Do nekonečna a ještě dál 3

3. seriálová série — Termín odeslání: 11. dubna 2016

Úloha 1. (5 bodů)
Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, pokud existuje reálné číslo, které je větší než všechny prvky dané množiny. V opačném případě říkáme, že je X *shora neomezená*. Nechť je dána shora neomezená množina $X \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že existuje její spočetná podmnožina, která je stále shora neomezená. Vysvětlete, jak přitom používáte axiom výběru.

Úloha 2. (5 bodů)
Dokažte, že lze množinu všech kladných reálných čísel rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny A a B tak, aby byly obě uzavřené na sčítání. Tím myslíme, že musí platit $a_0 + a_1 \in A$ a $b_0 + b_1 \in B$ pro všechna (ne nutně různá) $a_0, a_1 \in A$, $b_0, b_1 \in B$.

Úloha 3. (5 bodů)
Dokažte, že lze celý prostor $\mathbb{R}^3$ získat jako sjednocení nějaké množiny navzájem disjunktních kružnic s poloměrem 1.