil další dva, které vytvořily obdélník. To ale není popis všech možných postupů obarvování a ani není a priori vidět, že by byl ze všech „nejhorší“. Účastníci, kteří tedy řešili úlohu tímto způsobem, se také dopustili zjednodušení. Mohlo totiž dojít například k tomu, že Červenáček nejdřív obarvil oba vrcholy z nějaké dvojice a až poté začal obarvovat z každé dvojice jen jeden vrchol. V tomto případě by prvních 1008 obarvených vrcholů také vytvořilo obdélník a jedna dvojice protilehlých vrcholů by byla kompletně neobarvená. Pak není zcela zřejmé, že by přidáním posledních dvou vrcholů vznikl červený obdélník. Podobných postupů obarvování by šlo nalézt ještě více a každý z nich by si přitom zasloužil alespoň stručný komentář.

(Martin „E. T.“ Sýkora)

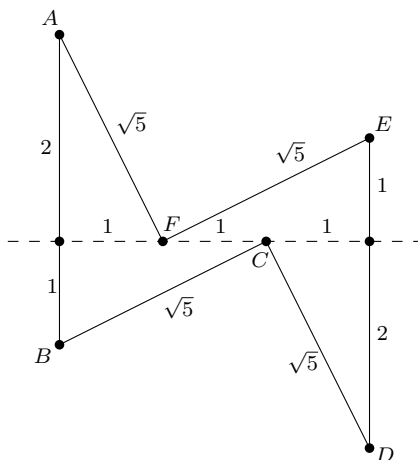
Úloha 3.

Najděte šestiúhelník, který lze rozdělit rovným řezem na čtyři shodné trojúhelníky.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Hledaný šestiúhelník může být například tento:



Řez rozdělí šestiúhelník $ABCDEF$ na čtyři trojúhelníky o stranách 1, 2 a $\sqrt{5}$ (tedy shodné podle věty *sss*). Podmínky v zadání jsou splněny.

POZNÁMKY:

Jak na správné řešení přijít? Položme si otázku, pod jakým úhlem α může řez protínat kteroukoliv stranu šestiúhelníka. Na druhé straně řezu totiž vznikne doplňkový úhel $180^\circ - \alpha$, a pokud jsou tyto dva úhly různé, nemohou se oba vyskytovat ve shodných trojúhelnících. Řez tedy protíná strany jediné pod pravým úhlem – a s touto znalostí už není těžké vhodný šestiúhelník sestrojit.

Dále bych chtěl poznamenat, že v úlohách, kde stačí najít nějaké jedno řešení, stačí zkonstruovat řešení (v této úloze například obrázkem) a ověřit, že vyhovuje podmínkám v zadání. Obšrný postup tentokrát nebyl nutný.

Z definice přiložené k zadání nebylo zcela jasné, zda pouhý dotyk považujeme za protínání se. Někteří účastníci tedy za šestiúhelník považovali i dva trojúhelníky dotýkající se vrcholy. Za nejasnost se omlouváme. Rádi bychom ale také připomněli, že pokud vám připadá na zadání něco divné – a výše popsany „šestiúhelník“ je skutečně dost zvláštní – pak je vždy lepší se nás zeptat na mks@mff.cuni.cz.
(Lucien Šíma)

Úloha 4.

Rozhodněte, zda pro nějaký stouhelník platí, že pro žádné $n < 100$ není možné vybrat n jeho stran a složit z nich n -úhelník.

(Matěj Konečný)

ŘEŠENÍ:

Uvědomíme si, že n -úhelník lze složit z n úseček právě tehdy, když je délka každé úsečky menší než součet délek zbylých úseček. Ukážeme, že stouhelník se stranami $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{98}$ a $2^{99} - 1,5$ splňuje zadání.

Nejprve ukážeme, že tento stouhelník umíme sestrojit. Potřebujeme ukázat, že nejdelší jeho strana je kratší než součet délek všech ostatních: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{98} = 2^{99} - 1 > 2^{99} - 1,5$.

Dále ukážeme, že pro $n < 100$ nejde z žádných n jeho stran sestrojit n -úhelník. Řešení rozdělíme na dva případy. Pokud je mezi vybranými stranami nejdelší strana o délce $2^{99} - 1,5$, zbylých nejvýše 99 stran může mít v součtu délku nejvýše $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{98} = 2^{99} - 2$, což je ostře menší než $2^{99} - 1,5$. To znamená, že v tomto případě nepůjde n -úhelník sestrojit. Pokud mezi vybranými stranami není $2^{99} - 1,5$, pak bude mít nejdelší strana délku 2^k pro nějaké vhodné k . Součet délek všech kratších stran je $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, a tedy ať z kratších stran vybereme jejich

jakoukoli podmnožinu, nejdelší strana bude vždy ostře delší než součet délek ostatních stran a n -úhelník nepůjde sestrojit.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů přišla na konstrukci příkladu pomocí stran, jejichž délky jsou mocninami dvojky. Někteří si ale neuvědomili, že samotný stouhelník musí jít zkonstruovat a nebo se jim nepodařilo konstrukci upravit tak, aby i zkonstruovatelný stouhelník stále splňoval zadání.

Velmi často se pro příklad nezkonstruovatelného n -úhleníku z n úseček používala rovnost délek nejdelší strany a součtu délek ostatních úseček, kdy by výsledný n -úhelník byl degenerovaný do úsečky. To je samozřejmě v pořádku, ve vzorovém řešení jsem se tomu vyhnul jen pro větší přehlednost. (Martin Töpfer)

Úloha 5.

Upovídaná ovečka se každý den pase na některém vrcholu daného 2017úhelníku. Zlý vlk chce ovečku sežrat. Aby to mohl udělat, musí být nějaký den ve stejném vrcholu 2017úhelníku jako ovečka, přičemž i -tou noc se musí přesunout po obvodu mnohoúhelníku o právě i vrcholů, počínaje první nocí. Naštěstí pro vlka je ovečka upovídaná, a tak všechna zvířátka (včetně vlka) dopředu vědí, kde se který den bude pást. Kolik nejméně dní potřebuje vlk, aby byl ovečku vždy schopen chytit nezávisle na tom, ve kterém vrcholu se sám první den nachází?

(Jakub Löwit)

ŘEŠENÍ:

Rozmyslíme si, že se nás úloha vlastně ptá na to, který den je vlk poprvé schopen být na libovolném vrcholu 2017úhelníku. Dokud totiž existuje vrchol, na který se daný den nemůže dostat, ovečka se může pást právě tam.

Úlohu nyní přeformulujeme: Zajímá nás, pro které nejmenší n existuje pro každé x z množiny $\{0, 1, 2, \dots, 2016\}$ taková posloupnost $(a_m)_{m=1}^n$, že $|a_m| = m$ a součet celé posloupnosti je kongruentní s x modulo 2017. Za pomoci předchozího pozorování snadno nahlédneme, že tato otázka je ekvivalentní otázce z úlohy.

V přeformulování úlohy můžeme ale ještě pokračovat. Všimneme si, že pokud navíc k součtu posloupnosti přičteme nějaké pevné číslo, tak se nezmění počet zbytkových tříd modulo 2017, do nichž se umíme dostat. Dokonce ho můžeme i vydělit⁷ pevným číslem nesoudělným s 2017, a počet pokrytých zbytkových tříd se též nezmění. Můžeme tedy k součtu posloupnosti navíc přičíst ještě součet všech čísel od 1 do n ; to je ale totéž, jako kdybychom místo čísel, která jsou v posloupnosti záporná, brali nulu a kladná přičítali dvakrát. Když nyní ještě vydělíme součet dvěma, podařilo se nám přeformulovat úlohu následovně:

Zjistěte, pro jaké nejmenší n umíte pro každé $x \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq x \leq 2016$ vybrat podmnožinu množiny $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ se součtem x .

Je zjevné, že n musí být tak vysoké, aby součet čísel od jedné do n byl alespoň 2016. Dosaďme-li do známého vzorce $n(n+1)/2 \geq 2016$, dostaneme kvadratickou nerovnici, kterou upravíme jako $(n-63)(n+64) \geq 0$. Odsud víme, že n je alespoň 63. Nyní ukažme, že pro $n = 63$ pokryjeme i všechna čísla menší než 2016. Budeme postupovat indukcí, tedy zkonstruujeme množinu pokrývající nulu a ukážeme, jak z množiny pokrývající $x < 2016$ vyrobíme množinu pokrývající $x+1$.

Nulu zjevně pokryjeme prázdnou množinou. Nyní mějme nějakou množinu M se součtem x ; ukážeme, jak ji předělat na množinu se součtem $x+1$. Pokud je nějaké $k < 63$ v M , ale $k+1$ ne, můžeme v M nahradit k číslem $k+1$. Pokud takové k neexistuje, ale jednička v M není, můžeme do M přidat jedničku. Pokud jednička v M je, a pro každé $k < 63$ z M je v M i $k+1$, tak už jsou

⁷Jak přesně funguje dělení při modulu si můžeš přečíst v nějakém článku, který se věnuje dělení nad konečným tělesem. My ale budeme dělit čísla pouze jejich děliteli, což funguje přesně tak, jak jsi zvyklý (zvyklá), takže se konečnými tělesy vůbec nemusíš trápit.

v M nutně všechna čísla, součet tedy už dosáhl 2016 a my jsme již zkonstruovali vhodnou množinu pro každé $x \leq 2016$.

Vlk chytí ovečku buď 63., nebo 64. den v závislosti na tom, jestli den před první nocí označíme jako den 0 nebo den 1.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů nevyužila možnosti přeformulovat si zadání jako ve vzoráku, což často vedlo k tomu, že bylo nějaké značení poněkud kostrbaté nebo špatně definované.

Mnohem horší je ale fakt, že opravdu nadpoloviční většina řešitelů použila skutečnost, že pro každé x najdeme podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ se součtem x , bez důkazu. Často toto tvrzení nebylo ani zformulováno. Bez něj ale vůbec není jasné, že celý důkaz funguje. Proto jsem řešením, kde jsem nenašel ani náznak důkazu (popř. evidentně nefunkční důkaz) tohoto tvrzení, strhával jeden bod.

Několik řešitelů též nepřišlo na to, že do závěrečné nerovnosti nepatří 2017, nýbrž jen 2016, kvůli čemuž jim vyšlo o den více. I tato chyba byla potrestána jednobodovou ztrátou. Někteří řešitelé se také pokoušeli ukázat přímo, že se i -tý den počet vrcholů, kde umí vlk být, zvýší o i . V takových řešeních však často chyběl jakýkoli důkaz, a tak většina z nich nedosáhla ani na tři body. Opět se však našli řešitelé, kteří poslali bezchybně a jasné sepsané elegantní řešení, i tentokrát jsem tedy mohl udělit několik $+i$.

(Viki Němeček)

Úloha 6.

Dva shodné pravidelné n -úhelníky se překrývají tak, že jejich průnik je $2n$ -úhelník (ne nutně pravidelný), jehož hrany postupně dokola očíslovujeme čísla 1 až $2n$. Dokažte, že součet délek jeho sudě očíslovaných stran je stejný jako součet délek jeho stran s lichým číslem.

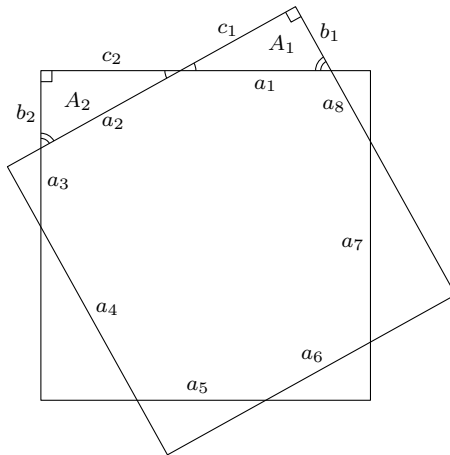
(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Délky stran našho $2n$ -uholníka si označíme $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$. Nad každou z těchto stran je trojuholník (trojuholník nad stranou a_i označíme A_i), ktorého tretí vrchol (prvé dva sú koncové body danej strany) je vrchol jedného z n -uholníkov. Trojuholníky zodpovedajúce susedným stranám sú podobné, pretože majú dva rovnaké vrcholové uhly, okrem toho má každý jeden uhol z jedného z pôvodných pravidelných n -uholníkov, a tie sú tiež rovnaké. Preto sú si všetky trojuholníky A_i navzájom podobné. Zvyšné strany v trojuholníku A_i si označíme b_i, c_i , a to tak, aby vďaka podobnosti platilo

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_{2n}}{a_{2n}} = p \quad \text{a} \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \dots = \frac{c_{2n}}{a_{2n}} = r$$

pre nejaké p, r kladné.



Teraz vyjadríme obvod n -uholníkov pomocou strán našich trojuholníkov. Keďže susedné strany $2n$ -uholníka nikdy nepatria do toho istého trojuholníka, dostávame, že obvod prvého n -uholníka je $\sum_{k=1}^n a_{2k} + b_{2k-1} + c_{2k-1}$ a druhého $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} + b_{2k} + c_{2k}$. Naše n -uholníky sú zhodné, preto majú rovnaké obvody, a teda dostávame

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} + b_{2k-1} + c_{2k-1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} + b_{2k} + c_{2k}.$$

Dosadíme koeficienty podobnosti a máme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{2k} + p a_{2k-1} + r a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} + p a_{2k} + r a_{2k-1}, \\ (1-p-r) \sum_{k=1}^n a_{2k} &= (1-p-r) \sum_{k=1}^n a_{2k-1}. \end{aligned}$$

Pokiaľ by $1-p-r=0$, tak by sme dostali $a_1 - p a_1 - r a_1 = 0$, a teda $a_1 - b_1 - c_1 = 0$. Trojuholník A_1 by nesplňoval trojuholníkovú nerovnosť. Preto $1-p-r$ je nenulové, môžeme ním nerovnosť vydeliť, a dostávame, že súčet dĺžok nepárnych strán je rovnaký ako súčet dĺžok párnych strán.

POZNÁMKY:

Je dôležité si uvedomiť, že na to, aby prienik dvoch rovnakých pravidelných n -uholníkov bol $2n$ -uholník, musia byť útvary umiestnené ako na obrázku. Toto sa dá nahliadnuť nasledovne.

Označíme pravidelné n -uholníky A, B . Pravidelný n -uholník A je konvexný, a preto každá úsečka ho pretína v najviac dvoch bodoch. Každá strana n -uholníka B teda pretína n -uholník A v práve dvoch bodoch. Tieto dva priesečníky musia ležať na susedných stranách, inak by jedna strana n -uholníka A žiaden priesečník nemala.

Bohužiaľ pri zadávaní tejto úlohy sme si neuvedomili, že sa treba vysporiadať aj s touto časťou úlohy, pretože skutočným cieľom nemalo byť rozoberanie postavenia n -uholníkov, ale dokázanie danej rovnosti. Preto sme sa rozhodli nestrhávať body za zabudnutie popisu vzájomnej polohy n -uholníkov a chválime riešiteľov, ktorí sa tým vo svojom riešení viac či menej zaoberali.

Samotnú rovnosť dokazovala väčšina riešiteľov podobne ako vzorové riešenie, občas ľudia zabúdali vysvetliť, prečo rovnosť môžu vydeliť. Našli sa aj nejakí, ktorí úlohu vyriešili tak, že rozložili

zobrazení, které zobrazilo jeden n -uholník na druhý na otočení a posunutí, a ukazovali, že tieto zobrazenia rovnosť zachovávajú, ale tieto riešenia boli väčšinou ťažkopádnejšie.

(Marta Kossaczka)

Úloha 7.

Pro $n \geq 3$ je dán konvexní n -úhelník K , jehož žádné čtyři vrcholy neleží na jedné kružnici. Trojúhelník daný trojicí vrcholů n -úhelníku K nazveme *pokrývací*, pokud jemu opsaný kruh pokrývá K . Dokažte, že pokrývacích trojúhelníků je přesně $n - 2$.

