Finální myš-maš

4. jarní série   Termín odeslání: 9. května 2016

V této sérii je možné za každou úlohu získat až 5 bodů a na rozdíl od běžné série se tentokrát započítávají všechny úlohy.

Úloha 1.

Byla nebyla jedna krychle beze zbytku pokryta n trojúhelníkovými tapetami. Tapety se smí ohýbat přes hrany krychle,[1] ale nesmí se trhat ani překrývat samy se sebou ani s ostatními tapetami. Rozhodněte a dokažte, zda opravdu byla, či nebyla, pro

(a) $n = 4$, (2 body)

(b) $n = 3$. (3 body)

Úloha 2.

(a) Ukažte, že pokud je pro m a n přirozená poměr $\dfrac{5n+m}{5m+n}$ celočíselný, pak i poměr $\dfrac{n}{m}$ je celočíselný. (2 body)

(b) Je dán trojúhelník a bod uvnitř něj. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s každou stranou. Tyto rovnoběžky dělí trojúhelník na tři rovnoběžníky a tři trojúhelníky. Součet obsahů těchto trojúhelníků označme s, obsah celého trojúhelníka označme S. Určete nejmenší možnou hodnotu poměru $\frac{s}{S}$. (3 body)

Úloha 3.

Rozhodněte, zda lze na šachovnici 8×8 umístit dva

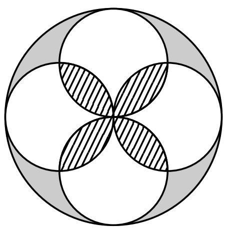
(a) krále (2 body)

(b) prince (krále bez možnosti diagonálních tahů) (3 body)

a následně s nimi provést posloupnost tahů tak, aby se v každé možné pozici ocitli právě jednou. Táhne vždy libovolná z figur způsobem povoleným pro krále resp. prince. Šachové ohrožování ani vyhazování se nebere v úvahu a figury nesmí stát na stejném políčku. Pozicí rozumíme uspořádanou dvojici políček, na kterých králové nebo princové právě stojí. (Tedy například jejich prohozením vznikne jiná pozice.)

Úloha 4.

(a) Rozhodněte, zda ze zvýrazněných oblastí na obrázku má větší obsah šedá, nebo šrafovaná. (2 body)



[1] Všimněte si, že není možné tapetu nalepit přes vrchol krychle, aniž bychom ji pomuchlali.

(b) Rado má pizzu ve tvaru čtverce 30×30. *Patvarem* nazvěme mnohoúhelník (ne nutně konvexní) se stranami rovnoběžnými se stranami pizzy. Rado rozřezal pizzu na několik patvarů se součtem obvodů 600. Ukažte, že nějaký kousek pizzy má obsah alespoň 36. (3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí ze křižovatky u hospody Na mýtince, na lichých křižovatkách odbočí vlevo a na sudých vpravo.[2] Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince? (2 BODY)

(b) Bludiště sestává z konečně mnoha políček čtverečkované sítě a je po obvodu ohraničeno zdmi. Rovněž mezi některými dvojicemi sousedních políček mohou být zdi. Čtverečky jsou orientovány podle světových stran. Na některých políčkách se nacházejí branci. Počáteční pozice každých dvou branců spojuje cesta, která nevede skrz zeď. Generál Koňadra může udílet povely SEVER, JIH, VÝCHOD nebo ZÁPAD. Všichni branci se poté pokusí pohnout o jedno políčko daným směrem. Branec, který se pohnout nemůže, protože mu v kroku brání zeď, zůstane stát. Ukažte, že generál mající dobrý výhled na celé bludiště umí vydávat povely tak, aby všichni branci po konečném počtu povelů stáli na jednom políčku. (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Buď $n > 2$ přirozené číslo. Dokažte, že

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{-krát}} < \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n-1)\text{-krát}}.$$

Takzvané *patrové mocniny*, které se v dokazovaném vztahu vyskytují, se vyhodnocují shora, tedy např. $3^{2^3} = 3^{(2^3)} = 3^8 = 6561$. (2 BODY)

(b) Ukažte, že pro každé přirozené n a každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \cdots (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n (n + 1)^{n+1}}.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Kolik nejvíce průsečíků se stranami ne (nutně konvexního) 333-úhelníku může mít přímka, která není s žádnou z nich rovnoběžná?

(2 BODY)

(b) V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Nechť O a H značí po řadě střed kružnice opsané a průsečík výšek. Pokud P a Q jsou průsečíky přímky OH se stranami AB a BC, ukažte, že $|PO| = |HQ|$.

(3 BODY)

[2] David si bude v duchu počítat, kolik křižovatek již prošel, a podle tohoto počtu se bude rozhodovat. Klidně se mu tedy může stát, že přijde na stejnou křižovatku podruhé, ale rozhodne se odbočit jiným směrem.