Průsečíky

3. jarní série — Termín odeslání: 11. dubna 2016

Úloha 1. (3 body)
Umístěte do roviny kružnici a libovolný počet přímek tak, aby vzniklo právě pět průsečíků a ty tvořily vrcholy pravidelného pětiúhelníku.

Úloha 2. (3 body)
V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 32^\circ$. Výška na stranu AB protíná osu úhlu u vrcholu A na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Určete velikost úhlu BCA.

Úloha 3. (3 body)
Na kružnici k leží body A a B tak, že AB není průměrem k. Uvnitř kratšího oblouku AB se pohybuje bod Y. Spolu s ním se po k pohybuje i bod X tak, že XY je vždy průměrem k. Ukažte, že existuje kružnice ℓ taková, že průsečík AX a BY leží na ℓ pro všechny uvažované polohy bodů X a Y.

Úloha 4. (5 bodů)
Na kružnici ω se středem O leží body A, B, C a D tak, že AB a CD jsou navzájem kolmé průměry. Bod M leží uvnitř úsečky AB. Nechť N je průsečík CM s ω různý od C. Tečna k ω vedená bodem N protne kolmici z M na AB v bodě P. Ukažte, že $|PO| = |MC|$.

Úloha 5. (5 bodů)
Uvnitř čtverce o straně 1008 leží 2016 úseček délky jedna. Ukažte, že existuje přímka rovnoběžná s některou stranou čtverce, která protíná[1] alespoň dvě ze zadaných úseček.

Úloha 6. (5 bodů)
Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB|+|CD| = |BC|$. Označme průsečík os úhlů ABC a BCD jako E a průsečík polopřímek $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$ jako F. Dokažte, že $FAED$ je tětivový čtyřúhelník.

Úloha 7. (5 bodů)
Uvnitř strany AC trojúhelníku ABC leží bod D. Nechť P je průsečík os úhlů BAC a BDC a Q je průsečík os úhlů BCA a BDA. Ukažte, že střed M úsečky PQ splňuje $|MD| > |MB|$.

Úloha 8. (5 bodů)
V rovině leží 2016 jednotkových kružnic tak, že se žádné dvě nedotýkají a každá protíná alespoň tři jiné. Kolik nejméně průsečíků mohou určovat?

[1] Průsečíkem s úsečkou může být i její krajní bod.