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Nejprve ukážeme, že existuje triangulace K , jejíž všechny trojúhelníky jsou pokrývací. Vezmeme si libovolnou stranu n -úhelníku AB . Pro všechny vrcholy K kromě A a B se podíváme na úhel, pod nímž je z nich vidět úsečka AB (K je konvexní, proto jsou všechny tyto vrcholy v jedné polorovině určené přímkou AB). Označíme si C vrchol, pro který je tento úhel nejmenší. Nyní z vlastností obvodových úhlů víme, že trojúhelník ABC je pokrývací. Pokud K je trojúhelník, jsme hotovi, jinak nechť BÚNO AC není v K strana, ale úhlopříčka.

Všimneme si, že pro libovolný vrchol X mnohoúhelníku K , který neleží v polorovině ACB ,⁸ obsahuje kruh opsaný $\triangle ACX$ všechny vrcholy K , které jsou v polorovině ACB . To platí proto, že X určitě leží stejně jako tyto vrcholy v kruhu opsaném $\triangle ABC$. Hraniční kružnici tohoto kruhu nazveme k . Kružnice l opsaná $\triangle ACX$ je v polorovině ACX uvnitř kružnice k a má s ní právě dva společné body A, C . V polorovině ACB tedy leží vně k , a proto v ní v této polorovině leží vše, co leží v kružnici k . Kruh opsaný trojúhelníku ACX tedy pokrývá část K ležící v polorovině ACB .

Díky tomu můžeme stejným způsobem, jakým jsme našli ABC , najít trojúhelník pokrývací část K ležící v polorovině ACX s jednou hranou AC . Z předchozího víme, že je tento trojúhelník pokrývací i pro celý K . Dalším aplikováním tohoto postupu na každou úhlopříčku K , která se stane hranou nějakého pokrývacího trojúhelníku, najdeme triangulaci, kterou jsme hledali.

Tím jsme ukázali, že v K je alespoň $n - 2$ pokrývacích trojúhelníků, právě tolik trojúhelníků totiž má každá triangulace. Nyní stačí ukázat, že žádné další pokrývací trojúhelníky už neexistují.

Buď L, M, N a O vrcholy K , které leží na obvodu K v tomto pořadí. Ukážeme, že nemůže existovat pokrývací trojúhelník se stranou LN a současně jiný se stranou MO . Kdyby existovaly, musela by úsečka MO ležet v nějaké kružnici nad úsečkou LN . Z vlastností obvodových úhlů by tedy musel být součet velikostí úhlů LMN a NOL větší než 180° . Současně by ale symetricky musel být větší než 180° i součet úhlů MNO a OLM , což je ve sporu s tím, že součet úhlů ve čtyřúhelníku $LMNO$ je 360° .

Protože už ale máme triangulaci z pokrývacích trojúhelníků, musel by každý další trojúhelník protínat nějaký již nalezený způsobem, o němž jsme právě dokázali, že není možný. Pokrývacích trojúhelníků je tedy právě $n - 2$ a tvrzení je dokázáno.

POZNÁMKY:

Zhruba třetina řešitelů se snažila úlohu řešit od začátku indukci, což typicky vedlo k dlouhému řešení, které se podařilo dovést do úspěšného konce jen Pavlu Turkovi.

Další asi polovina řešení více či méně kopírovala vzorák, mnozí řešitelé však zapomněli na poslední část, tedy ukázat, že žádné jiné pokrývací trojúhelníky neexistují. Ti dostali po čtyřech bodech. Několika řešitelům se naopak povedlo krásně sepsané kompletní řešení, ti pak byli po zásluze odměněni +i.

(Viki Němeček)

⁸Značením „polorovina ACB “ máme na mysli polorovinu s hraniční přímkou AC , v níž leží bod B .

Úloha 8.

Rado a kaktus hrají logickou hru s pravidelným $(2n + 1)$ -úhelníkem, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Hrají střídavě, přičemž Rado začíná a každý z nich ve svém tahu začerní jeden dosud nezačerněný vrchol. Vyhraje ten, po jehož tahu na papíře nezůstane žádný ostroúhlý trojúhelník s vrcholy v nezačerněných vrcholech původního $(2n + 1)$ -úhelníku. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Úlohu budeme řešit indukcí, ale protože vůbec není vidět, jak provádět indukční krok, uděláme nejprve několik pozorování, které nám úlohu převedou na jinou, lépe uchopitelnou.

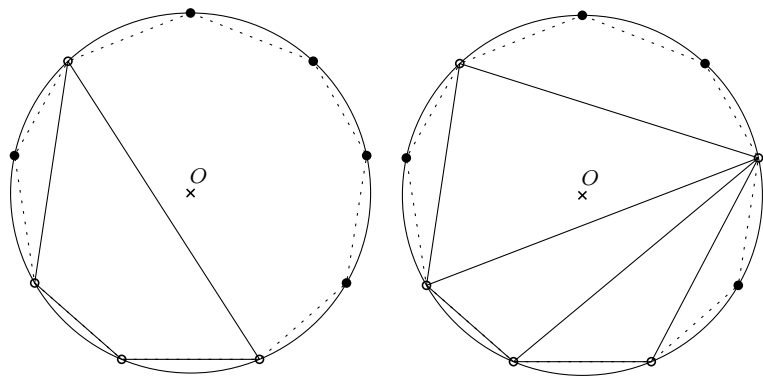
Označme si střed kružnice opsané našemu mnohoúhelníku jako O . Pokud A , B a C jsou tři různé vrcholy mnohoúhelníku, pak $\sphericalangle ABC$ je ostrý právě tehdy, když je oblouk ABC delší než polovina obvodu kružnice. To nastane právě tehdy, když je O (ostře) na stejné straně od AC jako B . To samé uděláme i pro úhly $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle CAB$ a dostaneme, že $\triangle ABC$ je ostroúhlý právě tehdy, když O leží uvnitř něj. S tímto pozorováním lehce vydedukujeme následující lemma.

Lemma. *Ostroúhlý trojúhelník s vrcholy v nezačerněných vrcholech neexistuje právě tehdy, když existuje n začerněných za sebou jdoucích vrcholů.*

Důkaz. Vytvořme si konvexní mnohoúhelník M z nezačerněných vrcholů. Nechť AB je jedna jeho strana. Bod O leží od AB ve stejné polorovině jako zbytek M právě tehdy, když mezi A a B je nejvýše $n - 1$ vrcholů. Z toho plyne, že neexistence n začerněných vrcholů vedle sebe je ekvivalentní tomu, že od každé strany M leží O ve stejné polorovině určené tou stranou jako zbytek M , neboli O leží uvnitř M .

Nyní pokud by existoval ostroúhlý trojúhelník z nezačerněných vrcholů, pak O leží uvnitř něj, takže neexistuje n za sebou jdoucích začerněných vrcholů.

Na druhou stranu pokud neexistuje n za sebou jdoucích začerněných vrcholů, pak O leží uvnitř M , takže rozřezáním M na trojúhelníky určitě najdeme nějaký, uvnitř kterého je O (nemůže být na hraně, protože $2n + 1$ je liché číslo), a tento trojúhelník proto bude ostroúhlý. $\square$

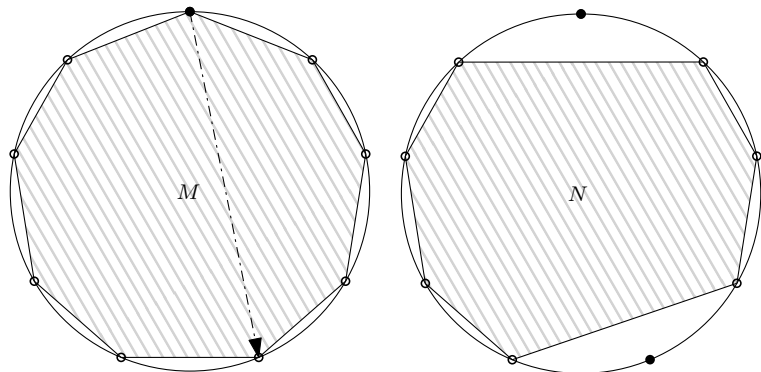


Nyní si všimněme, že se v tuto chvíli už vůbec nemusíme zabývat ostroúhlými trojúhelníky a náš $(2n + 1)$ -úhelník nemusí být pravidelný. Stačí uvažovat, že Rado a kaktus prostě hrají na obecném $(2n + 1)$ -úhelníku a vyhraje ten, kdo první začerní n za sebou jdoucích vrcholů. Tady už vcelku jednoduchou indukcí ukážeme, že Rado nemá šanci.

Pro $n = 2$ hrajeme na pětiúhelníku. Tam vyhraje ten, kdo první začerní dva za sebou jdoucí vrcholy. Tudíž Rado prvním tahem určitě nevyhraje, ale kaktus jednoduše vyhraje druhým tahem tak, že začerní jeden ze sousedních vrcholů.

Nyní necht kaktus umí vyhrát pro $(2n - 1)$ -úhelník pro $n > 2$. Ukážeme, že umí vyhrát i pro $(2n + 1)$ -úhelník, který si označíme M . Cílem je zjevně jako první začernit n za sebou jdoucích vrcholů.

Ať Rado v prvním tahu zahraje kamkoliv (nazvěme tento vrchol R), kaktus zahraje do jednoho z vrcholů, které jsou nejdál od Radem začerněného (nazvěme jím zvolený vrchol K). Takže budou začerněné dva vrcholy, které mezi sebou mají n nezačerněných vrcholů v jednom směru a $n - 1$ ve druhém. Nyní si kaktus představí, že se hraje jen na $(2n - 1)$ -úhelníku ze zbývajících vrcholů, který nazveme N . Tam už zná vyhrávající strategii a hraje podle ní.



Proč tento postup funguje? Zjevně jde o to ukázat, že souvislý úsek n začerněných vrcholů v M vznikne právě tehdy, když v N vznikne souvislý úsek $n - 1$ začerněných vrcholů.

Prvně, pokud v M je souvislý začerněný úsek délky n , pak určitě v N je souvislý úsek délky $n - 1$. To platí proto, že souvislý úsek délky n nemůže obsahovat zároveň R i K , a tedy v N se toto projevuje jako souvislý úsek délky n nebo $n - 1$.

Na druhou stranu, necht v N existuje $n - 1$ za sebou jdoucích začerněných vrcholů. Potom tento úsek v M obsahuje uvnitř sebe nebo alespoň na jedné straně od sebe jeden z vrcholů R nebo K , protože nejdelší úsek mezi R a K má n vrcholů. Pak se ale do tohoto úseku dá R nebo K přidat a dostaneme souvislý úsek začerněných vrcholů v M délky n .

Tím máme hotovo a dostáváme z toho, že Rada vždycky rozdrtí kaktus.

POZNÁMKY:

Indukce byla v takovéto neindukční úloze celkem trik a to se také projevilo na počtu správných řešení. Obzvlášť u takovéto obtížné stravitelné úlohy bych rád pochválil všechny, kteří se snažili psát svá řešení tak, aby se dala číst :) (Rado van Švarc)

Geometrie trojúhelníka 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

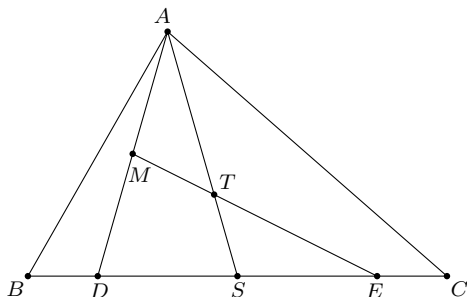
Na straně BC daného trojúhelníka ABC se pohybují body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Označíme-li M střed úsečky AD , dokažte, že přímka ME prochází pevným bodem (nezávislým na poloze bodů D , E).

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Buď S střed strany BC a T těžiště $\triangle ABC$. Z definice těžiště plyne, že T dělí AS v poměru $2 : 1$. Ukážeme, že T je hledaným bodem.

Nejprve se zvlášť podívejme na případ $D = E$. Pak musí platit $D = E = S$ a jednoduše dostáváme, že EM skutečně prochází bodem T . Dále nechť $D \neq E$. Protože S je středem BC a $|BD| = |EC|$ (přičemž D , E leží oba uvnitř strany BC), jde zároveň také o střed úsečky DE . Úsečka AS je tudíž těžnicí v $\triangle DAE$. Bod T dělí těžnici v poměru $2 : 1$ a je tedy těžištěm $\triangle DAE$. Pak ale EM musí procházet skrz T , neboť EM je také těžnice v $\triangle DAE$.



POZNÁMKY:

Úloha byla jednoduchá a to se také projevilo na počtu správných řešení. Objevilo se pár drobných nedostatků – konkrétně mnoho řešení přímo prohlásilo, že dva trojúhelníky sdílející těžnici mají i stejné těžiště (bez jakéhokoliv dalšího vysvětlení), nebo opomnělo, že pro $|BD| \geq |CE|$ situace nevypadá tak jako na obrázku. Nakonec jsem se ale rozhodl za tyto drobnosti body nestrhávat.

Rád bych také pochválil všechny, kteří poslali řešení podobné vzoráku, oproti těm, kteří zdlouhavě řešili úlohu pomocí středních příček a stejnolehlostí.

(Rado van Švarc)

Úloha 2.

V trojúhelníku ABC s opsištěm O , těžištěm T a kolmištěm H označme O_a osový obraz O podle strany BC a analogicky sestrojme body O_b a O_c . Dále označme X střed úsečky HT . Dokažte, že přímky AH , O_aX a O_bO_c procházejí jedním bodem.

(David Hruška)

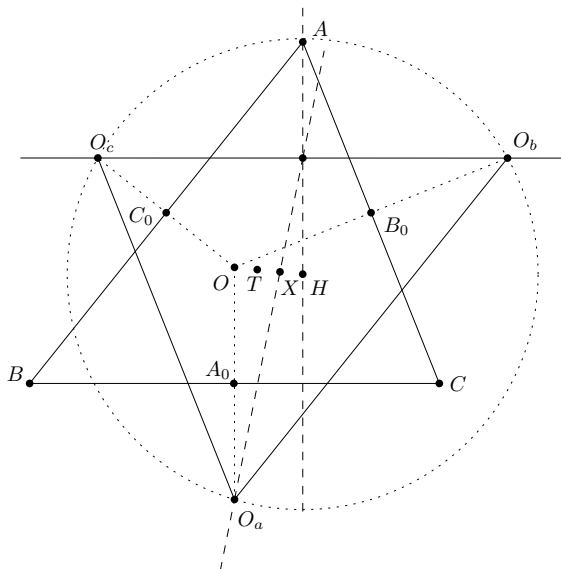
ŘEŠENÍ POZNÁVÁNÍM BODŮ:

Podívejme se na trojúhelník $O_aO_bO_c$. Díky definici bodů O_a , O_b a O_c je obrazem trojúhelníku $A_0B_0C_0$ ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem dva.

Jelikož je bod O kolmištěm trojúhelníku $A_0B_0C_0$ ⁹ a jakožto střed zmíněné stejnolehlosti se zobrazí sám na sebe, je i kolmištěm trojúhelníku $O_aO_bO_c$.

Z tvrzení o překlápění kolmiště¹⁰ plyne, že bod H leží na kružnici opsané překlopené podle strany BC , jejíž střed je překlopený bod O , neboli O_a . Proto $|HO_a| = |HO_b| = |HO_c| = R$, kde R je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . Tedy H je opsištěm v trojúhelníku $O_aO_bO_c$. Těžištěm trojúhelníku $O_aO_bO_c$ je tedy bod ve třetině úsečky OH blíž k H (to je teď opsiště), což je bod X .

Nyní již snadno dokážeme, že všechny tři zkoumané přímky procházejí středem úsečky O_bO_c : přímka O_bO_c obsahuje celou tuto úsečku, přímka AH je kolmicí na stranu O_bO_c procházející opsištěm, takže je osou této strany, a konečně O_aX je těžnice, takže prochází středem strany proti vrcholu O_a .



ŘEŠENÍ STEJNOLEHLOSTÍ:

Celý obrázek proženeme stejnolehlostí se středem v bodě O a koeficientem $1/2$. Zřejmě stačí dokázat, že obrazy všech tří přímek ze zadání procházejí jedním bodem, a to konkrétně středem těžnice t_a .

Body O_a , O_b a O_c se díky své definici zobrazily postupně na body A_0 , B_0 a C_0 , takže obrazem přímky O_bO_c je přímka B_0C_0 , která zřejmě pólí těžnici t_a .

⁹Osy stran jsou výšky v trojúhelníku ze středních příček, viz Tvrzení 16 v prvním dílu seriálu.

¹⁰Osové obrazy H podle stran leží na kružnici opsané, viz Tvrzení 19 v prvním dílu seriálu.

Víme, že O , T a H leží na přímce v tomto pořadí a platí $|OT| : |TH| = 1 : 2$. Protože X je střed TH , leží i X na této přímce a platí $|OT| : |TX| : |XH| = 1 : 1 : 1$. Z toho plyne, že T je středem OX , čili obrazem X je bod T a obrazem přímky O_aX je přímo t_a .

Přímka AH se dvakrát přiblíží k přímce OO_a , neboť ta je s ní rovnoběžná a obsahuje střed stejnolehlosti. Obrazem AH je tedy osa pásu ohraničeného přímkami AH a OO_a a jako taková jistě pólí příčku tohoto pásu – téžnici A_0A . Všechny tři zobrazené přímky tedy procházejí středem téžnice t_a .

POZNÁMKY:

Velká většina správných řešení postupovala podle jednoho z výše zmíněných. V prvním případě někteří ukázali, že trojúhelník $O_aO_bO_c$ je dokonce středově souměrný s trojúhelníkem ABC podle středu OH , neboli středu Feuerbachovy kružnice v ABC . Všechna řešení obsahovala mnoho jednoduchých kroků a často některé drobnosti chyběly nebo mi nebylo jasné, co má z čeho plynout. Přišlo mi ale spravedlivější tyto drobnosti přecházet, takže jsem nakonec hodnotil spíš mírně. Chtěl bych řešitele této úlohy pochválit, neboť skoro všichni postupovali správně nebo si aspoň všimli správných věcí, a některé vyzvat, aby si příště dali práci s přesnější (ale ne nutně obsáhlejší) argumentací.

(David Hruška)

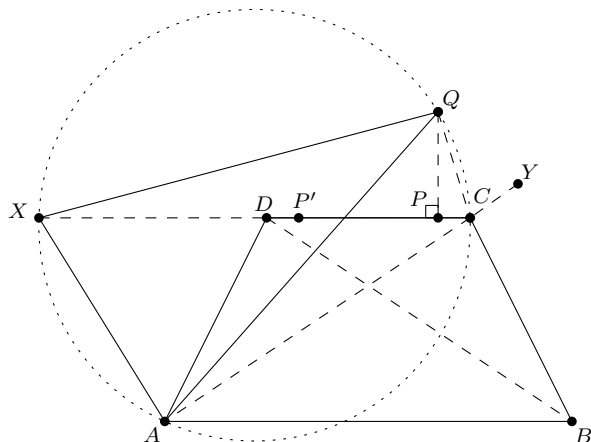
Úloha 3.

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, ve kterém $AB \parallel CD$. Kružnice vepsaná trojúhelníku BCD se dotýká strany CD v bodě P . Buď Q bod na vnitřní ose úhlu CAD takový, že $QP \perp CD$. Druhý průsečík kružnice opsané trojúhelníku QCA s přímkou CD nazvěme X . Ukažte, že trojúhelník QAX je rovnoramenný.

(Rado van Švarc)

ŘEŠENÍ:

Nechť P' je bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ACD se stranou CD . Trojúhelníky ACD a BCD jsou souměrné podle osy souměrnosti rovnoramenného lichoběžníka $ABCD$, tudíž $|DP'| = |CP|$. Ze seriálu víme, že body dotyku kružnice vepsané a připsané trojúhelníku ACD se stranou CD jsou souměrné podle středu strany CD , a proto je P bodem dotyku kružnice připsané trojúhelníku ACD ke straně CD . Střed této kružnice¹¹ tedy leží na kolmici vedené bodem P ke straně CD a také na ose úhlu CAD ; proto se jedná o bod Q . Z toho plyne, že QC je osou vnějšího úhlu ACD .



¹¹V seriálu bychom ho nazvali „připsiště“, což klidně smíte dělat i ve svých řešeních. Toto řešení je záměrně sepsané tak, aby s ním byli spokojeni i opravovatelé matematické olympiády.

K dokončení úlohy ukážeme, že $|\sphericalangle QXA| = |\sphericalangle QAX|$. Nechť Y je bod na opačné polopřímce k CA . S využitím tětiového čtyřúhelníka $ACQX$ můžeme psát

$$|\sphericalangle QXA| = 180^\circ - |\sphericalangle QCA| = |\sphericalangle QCY| = |\sphericalangle QCX| = |\sphericalangle QAX|.$$

POZNÁMKY:

Téměř všechna správná řešení využila faktu, že Q je střed kružnice připsané trojúhelníku ACD . Dá se také úhlit v kružnici opsané trojúhelníku QCD se středem ve Švrčkově bodě¹², ale tento postup bývá zdoluhavější. Chci připomenout, že nové body, které se nevyskytují v zadání, nestačí mít značené v obrázku, nýbrž je nutné je explicitně definovat slovním komentářem.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

¹²O Švrčkově bodě se dočtete ve druhém díle seriálu.

Povídání ke druhé jarní sérii

Tématem druhé jarní série tohoto ročníku je stereometrie neboli geometrie v prostoru. Protože se ale ve škole o prostorové geometrii vážně mluví až ve vyšších ročnících, přinášíme Ti v tomto textu definice pojmů, které se vyskytují v zadání.

Mnohostěn

S mnohostěny ses určitě již někdy potkal(a). Aby ale bylo jasné, co přesně mnohostěn je nebo není, budeme se držet následující definice.

Definice. *Mnohostěn* je trojrozměrné geometrické těleso, jehož povrch se skládá z konečně mnoha stěn tvořených mnohoúhelníky.

Mnohostěny mohou mít různé speciální vlastnosti. O mnohostěnu řekneme, že je *konvexní*, pokud každá úsečka spojující jeho libovolné dva body je celá uvnitř nebo na povrchu tohoto mnohostěnu. Ostatní mnohostěny nazveme *nekonvexní*.

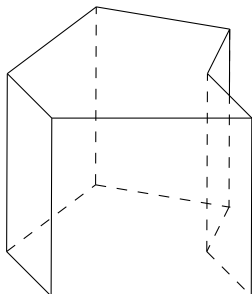
Mnohostěn též může být *pravidelný*. To značí, že z každého jeho vrcholu vychází stejné množství hran, každá stěna je ohraničena stejným počtem hran a současně je každá stěna pravidelný mnohoúhelník. Existuje (až na podobnost) právě pět různých pravidelných konvexních mnohostěnů: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. O těch se někdy dohromady mluví jako o Platónských tělesech.

Hranol

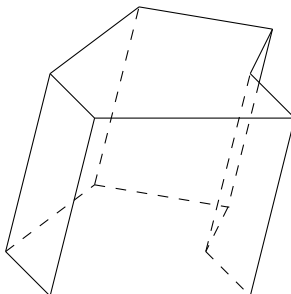
Speciálním typem mnohostěnů jsou hranoly.

Definice. *Hranol* je trojrozměrné těleso se dvěma rovnoběžnými podstavami (někdy též základnami) takovými, že jedna podstava je posunutím druhé. Sobě odpovídající vrcholy podstav jsou propojeny hranami.

Pokud je směr posunutí, které zobrazí jednu podstavu na druhou, kolmý na roviny podstav, nazveme hranol *kolmý*, jinak ho nazveme *šikmý*.



kolmý hranol



šikmý hranol

Všechny boční stěny kolmého hranolu jsou obdélníky. V šikmém hranolu jsou boční stěny obecně rovnoběžníky, ač některé z nich mohou být i obdélníky.

O hranolu řekneme, že je n -boký, jsou-li jeho podstavy n -úhelníky. Vzdálenost mezi rovinami podstav hranolu nazveme *výškou* hranolu.

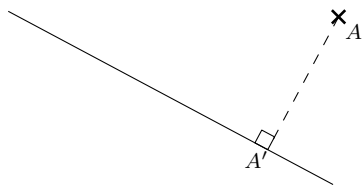
Projekce

Poslední pojem, který si v tomto textu objasníme, je kolmá projekce bodu na rovinu či přímku.

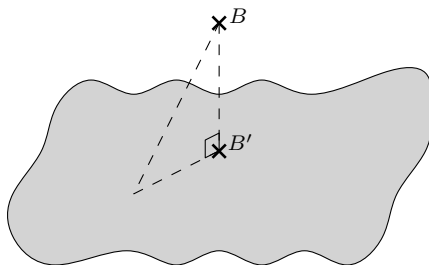
Definice. *Kolmou projekcí* bodu A do roviny ρ je průsečík této roviny a kolmice na ni vedené z bodu A .

Kolmou projekcí bodu A na přímku p označíme průsečík této přímky s kolmicí spuštěnou na přímku p z bodu A .

Pro lepší představu zde nalezněš obrázek znázorňující, jak může taková kolmá projekce bodu na rovinu nebo na přímku vypadat. Za zmínku stojí fakt, že máme-li jeden zdroj světla v nekonečnu, pak stín nějakého tělesa bude právě jeho kolmá projekce na rovinu kolmou na směr, odkud přichází světlo. Tu vytvoříme nalezením projekce každého bodu tělesa na tuto rovinu.



kolmá projekce na přímku



kolmá projekce na rovinu

Geometrie trojúhelníka II – Konstrukce pokračuje

Geometry is just plane fun. – neznámý autor

Vítáme vás u druhého dílu seriálu. I tentokrát vám předvedeme několik triků, které se mohou hodit při řešení úloh kteréhokoliv kola matematické olympiády nebo významného matematického semináře. A protože toho máme na programu hodně, nebudeme se zdržovat dlouhým úvodem a rovnou se pustíme do práce!

Rychlůvod do mocnosti

V minulém díle jsme si na začátku stručně popovídali o stejnostech, abychom ji poté mohli využívat. Nyní uděláme něco podobného, tentokrát si ovšem představíme mocnost. Stejně jako posledně, ani tentokrát nebudeme uvedená fakta dokazovat.

Pro kružnici k se středem O a poloměrem R budeme *mocností* bodu X ke kružnici k myslet číslo $p(X, k) = |XO|^2 - R^2$.

Povšimněme si, že mocnost bodu je kladná pro X vně k , nulová pro X ležící na k a záporná¹³ pro X ležící uvnitř k .

Tvrzení 1. *Nechť přímka ℓ vedená bodem X protne k v bodech P a Q . Potom $p(X, k) = |XP| \cdot |XQ|$ pro X ležící vně k a $p(X, k) = -|XP| \cdot |XQ|$ pro X ležící uvnitř k .*

Speciálně pokud X leží vně k a T je bod dotyku tečny z X ke k , pak $p(X, k) = |XT|^2$.

Nejdůležitějším důsledkem mocnosti je následující věta.

Tvrzení 2. *Pokud $ABCD$ je čtyřúhelník, X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AC a BD , pak $ABCD$ je tětíkový právě tehdy, když $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$, a to nastane právě tehdy, když $|YA| \cdot |YC| = |YB| \cdot |YD|$.*

Podobně pro trojúhelník ABC a bod X ležící na přímce AB mimo úsečku AB platí, že XC je tečnou k $\triangle ABC$ právě tehdy, když $|XA| \cdot |XB| = |XC|^2$.

Je přirozené ptát se, kdy má daný bod ke dvěma různými kružnicím stejnou mocnost. Odpověď na tuto otázku je druhým nejdůležitějším faktem o mocnosti:

Tvrzení 3. *Pokud ω_1 a ω_2 jsou kružnice s různými středy O_1 a O_2 , potom existuje přímka ℓ kolmá na O_1O_2 taková, že pro libovolný bod X platí $p(X, O_1) = p(X, O_2)$ tehdy a jen tehdy když X leží na ℓ . Těto přímce říkáme *chordála* kružnic ω_1 a ω_2 .*

Speciálně pro kružnice protínající se ve dvou bodech je chordálou spojnice těchto bodů. Pokud se dvě kružnice dotýkají, potom chordálu představuje společná tečna v bodě dotyku.

¹³Občas se ovšem v matematické literatuře mocnost definuje jako absolutní hodnota příslušného rozdílu, a pak samozřejmě záporná být nemůže.

Nakonec ještě uvedme tvrzení, které dostaneme využitím poslední věty pro trojici kružnic.

Tvrzení 4. *Nechť ω_1 , ω_2 a ω_3 jsou kružnice. Potom pokud ke každé dvojici kružnic sestojíme jejich chordálu, jsou tyto buď rovnoběžné, nebo se protínají v jednom bodě. V druhém případě tento bod nazýváme *potenčním středem* kružnic ω_1 , ω_2 a ω_3 .*

Švrčkův bod

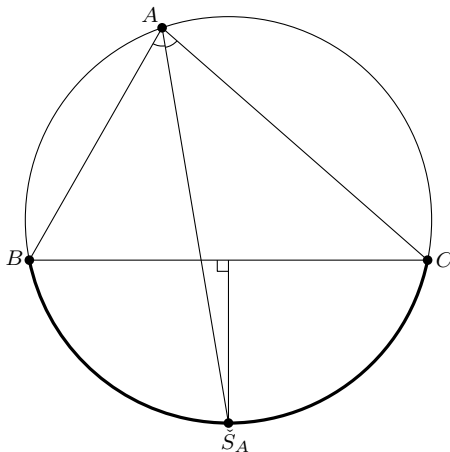
Geometry keeps you in shape. – neznámý autor

V tomto oddíle se budeme věnovat bodu, kterému se v česko-slovenském olympiádním prostředí často říká „Švrčkův“ na počest matematika, geometra a organizátora matematických olympiád Jaroslava Švrčka. Poznamenejme ovšem, že toto označení není žádným způsobem oficiální a v matematických olympiádách (které občas opravuje i sám pan Švrček) doporučujeme ho příliš nepoužívat.

Na příkladě Švrčkova bodu si předvedeme zajímavý geometrický princip. Představte si, že se snažíte dokázat to, že se tři objekty protínají v jediném bodě. Obvyklý postup je nějak si označit průsečík dvou z nich a pak se snažit ukázat, že leží i na tom třetím. Náš princip by se dal shrnout slovy „na pořadí záleží“ – když zvolíte nevhodný průsečík, budete mít mnohem víc práce.

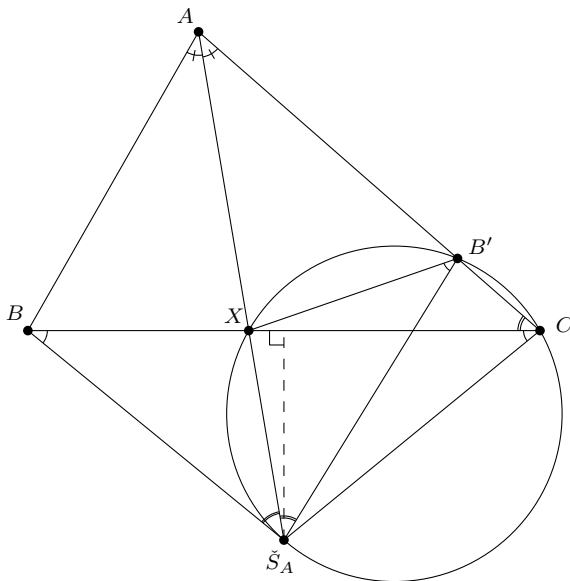
Tvrzení 5. *V trojúhelníku ABC mají osa strany BC , vnitřní osa úhlu CAB a kružnice opsaná společný bod. Tento bod neoficiálně nazýváme *Švrčkův bod* příslušející vrcholu A a značíme jej $\check{S}_A$.*

Důkaz. (první) Nazvěme kružnici opsanou $\triangle ABC$ jako Ω . Nechť osa úsečky BC protíná Ω v bodě $\check{S}_A$. (Takové průsečíky jsou dva; vybereme ten, který leží na opačné straně od přímky BC než bod A .) Potom mají oblouky $B\check{S}_A$ a $\check{S}_AC$ stejnou délku, a proto jim přísluší stejný obvodový úhel. Proto $|\angle B A \check{S}_A| = |\angle \check{S}_A A C|$, takže $\check{S}_A$ skutečně leží na ose vnitřního úhlu BAC . Lehké, žeano? $\square$



Důkaz. (druhý) Tentokrát $\check{S}_A$ definujeme jako průsečík Ω a vnitřní osy úhlu BAC (různý od A). Potom obloukům $B\check{S}_A$ a $\check{S}_AC$ přísluší obvodový úhel stejné velikosti, takže musejí být stejně dlouhé. Proto je $|B\check{S}_A| = |\check{S}_AC|$, takže $\check{S}_A$ leží na ose strany BC a jsme opět hotovi. Tento důkaz je prakticky stejný jako ten předchozí, jen obrácený a je pořád stejně těžký. $\square$

Důkaz. (třetí) Co se stane, když $\check{S}_A$ definujeme jako průsečík osy BC a vnitřní osy $\sphericalangle BAC$? Tak zaprvé, pro $|BA| = |AC|$ tato definice nedává žádný smysl, protože v tu chvíli tyto dvě přímky splývají. Ale dobře, v tomto speciální případě je zjevné, že tvrzení platí. Takže předpokládejme, že $|BA| \neq |AC|$. Co teď? Situace je oproti předchozím dvěma o dost těžší, protože tu není žádný zjevný způsob, jak přenášet úhly. Řešení stále existuje, ale je poněkud trikové. BÚNO předpokládáme, že $|BA| < |AC|$. Nechť B' je obraz B podle $A\check{S}_A$.¹⁴ Protože $A\check{S}_A$ je osa úhlu, leží B' na straně AC . Nechť X je průsečík $A\check{S}_A$ s BC . Potom platí $\sphericalangle X B' \check{S}_A = \sphericalangle X B \check{S}_A = \sphericalangle X C \check{S}_A$, takže $X\check{S}_A C B'$ je tětivový čtyřúhelník. Potom ale $\sphericalangle ACB = \sphericalangle B' C X = \sphericalangle B' \check{S}_A X = \sphericalangle X \check{S}_A B = \sphericalangle A \check{S}_A B$, z čehož už plyne, že $\check{S}_A$ leží na Ω .



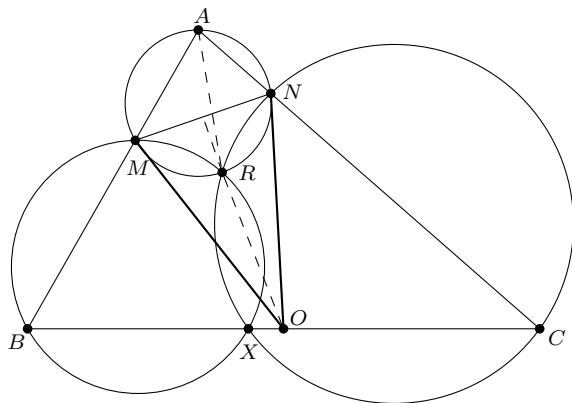
□

Nyní pomocí této vlastnosti Švrčkova bodu vyřešíme příklad z mezinárodní olympiády.

Příklad 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, ve kterém $|AB| \neq |AC|$. Kružnice nad průměrem BC protíná strany AB a AC postupně v bodech M a N . Označme jako O střed strany BC . Vnitřní osy úhlů BAC a MON se protínají v R . Dokažte, že se kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR protínají na straně BC . (IMO 2004)

Řešení. Protože O je střed BC , platí $|OM| = |ON|$. Proto v trojúhelníku MON splývá osa úhlu s osou strany, a proto je R vlastně průsečík vnitřní osy úhlu MAN a osy strany MN . To znamená, že R je Švrčkův bod tohoto trojúhelníku, takže $ANRM$ je tětivový čtyřúhelník. Nazvěme jako X druhý průsečík kružnic opsaných $\triangle BMR$ a $\triangle CNR$. Potom z doplňkových úhlů v tětivových čtyřúhelnících platí $\sphericalangle BXR = 180^\circ - \sphericalangle RMB = \sphericalangle AMR = 180^\circ - \sphericalangle RNA = \sphericalangle CNR = 180^\circ - \sphericalangle RXC$, z čehož ovšem plyne, že X leží na BC , což jsme chtěli dokázat.

¹⁴Mluvíme-li o *obrazu podle přímky*, myslíme tím samozřejmě obraz v osové souměrnosti. Podobně *obraz podle bodu* vždy znamená obraz v souměrnosti středové, pokud není přímo zmíněno, že se jedná o stejnolehlost s jiným koeficientem.



Cvičení 7. Nechť AL a BK jsou vnitřní osy úhlů v různostranném trojúhelníku ABC (kde L leží na straně BC a K na straně AC). Osa úsečky BK protíná přímku AL v M . Bod N je zvolen na přímce BK tak, že $LN \parallel MK$. Ukažte, že $|LN| = |NA|$. (Junior Balkan 2010)

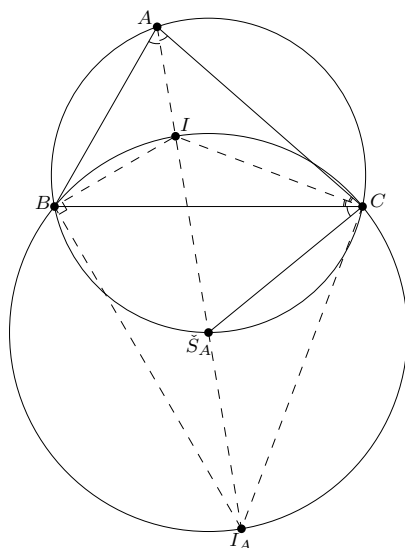
Návod. Uvědomte si, že M je Švrčkův bod v $\triangle ABK$. Pak úhlete.

Proč je Švrček nejlepší

Nyní si dokážeme dost možná nejdůležitější tvrzení o Švrčkově bodu. Připomeňme, že písmenem I označujeme vepsíště a symbolem I_A zase A -připsíště.

Tvrzení 8. V trojúhelníku ABC je $BICIA$ tětíkový čtyřúhelník a příslušná kružnice má střed v $\check{S}_A$.

Důkaz. Protože vnitřní a vnější osy úhlu jsou na sebe kolmé, platí $|\angle I_A B I| = 90^\circ = |\angle I C I_A|$, takže $B I C I_A$ je skutečně tetivový čtyřúhelník. Stačí tedy dokázat, že $\check{S}_A$ je jeho střed.



Platí $|\angle \check{S}_A CI| = |\angle \check{S}_A CB| + |\angle BCI| = |\angle \check{S}_A AB| + |\angle BCI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Vzpomeňme si ovšem na vztah $|\angle AIC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$, z něhož plyne $|\angle \check{S}_A IC| = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Z toho dostáváme, že $I\check{S}_A C$ je rovnoramenný trojúhelník, takže $|I\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$. Protože navíc $|B\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$, je $\check{S}_A$ opsištěm $\triangle BIC$, a tím jsme hotovi. $\square$

Důsledek. Protože kružnice opsaná $BICI_A$ je kružnicí nad průměrem I_AI , je $\check{S}_A$ střed úsečky II_A .

S touto jednoduchou znalostí najednou bez potíží vyřešíme pár dalších IMO problémů.

Příklad 9. Buď ABC trojúhelník s vepsíštěm I . Bod P uvnitř tohoto trojúhelníku splňuje vztah

$$|\angle PBA| + |\angle PCA| = |\angle PBC| + |\angle PCB|.$$

Ukažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $P = I$. (IMO 2006)

Řešení. Zaprvé si všimněme, že pro $P = I$ tvrzení zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $P \neq I$, a dokažme, že $|AP| > |AI|$. Zadruhé se zbavme oné zvláštní podmínky a uvědomme si, co vlastně říká. Protože platí

$$\begin{aligned} & (|\angle PBA| + |\angle PCA|) + (|\angle PBC| + |\angle PCB|) = \\ & = (|\angle PBA| + |\angle PBC|) + (|\angle PCA| + |\angle PCB|) = \\ & = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha, \end{aligned}$$

získáváme ze zadané podmínky, že $|\angle BPC| = 180^\circ - |\angle PBC| - |\angle PCB| = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = |\angle BIC|$. Z toho plyne, že P leží na kružnici opsané $\triangle BIC$, jejíž střed je $\check{S}_A$. Protože I leží na $A\check{S}_A$, platí z trojúhelníkové nerovnosti

$$|AP| + |P\check{S}_A| > |A\check{S}_A| = |AI| + |I\check{S}_A|.$$

Protože ovšem $|P\check{S}_A| = |I\check{S}_A|$, jsme hotovi.

Cvičení 10. Buď BC průměr kružnice ω se středem v O . Nechť A je bod na ω takový, že $|\angle AOB| < 120^\circ$. Buď D střed toho oblouku AB , který neobsahuje C . Dále přímka vedená skrze O rovnoběžná s DA protíná AC v I a osa úsečky OA protíná ω v bodech E a F . Dokažte, že I je vepsíště $\triangle CEF$. (IMO 2002)

Návod. Nejprv si uvědomte, že A je Švrčkův bod v $\triangle ECF$. Potom už stačí je ukázat, že $|AE| = |AI|$. Ukažte, že jsou obě tyto délky rovny poloměru ω .

Cvičení 11. (Japanese theorem) Buď $ABCD$ tětíkový čtyřúhelník. Ukažte, že vepsíště trojúhelníků ABC , BCD , CDA a DAB tvoří obdélník.

Návod. Interpretujte jednotlivá vepsíště jako průsečíky dvojic kružnic ze sousedních Švrčkových bodů. Potom douhlete.

Antišvrk

Podobně jako vepsíště a připsíště má i Švrčkův bod své „alter ego“, které vznikne tím, že místo vnitřní osy úhlu vezmeme tu vnější.

Tvrzení 12. V trojúhelníku ABC mají osa strany BC , vnější osa úhlu BAC a kružnice opsaná společný bod (který budeme značit jako $\check{N}_A$). Tento bod neoficiálně (ještě neoficiálněji než „Švrčkův bod“) nazýváme *antišvrk příslušející bodu A*.

Toto tvrzení nebudeme dokazovat a přenecháváme ho jako cvičení. Důkaz je analogický důkazu existence Švrčkova bodu.

Povšimněme si, že $\check{N}_A\check{S}_A$ je průměr kružnice opsané $\triangle ABC$. To plyne jednoduše z toho, že jejich spojnice je osa strany BC , která ovšem prochází opsištěm. Takovým bodům se v geometrii

říká „antipodální“ a odtud taktéž prochází název antišvrk. Poznamenejme také, že jak $\check{S}_A$, tak $\check{N}_A$ jsou středy jednoho z oblouků BC – Švrčkův bod je střed toho oblouku, který neobsahuje A , zatímco antišvrk toho, který A obsahuje.

Podobně jako u Švrčkova bodu platí pro antišvrk následující tvrzení, jehož důkaz opět přenecháváme jako cvičení.

Tvrzení 13. Pro zadaný trojúhelník ABC je $I_C B C I_B$ tětivový čtyřúhelník se středem v $\check{N}_A$.

Důsledek. Bod $\check{N}_A$ je středem úsečky $I_B I_C$.

Cvičení 14. (těžké) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že přípišť $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ a $\triangle DAB$ (všech 12 bodů) leží na obvodu jednoho obdélníka. (Rumunské TST 1996)

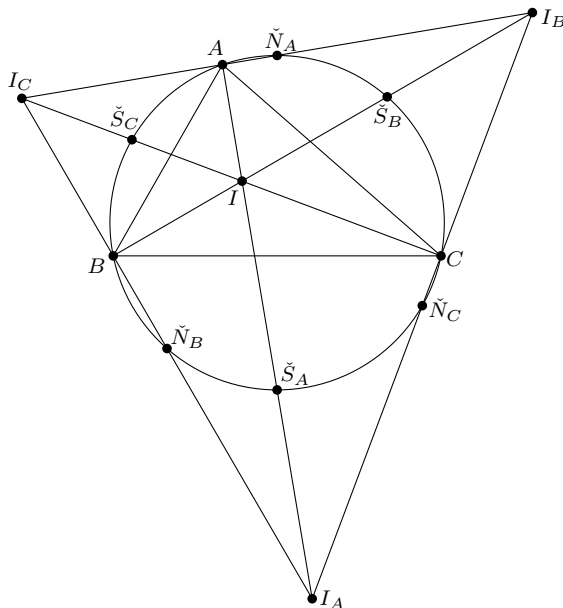
Návod. Interpretujte přípišť jako průsečíky správných kružnic. Vyúhlete, že čtveřice přípišť tvoří vrcholy obdélníka a správné čtveřice přípišť leží na přímce.

The Big Picture

Pomocí různých os rozličných úhlů jsme si v trojúhelníku nadeřinovali spoustu bodů. Zajímavé je, že konfiguraci, kterou tvoří, již známe.

Tvrzení 15. (The Big Picture) V trojúhelníku ABC s naším značením platí, že I je kolmiště trojúhelníku $I_A I_B I_C$ a kružnice opsaná ABC je Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $I_A I_B I_C$.

Důkaz. Protože vnitřní a vnější osy úhlů ve vrcholu jsou na sebe kolmé, jsou A , B a C paty kolmic v $I_A I_B I_C$. Z toho plyne, že kružnice opsaná $\triangle ABC$ je Feuerbachovou kružnicí $\triangle I_A I_B I_C$. Pokud si nyní ještě k tomu uvědomíme, že tyto kolmice z přípišť do vrcholů jsou vlastně osy úhlů, je zjevné, že I na nich na všech leží, takže se skutečně jedná o kolmiště $\triangle I_A I_B I_C$.

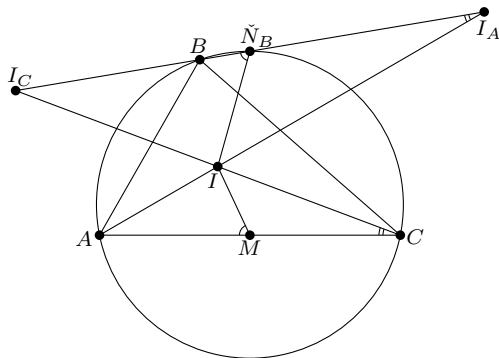


□

Povšimněme si, že skutečnost, že Švrčkovy body a antišvrky jsou středy příslušných úseček, je vlastně jen triviálním důsledkem tvrzení o kružnici devíti bodů.

Příklad 16. V trojúhelníku ABC platí $|AB| < |BC|$. Označme jako M střed AC . Dokažte, že $|\angle IMA| = |\angle I\tilde{N}_B B|$. (Rusko 2005)

Řešení. Dokresleme si I_A a I_C . Protože $I_C A C I_A$ je tětiový čtyřúhelník, platí $|\angle I_C I_A I| = |\angle ICB|$, takže trojúhelníky $I_C I I_A$ a $A I C$ jsou podobné. Protože $I\tilde{N}_B$ je těžnice v trojúhelníku $I_C I A$ a IM je těžnice v trojúhelníku $A I C$, jsou jim příslušné úhly se stranou shodné, takže $|\angle IMA| = |\angle I\tilde{N}_B B|$, což jsme chtěli.



Cvičení 17. (těžší) V trojúhelníku ABC s vepisťm I označme D , E po řadě průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A , B se stranami BC , AC . Dále označme P , Q body, ve kterých přímka DE protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC . Dokažte, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku PIQ je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . (MKS 30–8–3b)

Návod. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku PIQ je kružnice opsaná trojúhelníku $I_A I I_B$. Potom už tvrzení bude plynout přímo z toho, že díky Big Picture je kružnice opsaná $\triangle ABC$ Feuerbachovou kružnicí $\triangle I_A I_B I_C$ a kružnice opsaná $\triangle I_A I I_B$ je kružnicí opsanou $\triangle I_A I_B I_C$ překlopenou přes $I_A I_B$.

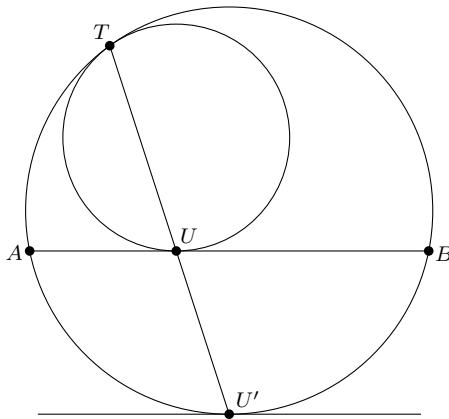
To, že kružnice opsaná $\triangle PIQ$ splývá s kružnicí opsanou $I_A I I_B$, dostaneme z toho, že vyjádříme mocnost D i E ke kružnicím opsaným $\triangle ABC$ a $\triangle I_A I I_B$ a zjistíme, že DE je jejich chordála.

Lemma o ose úhlu

Výhodný způsob, jak o Švrčkové bodě uvažovat, je „ten bod dole“. Pokud si totiž nakreslíme $\triangle ABC$ tak, aby přímka BC byla vodorovná, potom $\tilde{S}_A$ je nejnižší bod na kružnici opsané (ze symetrie). Tento náhled se nám bude hodit při důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 18. Mají-li kružnice k a ℓ mají vnitřní dotyk v bodě T a tětiva AB kružnice k se dotýká kružnice ℓ v bodě U , potom UT je osa úhlu ATB .

Řešení. Nakreslíme si obrázek tak, aby bod U byl na kružnici ℓ „dole“, tedy body A , B budou „na stejné úrovni“. Zobrazíme kružnici ℓ na kružnici k stejnolehlostí se středem v T . Tato stejnolehlost má kladný koeficient, a proto i bod U' (obraz bodu U) je na kružnici k „dole“, tedy trojúhelník ABU' je rovnoramenný. Potom je ale U' Švrčkův bod v trojúhelníku ATB , z čehož okamžitě plyne požadované tvrzení.



Toto také říká, že pokud se ω zevnitř dotýká kružnice opsané $\triangle ABC$ v B a navíc se dotýká AC v D , potom B , D a $\tilde{S}_B$ leží na přímce. (Rozmyslete si.)

Příklad 19. Dvě kružnice ω_1 a ω_2 se zvenku dotýkají v bodě T a obě se zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech R a S . Nechť Q je druhý průsečík RT s ω . Ukažte, že $|\angle QST| = 90^\circ$.

(KMS)

Řešení. Sestrojme společnou tečnu ω_1 a ω_2 v bodě T . Nechť tato tečna protíná ω v bodech X a Y . Potom dle předchozího tvrzení je Q Švrčkův bod trojúhelníku XRY . Pokud analogicky vytvoříme bod W jako průsečík ST s ω , pak W je Švrčkův bod v trojúhelníku $XS Y$. To znamená, že Q i W jsou středy oblouků XY (každý jiného), takže QW je průměr ω . Proto $|\angle QST| = |\angle QSW| = 90^\circ$, což jsme chtěli.

Shooting lemma

Poslední zajímavé tvrzení, které si o Švrčkově bodě ukážeme, je takzvané Shooting lemma.

Tvrzení 20. Buď M střed oblouku PQ na kružnici ω a necht' přímka p procházející M protíná přímku PQ v X a ω v Y . Potom platí

- (1) $|MX| \cdot |MY| = |MP|^2$,
- (2) pokud je I vepisště $\triangle PYQ$, potom $|MX| \cdot |MY| = |MI|^2$,
- (3) pokud další přímka p' procházející M protíná PQ v X' a ω v Y' , potom X , Y , X' a Y' leží na jedné kružnici.

Důkaz. Začneme s (1). Protože M je střed oblouku, je M Švrčkovým bodem trojúhelníku PYQ . Potom platí $|\angle PYM| = |\angle MYQ| = |\angle MPQ| = |\angle MPX|$, z čehož zjišťujeme, že trojúhelníky PYM a XPM jsou podobné. Proto $\frac{|MX|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|MY|}$, z čehož plyne požadované tvrzení.

Část (2) okamžitě vyplývá z toho, že $|MI| = |MP|$ (opět, protože M je Švrčkův bod $\triangle PYQ$).

Část (3) snadno odvodíme z (1) za využití mocnosti bodu ke kružnici.

□

Příklad 21. Kružnice ω_1 a ω_2 se obě zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech A a B . Společná tečna ω_1 a ω_2 se jich dotýká postupně v bodech C a D . Ukažte, že $ABDC$ je tětíkový čtyřúhelník.

Řešení. Přímka CD protíná ω v bodech X a Y . Nechť M je střed toho oblouku XY , který neobsahuje A a B . Potom AC i BD procházejí M . Ovšem potom máme hotovo z části (3) Shooting lemmatu.

Cvičení 22. Přímka ℓ protíná kružnici Γ v bodech A, B . Kružnice ω_1 a ω_2 jsou vepsané¹⁵ do stejné úseče určené přímkou ℓ a mají vnější dotyk. Dokažte, že jejich vnitřní společná tečna prochází pevným bodem, pohybují-li se ω_1, ω_2 ve vymezené úseči.

Návod. Tím bodem bude střed druhého oblouku. Použijte mocnost.

Cvičení 23. Nechť kružnice Ω a ω mají vnitřní dotyk v bodě P , přičemž ω leží uvnitř Ω . Buď AB tětiva Ω , která se dotýká ω v bodě C . Průsečík PC s Ω různý od P si označme jako Q . Nechť tečny z bodu Q ke kružnici ω protínají kružnici Ω v bodech R a S . Vepsíště trojúhelníků APB , ARB a ASB si postupně označíme jako I, X a Y . Ukažte, že $|\angle PXI| + |\angle PYI| = 90^\circ$.

(Rumunsko TST 2013)

Návod. Uvědomte si, že Q je Švrčkův bod a následně použijte Shooting lemma, abyste ukázali, že X a Y jsou dotyky QR a QS s ω . Zbytek doúhlete.

Cvičení 24. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Γ , vepsíštěm I a bodem D ležícím na straně BC . Buď ω kružnice dotýkající se úsečky AD v bodě F , strany BC bodě E a kružnice Γ v bodě K . Dokažte, že I leží na přímce EF . (MKS 29–8–4b)

Návod. Označme si I' průnik EF a $A\tilde{S}_A$. Díky Shooting lemmatu stačí dokázat, že $\tilde{S}_A I'$ je tečna ke kružnici opsané $E'I'K$. Využijeme-li úsekové úhly, stačí ukázat, že A, F, I' a K leží na jedné kružnici. To zjistíme jednoduchým porovnáním úhlů $I'FK$ a $I'AK$.

Cvičení 25. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Γ , vepsíštěm I a bodem D ležícím na straně BC . Nechť ω_1 a ω_2 jsou kružnice se středy O_1 a O_2 , které se obě dotýkají úsečky AD , přímky BC a kružnice Γ . Ukažte, že O_1, O_2 a I leží na jedné přímce.

(Sawayama–Thébault theorem)

Návod. Využijte předchozí cvičení pro „správnou“ definici bodu I . Najděte v obrázku hodně pravých úhlů a využijte podobnosti trojúhelníků.

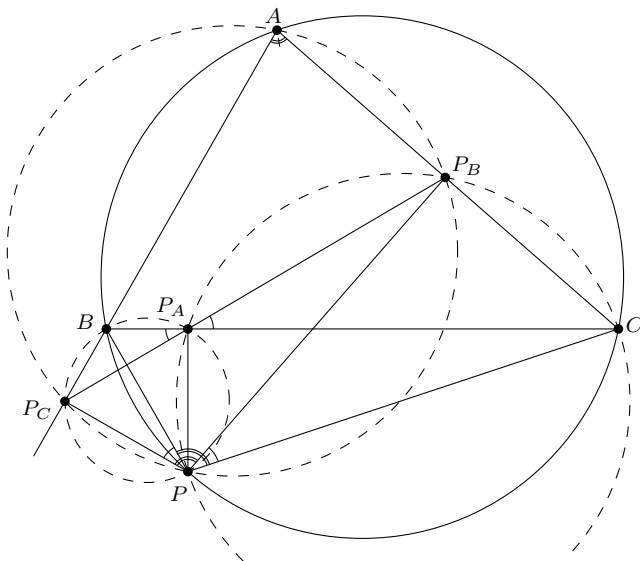
Simsonova přímka

Tvrzení 26. Označme P_A, P_B, P_C paty kolmic vedených z bodu P na příslušné strany trojúhelníka ABC . Pak body P_A, P_B, P_C leží v přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Této přímce se říká *Simsonova přímka* bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC .

Důkaz. Kdybychom chtěli být zcela exaktní, museli bychom buď rozebrat několik možností umístění bodu P vůči trojúhelníku ABC a také to, jak vypadá $\triangle ABC$, nebo použít orientované úhly. Budeme ale pro jednoduchost předpokládat, že situace vypadá tak, jako na obrázku. Ostatní situace se rozeberou podobně a zvědavý čtenář si je může vyzkoušet jako domácí cvičení.¹⁶

¹⁵To znamená, že mají vnitřní dotek s Γ a navíc ℓ je jejich tečna.

¹⁶Jen poznamenejme, že zatímco my jako pisatelé výukového textu máme právo přenechat nějaký kus práce čtenáři, řešitelům není povoleno v odevzdaných řešeních přenechat kus práce opravovateli.

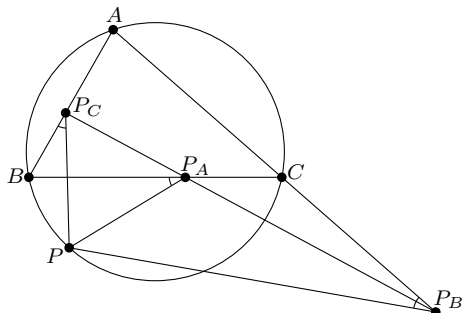


Díky pravým úhlům jsou PP_CBP_A , PP_AP_BC a PP_CAP_B tětiové. Potom platí

$$|\angle BP_AP_C| = |\angle BPP_C| = |\angle P_BP_C| - |\angle P_BP_B| = 180^\circ - |\angle BAC| - |\angle P_BP_B|.$$

Protože B , P_A a C leží na přímce, leží P_A , P_B , P_C na přímce právě tehdy, když $|\angle BP_AP_C| = |\angle CP_AP_B|$. Protože $|\angle CP_AP_B| = |\angle CPP_B| = |\angle CPB| - |\angle P_BP_B|$, je uvažovaná kolinearita¹⁷ ekvivalentní se vztahem $180^\circ - |\angle BAC| - |\angle P_BP_B| = |\angle CPB| - |\angle P_BP_B|$, což se dá přepsat jako $|\angle CPB| + |\angle BAC| = 180^\circ$. Takže shledáváme, že P_A , P_B a P_C leží na přímce právě tehdy, když $PBAC$ je tětiový čtyřúhelník, což je to, co jsme chtěli. $\square$

Poznámka. Povšimněme si, že fakt, že P_A , P_B a P_C jsou paty kolmic, jsme takřka nevyužili. Důležitá byla pouze tětiovost příslušných čtyřúhelníků. Proto existuje takzvaná „zobecněná Simsonova přímka“, pro její konstrukci je potřeba jen, aby přímky PP_A , PP_B a PP_C svíraly s příslušnými stranami stejné úhly. Je to ovšem trochu složitější tím, že se požaduje, aby tyto úhly byly stejně orientovány, tj. „šly všechny na stejnou stranu“. Toto tvrzení si můžete dokázat jako cvičení.



¹⁷Kolinearita je vlastnost „býti na jedné přímce“.

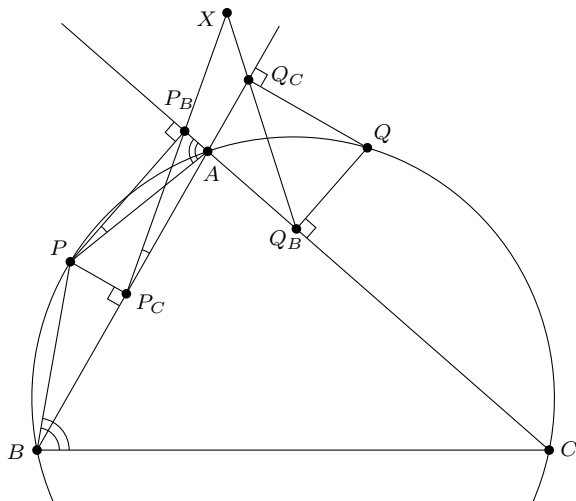
Cvičení 27. Buď ABC rovnostranný trojúhelník a P buď bod na jeho kružnici opsané různý od A , B a C . Přímky rovnoběžné s BC , CA , AB vedené skrz P protínají přímky CA , AB , BC postupně v bodech M , N a Q . Dokažte, že M , N a Q leží na jedné přímce.

Návod. Všechny přímky protínají strany pod úhlem 60° .

Tvrzení 28. Simsonova přímka bodu P půlí úsečku PH .

Důkaz. BÚNO nechť P leží na tom oblouku BC , který neobsahuje A . Označme obrazy P podle přímek AB a AC jako P'_C a P'_B . Zjevně stačí ukázat, že P'_C , H a P'_B leží na jedné přímce.

Označme obrazy H dle AC a AB jako H_B a H_C . Protože překlopení je shodné zobrazení, platí $|\angle AHP'_C| = |\angle AH_C P|$ a $|\angle AHP'_B| = |\angle AH_B P|$. Potom ovšem $|\angle AHP'_C| + |\angle AHP'_B| = |\angle AH_C P| + |\angle AH_B P| = 180^\circ$, kde poslední rovnost plyne z toho, že H_B , H_C i P leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Pak ale $|\angle AHP'_C| + |\angle AHP'_B| = 180^\circ$ přesně dává to, co jsme chtěli.



□

Tvrzení 29. Simsonovy přímky odpovídající bodům P , Q na kružnici opsané trojúhelníku ABC svírají úhel rovný polovině středového úhlu, který přísluší oblouku PQ .

Důkaz. Opět platí, že pro formálně správný důkaz bychom museli buď rozebrat velké množství možností, nebo použít orientované úhly. Místo toho radši budeme prostě předpokládat, že situace vypadá tak, jako na obrázku.

Nechť X je průsečík uvažovaných Simsonových přímek. Protože součet úhlů ve čtyřúhelníku XP_CAQ_B je 360° a α je úhel $360^\circ - \alpha$, platí $|\angle P_C X Q_B| = \alpha - |\angle P_B P_C A| - |\angle Q_C Q_B A|$. Z obvodových a doplňkových úhlů plyne

$$|\angle P_B P_C A| = |\angle P_B P A| = 90^\circ - |\angle P A P_B| = 90^\circ - |\angle P B C| = 90^\circ - \beta - |\angle P B A|.$$

Analogicky dostaneme i $|\angle Q_C Q_B A| = 90^\circ - \gamma - |\angle Q C A|$. Proto

$$\begin{aligned} |\angle P_C X Q_B| &= \alpha - |\angle P_B P_C A| - |\angle Q_C Q_B A| \\ &= \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ + |\angle P B A| + |\angle Q C A| \\ &= \frac{|\angle P O A|}{2} + \frac{|\angle A O Q|}{2} = \frac{|\angle P O Q|}{2}. \end{aligned}$$

Důsledek. Simsonovy přímky „protějších“ bodů P a Q jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici.

Důkaz. Kolmost je zjevná z předchozího tvrzení. Pro druhou část si označme jako P' a Q' středy úseček PH a QH a jako X uvažovaný průsečík přímk. Víme, že P' a Q' leží na příslušných Simsonových přímkách. Protože P a Q leží na kružnici opsané a P' a Q' jsou jen obrazy ve stejnoolehlosti s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem H , jsou P' a Q' protilehlé body na kružnici devíti bodů. Potom se ale jedná o kružnici nad průměrem $P'Q'$, takže z $|\angle P'XQ'| = 90^\circ$ dostáváme, že X na této kružnici vskutku leží. $\square$

Příklad 30. V trojúhelníku ABC označme A_1 patu výšky z vrcholu A . Ukažte, že paty kolmic vedených z A_1 na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

Řešení. Označme si paty výšek z B a C jako B_1 a C_1 . Paty kolmic z A_1 na BA , AC , BB_1 a CC_1 si nazvěme jako X , Y , P a Q .

Všimněme si, že C_1 a A_1 leží na kružnici nad průměrem AC . Pokud uděláme Simsonovu přímku vzhledem k $\triangle ACC_1$ a bodu A_1 , dostaneme proto, že X , Q a Y leží na jedné přímce. Analogicky zjistíme, že i X , P a Y leží na přímce, z čehož plyne požadované tvrzení.

Cvičení 31. Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P . Paty kolmic z bodu P na přímky AB , AC a BD označme postupně K , L a M . Ukažte, že úhel LKM má velikost 45° , právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58–III–2)

Návod. Dokreslete paty kolmic z P na AD a BC . Nalezněte Simsonovy přímky a uvědomte si díky nim, že $|\angle LKM| = |\angle APB|$.

Cvičení 32. Na přímce jsou dány body A , B , C a mimo ni bod P . Dokažte, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku tvořenému středy kružnic opsaných trojúhelníků ABP , BCP a ACP .

Návod. Díky stejnoolehlosti leží středy úseček PA , PB , PC v přímce. Interpretujte je jako paty vhodných kolmic. Pak si uvědomte, že Simsonovu přímku lze vytvořit *právě tehdy*, když uvažovaný bod leží na kružnici opsané.

Antirovnoběžky, izogonály a kamarádi

Where there is matter, there is geometry. – Johannes Kepler

Směřujeme k užitečnému konceptu párování bodů v rovině vzhledem k pevnému trojúhelníku. Jak to tak bývá, nejprve bude třeba zavést několik pojmů.

Mějme daný úhel XVY . Řekneme, že přímky p a q jsou vůči němu *antirovnoběžné*, pokud osový obraz přímky p podle osy úhlu XVY je rovnoběžný s přímkou q . Pokud navíc obě přímky procházejí bodem V , říkáme, že p a q jsou *izogonální* vzhledem k úhlu XVY . Pokud je z kontextu zřejmé, vzhledem ke kterému úhlu antirovnoběžnost nebo izogonality myslíme, vynecháváme tuto část názvu.

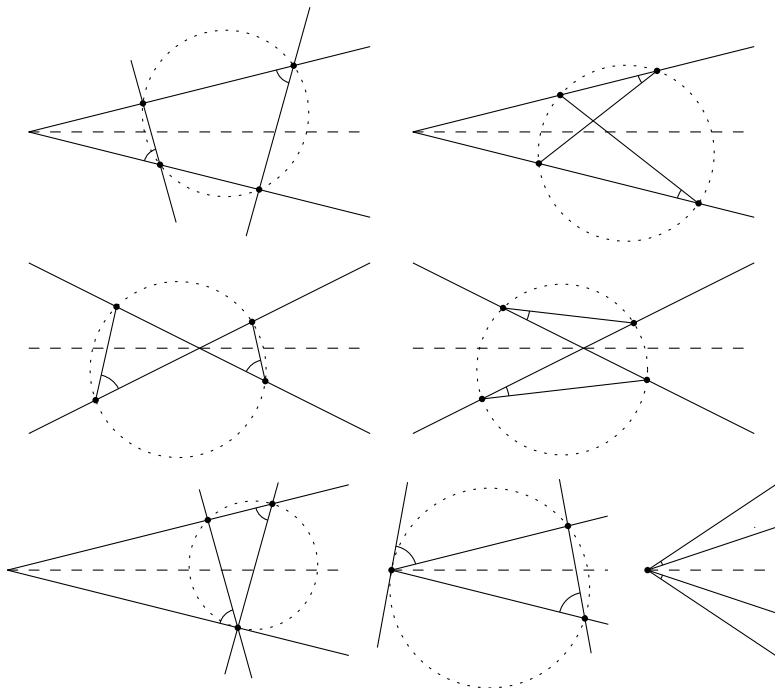
Věnujme nyní pár slov motivaci názvů těchto objektů.¹⁸ Přímka rovnoběžná s p svírá s ramenem příslušného úhlu stejný úhel jako p , zatímco obraz přímky p podle osy onoho úhlu (nebo s obrazem rovnoběžná přímka) svírá tento úhel s jeho druhým ramenem. Proto mluvíme o antirovnoběžkách. Neformálně řečeno, antirovnoběžka se má k jednomu rameni úhlu stejně jako původní přímka ke druhému. Předpona *iso-* pochází z řečtiny a znamená stejný a *gonia* znamená úhel. Těmito stejnými úhly jsou myšleny ty dva výše zmíněné, přičemž nyní mají navíc oba společný vrchol.

Antirovnoběžky poskytují nový pohled na tětíkové čtyřúhelníky.

¹⁸ Jejich význam by měl takřka triumfálně vyplynout ze zbytku této kapitoly.

Tvrzení 33. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, P je průsečík přímek AB a CD , Q je průsečík úhlopříček AC a BD a R je průsečík přímek AD a BC . Pak $ABCD$ je tětiový právě tehdy, když jsou nějaké dvě¹⁹ přímky obsahující protější strany nebo úhlopříčky v $ABCD$ antirovnoběžné v nějakém z úhlů APD , AQD nebo CRD .

Důkaz. V každé možné konfiguraci (viz obrázky níže) plyne tvrzení snadno z charakterizace tětiových čtyřúhelníků pomocí obvodových úhlů. Pověšimně si také degenerované případy, kde dva z průsečíků splynou a příslušné rameno se stane tečnou. Poslední obrázek ukazuje dvě izogonály.



□

Cvičení 34. Rozmyslete si, že (anti)rovnoběžnost má podobné vlastnosti jako parita – antirovnoběžka k rovnoběžce je antirovnoběžka a antirovnoběžka k antirovnoběžce je rovnoběžka.

Cvičení 35. Dokažte, že pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům současně, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.

Návod. Podmínka říká, že když postupně pustíme na p osovou souměrnost podle os obou úhlů, dostaneme rovnoběžnou přímku. Kdy se to může stát?

Cvičení 36. Ať $ABCD$ je tětiový. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů AQB a BPC jsou kolmé.

Návod. Použijte předchozí cvičení.

¹⁹Stačí tedy ověřit antirovnoběžnost jedné konkrétní dvojice přímek v jednom konkrétním úhlu, z ní už vyplyne tětiovost $ABCD$, a tím i antirovnoběžnost každé takové dvojice přímek v každém ze zmíněných úhlů.

Cvičení 37. Dokažte Shooting lemma pomocí antirovnoběžek.

Návod. Tečna vedená středem oblouku je antirovnoběžná s jednou tětivou a rovnoběžná s druhou.

Hlavní přínos antirovnoběžek nebo izogonál však leží někde jinde. Pro důkaz příslušného tvrzení budeme ale potřebovat známou větu, se kterou jsme zatím ještě nepracovali.

Tvrzení 38. (Cevova²⁰ věta) *Je dán trojúhelník ABC , bod D na straně BC , bod E na straně CA a bod F na straně AB . Přímký AD , BE a CF procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí*

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

Důkaz zde uvádět nebudeme.²¹

Cevova věta se hodí, pokud je třeba dát do souvislosti procházení přímkou jedním bodem a nějaké poměry délek. My si ji ještě upravíme, abychom místo s délkami mohli pracovat s úhly.

Tvrzení 39. (Goniometrický tvar Cevovy věty) *V situaci z Cevovy věty platí*

$$\frac{\sin(|\angle ACF|)}{\sin(|\angle BCF|)} \cdot \frac{\sin(|\angle BAD|)}{\sin(|\angle CAD|)} \cdot \frac{\sin(|\angle CBD|)}{\sin(|\angle ABD|)} = \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|},$$

takže přímký AD , BE a CF se protínají právě tehdy, když je levá strana výše uvedeného vztahu rovna jedné.

Důkaz. Ze sinové věty pro trojúhelníky ABD a ADC s využitím identity $|\angle ADB| + |\angle ADC| = 180^\circ$ dostáváme:

$$\frac{|BD|}{\sin(|\angle BAD|)} = \frac{|AB|}{\sin(|\angle ADB|)} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{\sin(|\angle ADC|)} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|CD|}{\sin(|\angle DAC|)}.$$

Tedy $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{\sin(|\angle BAD|)}{\sin(|\angle CAD|)}$. Pro poměry $\frac{|CE|}{|EA|}$ a $\frac{|AF|}{|FB|}$ platí analogické vztahy, jejichž vynásobením dostaneme dokazovanou identitu (poměry délek stran trojúhelníka se zkrátí). Zbytek plyne z původní Cevovy věty. $\square$

Dostáváme se ke klíčovému tvrzení.

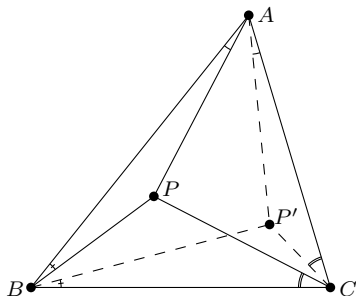
Tvrzení 40. (O existenci kamarádů) *Je dán trojúhelník ABC a bod P , který neleží na jeho kružnici opsané. Pak izogonály přímk AP , BP a CP procházejí jedním bodem P' , který nazýváme kamarádem²² bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC .*

Důkaz. (částečný) Předpokládejme, že P leží uvnitř trojúhelníku ABC . Jelikož se přímký AP , BP a CP protínají v jednom bodě, platí pro příslušné úhly identita z goniometrické Cevovy věty, tedy součin poměrů sinů je roven jedné. Izogonály ke zmíněným přímkám „dělí“ příslušné vnitřní úhly trojúhelníka ABC na stejné kusy jako původní přímký AP , BP a CP , ale v opačném pořadí. Zmíněný výraz tedy vyjde jako převrácené číslo než pro původní přímký. To je ale opět jedna, takže zpětným použitím goniometrické verze Cevovy věty dostáváme, že se izogonály také protínají v jednom bodě P' .

²⁰Giovanni Ceva ([čéva]; 1647–1734) byl italský geometr.

²¹Lze jej najít např. zde http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Ceva%27s_Theorem

²²V angličtině se používá termín *isogonal conjugate*.



□

Pro P mimo trojúhelník bychom postupovali podobně, ale potřebovali bychom Cevovu větu i v této situaci. Neobešli bychom se při tom bez orientovaných vzdáleností a úhlů a sinové věty pro orientované úhly, proto tuto část tvrzení ponecháme bez důkazu. Podíváme se ale, proč pro body na opsané kružnici kamarád neexistuje.

Tvrzení 41. *Pokud P leží na kružnici opsané a není jedním z vrcholů trojúhelníku, pak jsou izogonály v tvrzení o existenci kamarádů rovnoběžné.*²³

Důkaz. BÚNO nechť P leží uvnitř oblouku BC neobsahujícího bod A . Označme P_A , P_B a P_C obrazy bodu P podle os vnitřních úhlů s příslušnými vrcholy. Pak AP_A je izogonála k AP a svírá s přímkou BC úhel $|\angle ABC| + |\angle BAP_A| = |\angle ABC| + |\angle PAC|$. Podobně přímka CP_C svírá s přímkou BC úhel $|\angle PCA| + |\angle ACB| = |\angle PCB| + |\angle ACB|$. Jelikož P leží na opsané kružnici, platí $|\angle PCB| = |\angle PAB|$ a můžeme oba výše vyjádřené úhly sečíst:

$$|\angle ABC| + |\angle PAC| + |\angle PCB| + |\angle ACB| = 180^\circ,$$

protože $|\angle PCB| + |\angle PAC| = |\angle BAC|$. Z toho už vidíme, že $AP_A \parallel CP_C$. Analogicky bychom dokázali, že i třetí izogonála je s prvními dvěma rovnoběžná. □

Cvičení 42. Rozmyslete si, že kamarád kamaráda je opět původní bod.

Staří známi kamarádi

Tak fajn, že skoro každému bodu v rovině trojúhelníka umíme najít jeho kamaráda. A k čemu je to dobré? Nejsou třeba nějakí dva kamarádi mezi významnými body trojúhelníka, které už známe? Následující cvičení a tvrzení na tuto otázku částečně odpoví. Ve všech máme daný trojúhelník ABC a hovoříme-li o nějakých významných bodech, jsou to ty jeho.

Cvičení 43. Najděte všechny body, které jsou svými vlastními kamarády.

Návod. Jsou čtyři.

Tvrzení 44. *V daném trojúhelníku jsou body O a H kamarádi.*

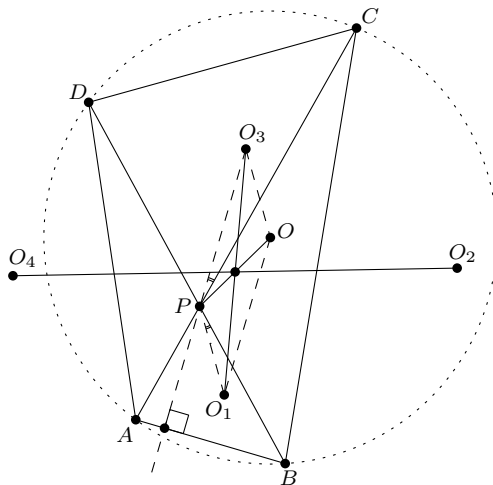
Důkaz. Platí $|\angle BAO| = 90^\circ - \gamma = |\angle HAC|$, takže AH je izogonála k AO . Analogicky odvodíme rovnosti i pro zbylé vrcholy. □

Toto tvrzení není samo o sobě moc objevné. Už jsme jej vlastně znali, ale pouze jako rovnost nějakých náhodných úhlů. Pamatovat si ho v naší nové formulaci je ale výrazně efektivnější.

²³A mohli bychom tedy jeho kamaráda definovat jako „bod v nekonečnu v příslušném směru“, provést to korektně by však dalo práci.

Příklad 45. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P . Dále nazvěme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsiště trojúhelníků APB , BPC , CPD a DPA jako O_1 , O_2 , O_3 a O_4 . Ukažte, že přímky PO , O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Řešení. Použijeme předchozí tvrzení na trojúhelníky ABP a CDP . Jelikož je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, jsou tyto trojúhelníky podobné a sdílejí osu úhlu u vrcholu P . Navíc platí, že když jeden z těchto trojúhelníků zobrazíme podle oné osy, bude obrazem druhého v nějaké stejnolehlosti se záporným koeficientem (odpovídá prostřednímu obrázku vlevo za tvrzením o antirovnoběžkách a tětivovosti). Obrazem PO_1 podle této osy je tedy jednak přímka PH_{ABP} a zároveň přímka PO_3 . Toto vyplývá z předchozího popisu toho, jak jsou příslušné trojúhelníky podobné, a toho, že zmíněná stejnolehlost zobrazuje přímky procházející jejím středem P samy na sebe. Z toho plyne, že PO_3 je kolmá na AB a analogicky PO_1 je kolmá na CD , tedy PO_1OO_3 je rovnoběžník (OO_1 je osa strany AB , tedy je na ni kolmá, podobně pro OO_3). Analogicky bychom dokázali, že PO_2OO_4 je rovnoběžník, a jelikož se úhlopříčky v rovnoběžníku půlí, prochází všechny tři přímky ze zadání středem úsečky PO .



Cvičení 46. (těžší) Ukažte, že rovnost $|IH| = |IO|$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven 60° .

Návod. Buď jsou trojúhelníky AIH a AIO podobné, nebo je $AOIH$ tětivový čtyřúhelník, to samé platí i pro vrcholy B a C . Druhá možnost nemůže nastat ve všech případech a z první plyne, že $AO\hat{S}_AC$ je kosoúhelník.

Cvičení 47. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Buďte D a E body na stranách AB a AC takové, že B, C, E a D leží na kružnici. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná D, E a A protne stranu BC ve dvou bodech X a Y . Ukažte, že střed XY je zároveň patou výšky z A na BC .

(Baltic Way 2010)

Návod. Stačí dokázat, že výška z A obsahuje opsiště trojúhelníku ADE . Díky antirovnoběžnosti je to totéž, jako že kolmice z A na DE prochází opsištěm trojúhelníku ABC .

Cvičení 48. (těžší) V trojúhelníku ABC osa úsečky AH protíná strany AB a AC po řadě v bodech D a E . Ukažte, že $|\angle AOD| = |\angle AOE|$.

Návod. Díky kamarádství O a H a tomu, že DE je osa AH , jsou rovnoramenné trojúhelníky ADH a AOC podobné. Z toho vyvodte, že $|\angle AOD| = |\angle ACH| = 90^\circ - \alpha$, a analogicky postupujte pro

bod E .

(Crux)

Cvičení 49. V rovině se kružnice k_1 a k_2 o středech po řadě I_1 a I_2 protínají v bodech A a B . Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D . Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD . Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3 , který obsahuje bod B . Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L . Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

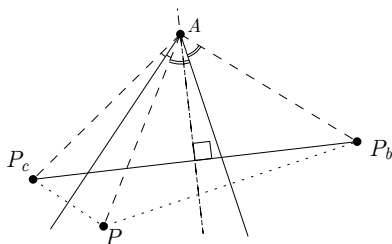
Návod. Vyúhlete, že E je opsiště trojúhelníku ACD .

Obecné vlastnosti kamarádů

Začneme alternativním způsobem konstrukce kamaráda.

Tvrzení 50. (Alternativní definice kamaráda) *Kamarád bodu P je opsiště trojúhelníku s vrcholy v osových obrazech P přes strany.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že P leží uvnitř trojúhelníka. Jinak je důkaz obdobný, pouze výpočty úhlů vypadají trochu jinak. Označme P' zmíněné opsiště a dále P_c a P_b osové obrazy bodu P po řadě přes strany AB a AC . Vrchol A zřejmě leží na ose úsečky P_cP_b , stejně jako bod P' . Díky definici bodů P_b a P_c pomocí osové souměrnosti platí $|\angle P_bAP_c| = 2\alpha$, a tedy $|\angle P'AP_b| = \alpha$. Nyní už snadno dopočítáme $|\angle P'AC| = |\angle P'AP_b| - |\angle CAP_b| = \alpha - |\angle CAP_b| = \alpha - (\alpha - |\angle PAB|) = |\angle PAB|$, takže AP je izogonální s AP' . Analogicky bychom dokázali i ostatní izogonality, a tedy P' je opravdu kamarád bodu P .



□

Poznámka 51. Naše nová definice kamaráda by měla selhávat na stejné množině bodů jako definice původní. Že tomu tak skutečně je, říká tvrzení o Simsonově přímce – trojice bodů na přímce nemá žádné opsiště.

Poznámka 52. V prvním vzorovém řešení druhé úlohy první seriálové série jsme dokazovali, že H je opsištěm v trojúhelníku $O_aO_bO_c$. Nyní už je nám to jasné z předchozího tvrzení a toho, že O a H jsou kamarádi.

Cvičení 53. Kružnice k vytne na každé straně trojúhelníka ABC úsečku. Ukažte, že potenční střed kružnic sestavených nad těmito úsečkami je kamarád středu kružnice k .

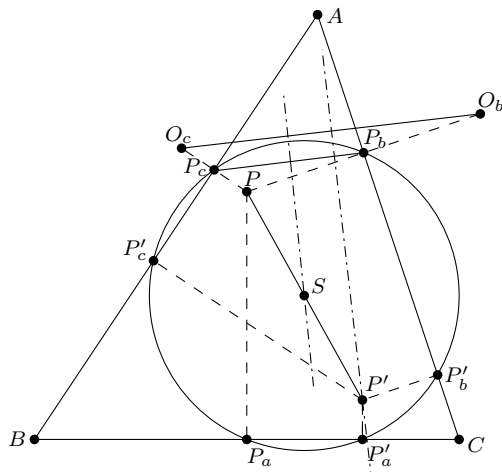
(zobecněné IMO 2008)

Návod. Díky předchozímu tvrzení stačí dokázat, že opsiště trojúhelníka s vrcholy v osových obrazech středu k přes strany má stejnou mocnost k libovolným dvěma z kružnic nad průměry. Napište mocnosti ve tvaru „vzdálenost od středu na druhou minus poloměr na druhou“.

Tvrzení 54. (Six feet theorem) *Paty kolmic bodu P a jeho kamaráda P' na strany trojúhelníka ABC leží na jedné kružnici.*

Důkaz. Označme paty kolmic ze zadání P_a, P_b, P_c a P'_a, P'_b, P'_c . Střed S úsečky PP' zřejmě leží na osách úseček $P_aP'_a, P_bP'_b, P_cP'_c$. Jinými slovy, S je stejně vzdálený vždy od dvou pat na jedné

straně. Stačí tedy dokázat, že leží také na ose úsečky P_bP_c (a pak analogicky na dalších osách). Nyní použijeme tvrzení o alternativní konstrukci kamaráda. Bod P' jakožto kamarád bodu P je opsiště osových obrazů P přes strany. Označme je O_a, O_b a O_c . Bod P' tedy speciálně leží na ose úsečky O_bO_c . Stejnolehlost se středem v P a koeficientem $\frac{1}{2}$ pak ukazuje, že S leží na ose P_bP_c , a jsme hotovi. $\square$



Cvičení 55. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P . Necht' A', B', C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A'' . Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $|\angle XAC| = |\angle PAB|$. Ukažte, že $|\angle AXB| = 90^\circ$.

Návod. Dokreslete kamaráda P a použijte předchozí tvrzení. Doúhlete.

Symediány

Jediným základním středem trojúhelníka, o jehož kamarádovi dosud nic nevíme, je těžiště. Faktem, který už tak zřejmý není, je, že tento bod ani jednodušeji než jako kamarád těžiště popsat nejde. Na druhou stranu má vlastnosti, díky nimž stojí za to se jím zabírat.

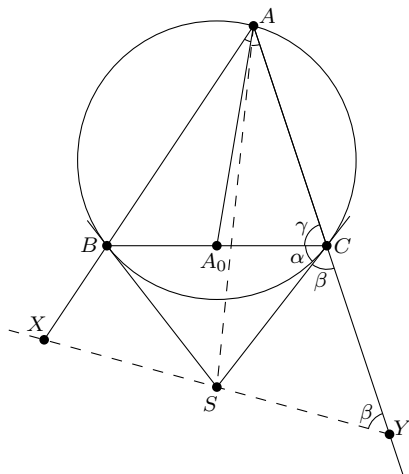
Izogonálu k a -těžnici (tedy přímce AA_0) budeme nazývat a -symediánou. Kamarád těžiště, který je zřejmě průsečíkem symedián, nazýváme *Lemoinuův bod*²⁴ a značíme jej K .

Nyní se podíváme na vlastnosti symedián, na Lemoinuův bod si posvětime příště.

Tvrzení 56. (O průsečíku tečen) Je dán trojúhelník ABC . Průsečík tečen ke kružnici jemu opsané vedených body B a C označme S . Pak AS je a -symediána.

Důkaz. Bodem S vedme antirovnoběžku k BC vzhledem k úhlu BAC a její průsečíky s přímkami AB a AC označme X a Y . Díky antirovnoběžnosti platí $|\angle XYA| = \beta$ a díky vlastnostem CS (úsekový úhel) platí $|\angle SCY| = \beta$. Trojúhelník CSY je tedy rovnoramenný se základnou CY . Analogicky je trojúhelník BXS rovnoramenný se základnou BX . Díky definici bodu S (stejně dlouhé dluhy tečen) je tedy S středem úsečky XY . Nyní už by nám mělo být jasné, že AS je a -symediána, protože je „těžnicí vůči antirovnoběžce“. Přesněji řečeno, osová souměrnost podle osy úhlu BAC zobrazí XY na rovnoběžku s BC a přímku AS na spojnicí bodu A a jejího středu, čili a -těžnici. Tedy AS je izogonála k a -těžnici, neboli a -symediána.

²⁴Émile Lemoine ([lemuán]; 1840–1912) byl francouzský inženýr a matematik.



□

Cvičení 57. Symmediána leží vždy mezi osou úhlu a výškou.

Návod. Použijte poslední tvrzení a dokreslete bod $\check{S}$.

Cvičení 58. Symmediána z vrcholu A je množina vnitřních bodů X úhlu BAC , jejichž poměr vzdáleností od strany b a c je roven b/c .

Návod. Pro každý bod těžnice je tento poměr přesně opačný.

Cvičení 59. Je dán trojúhelník ABC , v němž $|AC| = 2|AB|$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P . Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k . (Výběrko 2013)

Návod. Poznejte symmediánu, dokreslete příslušný střed strany a dokažte, že ona symmediána protíná k ve středu oblouku BC .

Cvičení 60. Symmediána je množina středů antirovnoběžek s protější stranou.

Návod. Je to jen „izogonální“ verze faktu, že těžnice je množina středů rovnoběžek s protější stranou a také důsledek posledního tvrzení.

Závěr

The only angle from which to approach a problem is the TRY-Angle. – neznámý autor

Gratulujeme všem, kteří dočetli seriál až sem. V příštím díle se můžete těšit na drsnější pokračování povídání o kamarádech, konkrétně půjde o vlastnosti Lemoinova bodu a o nějaké další dvojice kamarádů. Dále s námi pak, alespoň doufáme, stanete v úžasu nad Ponceletovým porismatem a větami od pánů jako Feuerbach nebo Fontené.

Přejeme dobré nápady při řešení úloh druhé seriálové série, jejíž úlohy jsou řazeny ne podle obtížnosti, ale podle témat v pořadí kopírujícím druhý díl seriálu.²⁵ S jakýmikoliv dotazy k zadáním úloh, ke cvičením (jsme si vědomi toho, že návody k nim jsou někdy hodně stručné) nebo k čemukoliv jinému se na nás neváhejte obrátit.

autoři

²⁵ Tentokrát to nejen nenápadně naznačíme.

Výsledky po 3. podzimní sérii

Detailní výsledky jednotlivých sérií nalezneš na našem webu: mks.mff.cuni.cz/vysledky

Jméno	Příjmení	r.	Škola	1p	2p	3p	1s	celkem	hist.
1. Danil	Koževnikov	3	GKepleraPH	25	25	25	15	90,00	564
2. Pavel	Turek	4	GTomkovaOL	22	24	25	15	86,55	951
3. Filip	Bialas	4	GOpatoVPH	25	25	21	15	85,72	755
4. Josef	Minařík	2	GJarošeBO	23	24	23	12	81,78	82
5. Pavel	Hudec	3	GJarkovPH	25	24	19	14	81,53	443
6. Michal	Krtouš	1	GÚstavníPH	23	23	21	13	80,80	81
7. Jakub	Janků	1	GMLerchaBO	22	22	23	13	80,46	80
8. Michal	Beránek	0	GVoděraPH	22	23	24	12	80,26	80
9. Martin	Raška	3	WichtG OS	21	22	21	15	78,43	78
10. Alexandr	Jankov	3	MatičníGOS	16	24	21	15	75,55	238
11. Lenka	Kopfová	2	MendelG OP	20	20	19	15	73,64	425
12. Lucie	Kundratová	2	G TGM Zlín	23	20	19	11	73,22	252
13. Martin	Zímen	2	GJMasar JI	17	21	20	15	73,03	222
14. Martin	Melicher	2	GPošKošice	25	24	23	–	71,74	72
15. Veronika	Hladíková	4	GMikul23PL	16	22	19	15	71,50	404
16. Radek	Olšák	2	GMensaPH	23	19	22	6	69,67	387
17. Zuzana	Urbanová	3	GFXSaldyLI	17	22	15	15	68,64	134
18. Hedvika	Ranošová	3	GBudějovPH	19	13	20	15	66,38	445
19. Jakub	Parada	1	G Gröss BA	22	22	22	–	66,19	66
20. Filip	Čermák	3	MendelG OP	17	21	18	9	65,66	252
21. Matěj	Konvalinka	3	GOA Sedlča	22	17	17	10	65,53	133
22. Lucia	Krajčoviechová	1	GJHroncaBA	23	18	17	7	65,37	270
23. Matěj	Doležálek	2	G Humpolec	17	21	21	7	65,07	238
24. Petr	Gebauer	3	G Mělník	25	15	15	9	63,96	455
25. Jáchym	Solecký	4	PORG PH	17	12	20	15	63,49	264
26. Anna	Mlezivová	3	GCoubTábor	21	16	19	6	62,15	62
27. Jan	Vavřín	0	PORG PH	17	21	13	9	60,91	61
28. Ákos	Záhorský	3	G VJM Šahy	22	21	16	–	59,36	59
29. Petr	Zahradník	2	GŠmejkalÚL	15	19	17	7	58,68	59
30. Tomáš	Domes	4	MendelG OP	16	19	15	8	58,43	388
31. Oldřich	Jandl	2	NPorg	18	16	17	7	58,03	58
32. Miroslav	Macko	1	ŠpMNDaG BA	22	20	15	–	57,32	57
33. Vít	Gaďurek	2	PORG PH	18	17	21	2	57,22	100
34. Ondřej	Motlíček	4	G Šumperk	19	18	12	9	57,20	214
35. Vojtěch	Lanz	3	GZborovPH	17	17	18	4	56,74	489
36. Radka	Křížová	1	GHeyrovPH	21	20	14	–	55,11	55
37. Martin	Hubata	1	GMikul23PL	19	17	19	–	54,63	55
38. Ester	Friedlaenderová	4	GKepleraPH	15	21	13	5	54,00	54
39. Pavel	Havlín	2	NPorg	19	13	14	7	52,80	185
40. Adam	Mendl	0	GCoubTábor	16	18	18	–	52,23	304
41. Jana	Pallová	2	GJŠkodyPŘ	14	17	11	11	51,95	210
42. Jaroslav	Paidar	3	SPŠMasarLI	13	13	15	9	51,73	245

43.	Cyril	Škorvaga	4	GKepleraPH	14 19 13 5	51,00	51
44.	Michal	Jelínek	2	GOhradníPH	11 17 16 7	50,98	51
45.	Martin	Bakoš	3	GPBystrica	17 11 18 6	50,72	139
46.	Ludmila	Bujnovská	3	MendelG OP	20 13 17 -	50,57	51
47.	Richard	Hladík	4	GaOA MarLáz	19 18 12 -	48,93	302
48.	Veronika	Šritterová	1	PORG PH	19 17 13 -	47,99	48
49.	Václav	Steinhauser	3	G Dačice	12 16 11 8	47,23	592
50.	Daniel	Bárta	2	GChodoviPH	17 13 17 -	46,80	47
51.	Veronika	Roubínová	3	G Kadaň	17 15 14 -	46,64	178
52.	Ondřej	Svoboda	4	GJarošeBO	20 17 5 4	46,28	210
53.-54.	Kateřina	Charvátová	2	GBNěmcovHK	11 16 12 7	46,04	174
53.-54.	Michal	Chudoba	2	GLitoměřPH	14 18 13 -	46,04	132
55.	Petr	Jakubčík	3	PORG PH	9 17 14 5	45,91	254
56.	Julie	Rubášová	0	BiskG Brno	17 15 13 -	45,78	46
57.	David	Klement	1	GNadAlejPH	14 15 17 -	45,53	46
58.	Štěpán	Řehák	4	SGFryčovPH	19 17 8 1	45,00	45
59.	Victoria Mariá	Nájares Romero	3	GZborovPH	15 11 14 4	43,90	458
60.	Jaromír	Sladkovský	2	PORG PH	16 16 12 -	43,89	44
61.	Jan	Kaifer	1	GKepleraPH	22 21 - -	43,73	44
62.	Matěj	Krátký	1	PORG PH	13 17 14 -	43,28	43
63.	Rafael	Tradosjan	4	GKepleraPH	16 11 11 5	43,00	43
64.	Tomáš	Drobil	2	G Dačice	14 9 10 10	42,74	162
65.	Matěj	Kraft	2	GMikul23PL	12 12 11 7	42,02	171
66.	Martin	Pašen	4	GRaymanaPV	15 14 14 -	41,93	148
67.	Jirí	Jechumtál	4	GVoděraPH	15 12 14 -	40,73	41
68.	kristian	Rigas	2	GJHroncaBA	16 14 11 -	40,49	40
69.	Petr	Khartschaev	0	PORG PH	13 14 13 -	40,33	40
70.	Kamila	Kyzlíková	3	GZborovPH	13 16 12 -	40,12	284
71.	Václav	Volhejn	4	GKepleraPH	23 16 - -	39,53	187
72.	Martina	Kalašová	2	GJHroncaBA	13 9 10 7	39,19	95
73.	Tomáš	Čelko	3	GPBystrica	12 9 13 5	39,13	175
74.	Victória	Žužičová	2	GBilikovBA	20 9 9 -	39,08	39
75.	Evžen	Wybitul	3		12 15 11 -	39,07	160
76.	Timur	Sibgatullin	2	PČGKarVary	21 5 12 -	38,26	137
77.-78.	Klára	Hloušková	1	G Kolín	14 13 11 -	37,83	38
77.-78.	Kristína	Szabová	3	GVaržilina	15 8 8 6	37,83	38
79.	Eliška	Polachová	2	GNový Jičín	16 9 9 2	36,81	37
80.-81.	Nikol	Krejčí	1	PORG PH	13 11 13 -	36,66	37
80.-81.	Tatiana	Ondřejková	1	GNovéZámky	13 11 13 -	36,66	37
82.	Matej	Moško	2	G Gröss BA	22 15 - -	36,57	37
83.	Filip	Chudoba	3	PORG PH	10 15 12 -	36,50	203
84.	Petr	Ježek	3	GBNěmcovHK	13 16 7 -	35,95	183
85.	Jan	Hrůza	4	G Kadaň	11 13 12 -	34,84	140
86.	Pavel	Čácha	2	GMikul23PL	9 9 10 7	34,83	127
87.	Julie	Přerovská	1	GNVPlániPH	11 15 8 -	34,75	35
88.	Daniel	Herman	4	GŠroKošice	7 19 8 -	34,74	100
89.	Martin	Spišák	3	GAlejKošic	14 10 9 -	33,84	158
90.	Jan	Nekarda	1	GUHradiště	18 16 - -	33,59	34
91.	Jonáš	Stoilov	1	PORG PH	16 17 - -	32,72	33
92.	David	Šnajdr	2	GMikul23PL	9 18 5 -	32,52	33
93.	Denisa	Chytilová	3	GJŠkodyPŘ	18 15 - -	32,49	275
94.	David	Dvořák	3	G Konice	13 13 6 -	32,47	32
95.	František	Záhorec	1	G Roudnice	17 15 - -	31,72	32
96.	Anna	Kovárnová	2	G Jírov ČB	19 13 - -	31,59	32
97.	Ondřej	Dušek	3	PORG PH	7 9 14 -	31,00	141
98.	Kateřina	Nová	4	G Vimperk	13 10 5 3	30,23	383
99.	Thao	Tranova	1	GDomazlice	11 7 11 -	29,55	30

100.	Zuzana	Trégllová	4	G Žatec	13 11 6 –	29,19	249
101.	Viktor	Procházka	3	G LPika PL	14 9 6 –	29,17	29
102.	Ondřej	Krabec	2	G KomHaviř	12 17 –	28,99	166
103.	Anna	Musilová	1	PORG PH	6 11 12 –	28,83	98
104.	Marek	Malý	4	G Neratov	10 5 10 4	28,58	201
105.	Barbora	Dohnalová	0	GBalbinaHK	14 13 – –	27,30	27
106.	Josef	Král	2	MendelG OP	– 14 13 –	27,05	27
107.	Bára	Tížková	3	G Bílovec	19 8 – –	26,72	48
108.	Anna	Mírková	2	G LPika PL	17 9 – –	26,38	26
109.	Jan	Bohadlo	3	G Náchod	8 9 9 0	26,34	26
110.–113.	David	Horský	1	GHeyrovPH	15 11 – –	26,27	26
110.–113.	Adéla	Krylová	1	SGChomutov	11 10 5 –	26,27	26
110.–113.	Lucie	Kunčarová	1	GVolgogrOS	15 11 – –	26,27	26
110.–113.	Michal	Stratený	1	GŠkolDubni	5 11 10 –	26,27	26
114.	Anna	Šírová	3	GJilemnice	10 7 9 –	25,84	96
115.	Jan	Vondra	1	G TýnNVlt	– 8 8 9	25,47	25
116.	Alžběta	Neubauerová	3	GNadKavaPH	13 5 7 –	24,99	156
117.	Jonáš	Suvák	2	G RaymanaPV	15 9 – –	24,53	25
118.	Dominika	Mokroszová	2	G FrýdČTěš	10 14 – –	24,31	132
119.	Adam	Doubrava	1	GMasarykKM	14 10 – –	24,11	139
120.	Michal	Töpfer	4	GJPekařMB	4 9 7 4	23,44	301
121.	Tomáš	Jirsa	3	GNPražačPH	15 8 – –	23,43	23
122.	Peter	Debnár	1	Spojenáš	8 15 – –	23,37	23
123.	Tomáš	Dolák	4	GNovéStraš	11 6 6 –	22,56	34
124.	Petra	Melicharová	2	G Domažlice	13 9 – –	22,48	22
125.	Přemysl	Kaucký	3	MasG Plzeň	9 7 4 1	21,64	22
126.	Filip	Brunclík	3	GNPražačPH	13 8 – –	21,47	21
127.	Vojtěch	Šára	2	PORG PH	– 11 11 –	21,44	21
128.	Marek	Heide	1	GJatečníÚL	11 10 – –	21,38	21
129.	Tomáš	Ježo	2	GJHroncaBA	– 14 7 –	20,81	21
130.	Marek	Černoch	1	G ValMez	21 – – –	20,67	21
131.	Tereza	Žmolová	1	GHeyrovPH	14 7 – –	20,60	21
132.–133.	Adam	Jecmínek	0	G Česká ČB	0 10 10 –	20,22	20
132.–133.	Karolína	Seďová	0	ZSDolBoj	– 10 10 –	20,22	20
134.	Magdaléna	Bártová	2	G DašickáPA	5 9 5 –	20,02	20
135.	Jan	Šrejbr	1	GJungmanLT	15 5 – –	19,78	20
136.	Matej	Kvorka	3	GŠkolDubni	– 10 10 –	19,68	77
137.	Martina	Hofmanová	2	G Mělník	9 9 – –	18,96	19
138.	David	Ha	2	MasG Plzeň	12 7 – –	18,65	19
139.–140.	Karel	Balej	2	G Rokycany	19 – – –	18,59	19
139.–140.	Veronika	Zámečníková	2	GBalbinaHK	19 – – –	18,59	19
141.	Jakub	Čurda	2	PORG PH	– 9 9 –	18,58	47
142.–143.	Dita	Chabičovská	1	GNadKavaPH	19 – – –	18,52	19
142.–143.	Lenka	Tomanová	1	G VelMeziř	19 – – –	18,52	19
144.	Hana	Jirovská	3	NPorg	4 8 6 –	18,04	71
145.–146.	Michal	Jireš	2	GRychnovKn	– 18 – –	17,77	18
145.–146.	Filip	Vosáhlo	2	WaldPHa	18 – – –	17,77	18
147.	Erik	Kočandrle	2	GMikul23PL	– 11 6 –	17,73	92
148.	Daniela	Holubová	1	GMikul23PL	18 – – –	17,70	18
149.	Václav	Kubiček	3	AGKroměříž	17 – – –	17,27	17
150.	Jakub	Hemala	2	G Zastávka	17 – – –	16,90	17
151.	Markéta	Petrtylová	1	GSRandyJN	7 10 – –	16,79	17
152.	František	Szczepanik	1	BiskG Brno	17 – – –	16,59	17
153.	Štěfan	Hollán	3	G Bytča	16 – – –	16,36	16
154.–155.	Matúš	Galba	4	GHodžuLM	16 – – –	16,00	16
154.–155.	Matěj	Žáček	4	GJarošeBO	16 – – –	16,00	16
156.	Antonín	Štrpka	2	G Šumperk	16 – – –	15,83	42

157.	Vladimír	Lukačko	3	GVarŽilina	7 8 - -	15,76	107
158.–159.	Alexandra	Géciová	1	GJHroncaBA	7 8 0 -	15,27	15
158.–159.	Anežka	Novotná	1	GJeronýmLI	7 8 - -	15,27	15
160.	Karel	Müller	2	GMikul23PL	- 15 - -	15,05	15
161.	František	Couf	4	EKO GPraha	- - - 15	15,00	716
162.–164.	Alina	Mojšová	1	GNVPlániPH	15 - - -	14,89	15
162.–164.	Eliška	Schütová	1	GNZatlanPH	- 15 - -	14,89	15
162.–164.	Samuel	Soukup	1	ArcibisGPH	15 - - -	14,89	15
165.	Kateřina	Mannlová	3	VOŠp SPgŠ	7 8 0 -	14,79	15
166.	Michaela	Bobeničová	2	GPOšKošice	5 9 - -	14,75	15
167.	Alžběta	Manová	2	G UherBrod	15 - - -	14,65	75
168.	Johana	Dvořáková	2	G Trutnov	8 7 - -	14,64	39
169.	Jaromír	Mielec	4	GVolgogrOS	8 7 - -	14,44	535
170.	Martin	Števko	2	GAlejKošic	14 - - -	14,14	149
171.	Barbora	Lišková	4	GJPekařeMB	3 7 4 -	13,96	93
172.	Šárka	Michalová	2	G Kralupy	7 7 - -	13,52	14
173.	Michal	Kasarda	3	G Stropkov	13 - - -	13,47	13
174.	Jan Antonín	Musil	0	PORG PH	8 6 - -	13,14	59
175.–177.	Ondřej	Gonzor	0	G Brandýs	13 - - -	13,03	13
175.–177.	Kateřina	Ševčíková	0	ZSSLOUP	13 - - -	13,03	13
175.–177.	Matěj	Široký	0	ZšSmrž	13 - - -	13,03	13
178.–179.	Tomáš	Bajer	1	SPŠstJG	13 - - -	12,64	13
178.–179.	Jakub	Ucháč	1	ZŠVranéNVl	- 13 - -	12,64	13
180.	Jana Viktória	Kováčiková	3	GŠkolDubni	4 8 - -	12,23	12
181.	Vojtěch	Jílek	4	VOŠKutHra	8 4 - -	11,95	62
182.	Anna	Švarcová	1	G Prachati	5 - 7 -	11,68	12
183.	Vojtěch	Gaďurek	0	PORG PH	12 - - -	11,66	12
184.	Martin	Simet	2	GMikul23PL	- 12 - -	11,63	50
185.	Filip	Geib	3	GHodžLM	11 - - -	11,39	11
186.–188.	Barbora	Česalová	1	GJarošeBO	11 - - -	11,38	11
186.–188.	Marie	Kalousková	1	GNadAlejPH	11 - - -	11,38	11
186.–188.	Marek	Otruba	1	GZborovPH	11 - - -	11,38	11
189.–190.	Tereza	Pavlišová	2	GTomkovaOL	11 - - -	10,72	11
189.–190.	Martin	Putzer	2	G Jírov ČB	11 - - -	10,72	11
191.–192.	Viktor	Materna	1	GJarošeBO	10 - - -	10,00	10
191.–192.	Michal	Pisca	4	DievčenoŠ	10 - - -	10,00	10
193.	Tomáš	Pishovaký	2	RGZS Prost	9 - - -	9,36	27
194.	Matthew	Dupraz	2	NPorg	- 9 - -	9,33	31
195.	Duc Long	Hoang	2	GMikul23PL	- 9 - -	9,27	40
196.	Michaela	Šedová	3	GŽidlochov	9 - - -	9,17	9
197.–199.	Nikita Edward	Carulkov	4	GMHS	9 - - -	9,00	9
197.–199.	Kateřina	Fuková	4	GOhradníPH	6 3 - -	9,00	9
197.–199.	Barbora	Schererová	4	GB Sučany	9 - - -	9,00	9
200.–202.	Ján	Kršiak	1	GTim Lučen	8 - - -	8,48	8
200.–202.	Stanislav	Kvirenc	1	G Dobruška	8 - - -	8,48	8
200.–202.	Bronislav	Theuer	1	G Žatec	8 - - -	8,48	8
203.	Tomáš	Svoboda	3	G Třinec	4 4 - -	8,46	8
204.	Zuzana	Doležalová	0	ZŠ Slov	- 8 - -	8,34	8
205.	Aneta	Haderová	3	VOŠp SPgŠ	7 1 0 -	8,26	8
206.–208.	Peter	Brezina	2	SPŠNitra	8 - - -	8,17	8
206.–208.	Tereza	Kinská	2	GBNěmcovHK	8 - - -	8,17	8
206.–208.	Hana	Tomanová	2	GHeyrovPH	8 - - -	8,17	8
209.–213.	Lukáš	Račko	3	GLettMart	8 - - -	8,00	8
209.–213.	David	Ryzák	3	G Trutnov	- 8 - -	8,00	8
209.–213.	Vojta	Staněk	3	PORG PH	- 8 - -	8,00	8
209.–213.	Jana	Staňová	3	GŠkolDubni	8 - - -	8,00	8
209.–213.	Matuš	Varhaník	3	G Bytča	8 - - -	8,00	8

214.	Alexander	Csizmár	2	GMikul23PL	–	–	8	–	7,96	41
215.	Laura	Špaková	2	G Kežmarok	2	5	–	–	7,18	7
216.–219.	Alice	Janáčková	1	G Chotěboř	7	–	–	–	6,79	7
216.–219.	Matouš	Moravec	1	PORG PH	–	–	7	–	6,79	7
216.–219.	Adam	Vavrečka	1	GBezručFM	7	–	–	–	6,79	7
216.–219.	Václav	Zvoníček	1	GJarošeBO	7	–	–	–	6,79	7
220.–222.	Denisa	Jandová	2	GMikul23PL	–	–	7	–	6,76	7
220.–222.	Tomáš	Šládek	2	SŠNvh	–	7	–	–	6,76	7
220.–222.	Linh Giang	Tran	2	GMikul23PL	–	–	7	–	6,76	7
223.	Karolína	Tulingerová	2	AkademG PH	7	–	–	–	6,72	15
224.	Václav	Prosser	4	GMikul23PL	–	6	–	–	6,00	6
225.	Jiří	Vala	3	GJarošeBO	–	6	–	–	5,88	241
226.	Vojtěch	Lengál	3	GZborovPH	–	–	–	6	5,62	150
227.	Dominik	Bartošek	3	SŠŽivSokol	6	–	–	–	5,53	6
228.–229.	Jan	Česnek	2	GJarošeBO	5	–	–	–	5,27	5
228.–229.	Aneta	Titková	2	GJarošeBO	5	0	–	–	5,27	5
230.	Ha Mi	Dao	2	GŠmejkalÚL	5	–	–	–	5,13	32
231.	Vladimír	Kelbl	4	GJarošeBO	5	–	–	–	5,00	5
232.–233.	Jiří	Janoušek	1	GBudějovPH	5	–	–	–	4,89	5
232.–233.	Petra	Šimonovská	1	OA Dušní	–	5	–	–	4,89	5
234.	Jakub	Horyna	4	GNVPlániPH	5	–	–	–	4,83	22
235.	Patrik	Beliansky	3	SŠNvh	4	–	–	–	4,23	4
236.	Michal	Rickwood	3	G ČTřebová	4	–	–	–	4,21	9
237.–238.	Markéta	Machalová	4	WichtG OS	3	–	1	–	4,00	4
237.–238.	Monika	Matoušková	4	G MasNámTR	–	4	–	–	4,00	4
239.	Anna	Tritschlerová	0	GCON ČesBud	0	4	–	–	3,66	4
240.	Marika	Šejblová	3	VOŠp SPgŠ	3	–	–	–	2,88	3
241.–243.	Lukáš	Antoš	2	G Turnov	–	–	2	–	1,91	2
241.–243.	Kateřina	Malcánková	2	GJarošeBO	–	2	–	–	1,91	2
241.–243.	Monika	Suchá	2	GMikul23PL	–	2	–	–	1,91	2
244.	Miroslav	Beláčík	3	SpojenáŠ	–	–	1	–	1,47	1
245.–250.	Iveta	Drašarová	3	VOŠp SPgŠ	–	–	0	0	0,00	0
245.–250.	Michaela	Holcová	3	VOŠp SPgŠ	–	–	0	0	0,00	0
245.–250.	Anna	Jandová	2	G Leg PB	0	–	–	–	0,00	40
245.–250.	Filip	Kubálek	1	GNeumannŽR	0	–	–	–	0,00	0
245.–250.	Milan	Šaržík	3	G Púchov	0	–	–	–	0,00	0
245.–250.	Petra	Vávrová	3	VOŠp SPgŠ	0	–	–	–	0,00	0

adresa: Korespondenční seminář

KAM MFF UK

Malostranské náměstí 25

118 00 Praha 1

web: <http://mks.mff.cuni.cz/>

e-mail: mks@mff.cuni.cz